Jurnal 53

by Darmawijoyo Darmawijoyo

ARGUMEN MATEMATIKA
STUDI KASUS PADA MATA KULIAH MATEMATATIKA SEKOLAH II

Darmawijoyo

Abstrak. Artikel ini membahas tentang dua hal, yaitu; sistem argumen dalam kajian matematika formal dan kajian kesalahan-kesalahan yang dilakukan oleh peserta mata kuliah matematika sekolah II tahun akademik 2009\2010. Kajian pada sistem argumen difokuskan pada penarikan kesimpulan dengan berbagai tipe pembuktian pada mateamtika formal dan contoh sederhananya pada operasi bilangan. Sedangkaan yang kedua menganalisis kesalahan yang terjadi pada mahasiswa yang mengikuti kuliah matematika sekolah II pada penarikan kesimpulan dan komputasinya.

Kata kunci: Argumen, bukti formal, valid, formulasi masalah, sintaksis, komparasi.

Bagian atau kemasan metode modern pekerjaan matematika adalah bukti. Akan bertolak belakang dengan apa yang sering kita dengar tentang kajian sehari-hari dimana bukti sepertinya barang asing. Kita sering mendengarkan para politisi, para pemeluk agama berdebat bahkan perbincangan sengit dalam rumah tangga kita sendiri. Begitu banyak emosi yang muncul dan sedikit sekali alasan yang sesuatu kita ingin dapatkan.

Matematika sangat berbeda. Keseluruhan subjek matematika bergantung pada logika. Kita tidak akan bias memulai diskusi subjek apa saja dalam matematika tanpa pendefenisian istilah yang didiskusikan. Setelah itu, aturan-aturan tertentu akan dibangun dimana aturan dasar yang dibangun dinamakan ***aksioma***. Aksioma yang telah dibangun ini akan menjadi pondasi yang kuat untuk membuat relasi atau fakta. Relasi tententu atau fakta ini akan dibuktikan kebenarannya. Proses ini yang berlangsung pada kajian apa saja dalam matematika. Proses ini memerlukan keseriusan yang tinggi dan pondasi yang kokoh terhadap subjek matematika tertentu untuk dapat menghasilkan relasi-relasi baru atau fakta-fakta baru.

Sebagai contoh, kajian-kajian Pythagoras (Pythagoreans) sudah berlangsung jaman yunani kuno dimana masa itu telah menekankan pada aturan bukti yang kuat. Sebelum masa itu, pernyataan-pernyataan matematika juga telah dibangun dengan cara menggunakan contoh-contoh, gambar-gambar, dan argument penaralan. Geometri Euclid, dengan system aksiomanya, telah memberikan pondasi yang kuat pada struktur bukti-bukti serta telah menciptakan model dan pola bagaimana matematika dikaji atau dipelajari.

Kajian-kajian tertentu matematika selalu dihadapkan pada relasi-relasi atau fakta-fakta yang yang mendukung terhadap kajian itu. Kajian-kajian baru tidak boleh bertentangan dengan relasi-relasi atau fakta-fakata yang sudah ada. Disinilah kita dapat melihat bahwa kajian-kajian matematika tersusun secara sistematis. Karena kajian-kajian baru dibangun dari konsep-konsep yang sudah ada

Dosen Pendidikan Matematika Unsri

maka relasi-relasi atau fakta-fakta baru dapat digeneralisai.

Dalam tulisan ini, kita akan mengkaji dua hal yaitu; bagaimana argument menjadi kunci matematika penalaran yang digunakan dalam membuktikan pernyataan-pernyataan matematika dan kesalahan-kesalahan argument yang dilakukan oleh mahasiswa pada kasus mata kuliah matematika sekolah II.

Argumen Formal dan Argumen Matematika

Dalam matematika, argumen seringkali dapat diformalkan dengan menuliskan masing-masing pernyataannya dalam bahasa formal seperti orde pertama Peano aritmatika. Argumen formal harus memiliki sifat sebagai berikut:

- Premisnya harus teridentifikasi dengan jelas,
- masing-masing inferensi dijustifikasi dengan merujuk pada aturan penalaran tertentu dari bahasa formal di mana argumen ditulis,
- kesimpulan argumen muncul sebagai inferensi akhir.

Memeriksa validitas argumen formal kian sederhana, verifikasinya menggunakan tiga sifat di atas. Teori argumen berkaitan erat dengan teori logika informal. Idealnya, sebuah teori argumen harus menyediakan beberapa mekanisme untuk menjelaskan validitas argument.

Salah satu pendekatan alamiah akan mengikuti paradigma dan usaha matematika untuk mendefinisikan validitas dalam hal semantik dari pernyataan dalam argumen tersebut. Meskipun pendekatan semacam ini menarik dalam kesederhanaan, hambatan-hambatan untuk melanjutkan cara ini sangat sulit untuk apa saja selain argumen logis.

Namun demikian, salah satu keuntungan dari argumen formal adalah kemungkinan untuk membangun teori matematika argumen yang valid seperti teori bukti.

Contoh-contoh Argumen Sederhana

Contoh berikut diambil dari artikel Whitenack (1999) dengan judul "*Making mathematical arguments in the primary grades: the importance of explaining and justifying ideas*". Pada suatu hari siswa kelas dua yang bernama Casey di tanya oleh gurunya Ibu Jone. Pertanyaannya sebagai berikut: " jika tante Mary mempunyai 31 buah permen di dalam kaleng, kemudian paman Johnny mengambilnya 15 buah berapa buah lagi permen tante Mary di dalam kaleng". Tidak lama kemudian, Casey maju ke depan papan tulis dengan menuliskan jawaban dari pertanyaan gurunya tadi. Casey menulis sebagai berikut:

$$30 - 15 = 15,$$

berikutnya Casey menulis lagi

$$15 + 1 = 16.$$

Kemudian Casey menjawab permen tante Mary di dalam kaleng tinggal 16.

Selanjutnya terjadila dialog berikut:

Ibu Jone:		Mengapa anda melakukan perhitungan seperti itu? Apa artinya hitungan anda itu?
Casey	:	Tiga puluh satu saya ambil satu tinggal tiga puluh, kemudian tiga puluh diambil lima belas tinggal lima belas, sehingga sisa permen tante Mary adalah lima belas ditambah satu. Itulah yang saya lakukan.

Diskusi kelas berlanjut dengan komentar dari siswa lain yaitu Shari. Shari sangat menghargai cara yang dilakukan oleh Casey. Strategi yang dilakukan oleh Casey adalah menggunakan pemahamannya tentang $15+15=30$. Sehingga menurut Shari jika pengalaman yang dimiliki Casey tentang $15+15=30$ memudahkannya untuk membuat strategi yang telah dilakukan oleh Casey sehingga perhitungannya lebih mudah bagi Casey. Ini sekilas tentang diskusi dalam kelas yang membahas strategi Casey menjawab soal.

Ketika Casey menjelaskan pemikirannya di dalam kelas, argumen matematika menjadi bagian dari diskusi berikutnya. Setelah ia mengemukakan argumennya, kelas mampu memahami strateginya, bukan hanya pada jawabannya. Secara signifikan, penjelasan Casey menjadi titik awal untuk teman-teman sekelasnya mengembangkan mengembangkan argumen matematis yang mendukung, memperbaiki, atau, mungkin, membantah ide-idenya, Shari, misalnya, menjelaskan mengapa Casey menyelesaikan masalah dengan cara yang dia lakukan, yaitu, ia mencoba untuk memperjelas penjelasan pemikiran ketika dia menyatakan bahwa pendekatan Casey adalah lebih mudah, atau cara, lebih efisien untuk menemukan jawabannya.

Selain membuat pemikiran Casey lebih jelas untuk orang lain, Shari dan Casey membuka jalan bagi siswa lain untuk mengembangkan argumen yang mendukung atau mungkin, “mendebat” pola pikir Casey sebagai diskusi lanjutan. Contoh ini menggambarkan, menjelaskan ide-ide seseorang yang merupakan bagian penting dari pengembangan argumen matematika. Dengan kata lain, penalaran melibatkan penyusunan argumen matematis, khususnya, menjelaskan ide-ide seseorang untuk mengembangkan strategi penyelesaian masalah matematika.

Menyusunan Argumen pada Matematika Formal

Sebuah bukti matematika adalah suatu argumen yang meyakinkan orang lain bahwa sesuatu yang dibuktikan benar. Matematika bukanlah pengadilan, sehingga "keunggulan bukti" atau "melampaui segala keraguan" belumlah cukup. Pada prinsipnya kajian matematika mencoba untuk membuktikan hal-hal tanpa keraguan sama sekali - meskipun dalam kehidupan nyata orang membuat kesalahan.

Ada kosakata dan tata bahasa tertentu yang mendasari semua bukti matematika. Kosakata ini mencakup kata-kata logis seperti 'atau', 'jika', dan lainnya Kata-kata ini memiliki makna yang sangat tepat dalam matematika yang mungkin sedikit berbeda dari penggunaan sehari-hari. Dengan "tata bahasa", itu berarti bahwa ada beberapa prinsip logika, atau teknik bukti. Kita menggunakan tata bahasa ini untuk memulai suatu pernyataan yang ketahui tahu dan kita dapat menyimpulkan suatu pernyataan yang sebelumnya tidak kita ketahui. Berikut beberapa strategi pembuktian matematika berdasarkan argumentnya.

- Pembuktian dengan Induksi Matematika

Kata "induksi" digunakan dalam bahasa biasa untuk menggambarkan setiap metode inferensi. Induksi matematika diformalisasikan sebagai berikut:

Misalkan $P(n)$ suatu pernyataan untuk masing-masing nilai $n \in \mathbb{N}$. Jika

(1) $P(1)$ pernyataan benar;

(2) $P(j) \Rightarrow P(j+1)$ untuk setiap bilangan bulat positif j

maka $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Sebagai contoh, pandanglah pernyataan $P(n)$ yang diformalkan berikut:

$$P(n): \quad 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Sekarang mari kita justifikasi pernyataan ini dengan menggunakan argument-argumen berikut:

$$P(1): \quad 1=\frac{1(1+1)}{2}=\frac{2}{2}=1.$$

Berarti pernyataan untuk $P(1)$ bernilai bernar. Selanjutnya, kita asumsikan bahwa nilai pernyataan $P(j)$ benar untuk suatu $j \in \mathbb{N}$ (sebarang), kemudian akan diverifikasi kebenaran pernyataan

$$P(j+1): \ 1+2+3+\cdots+j+(j+1)=\frac{(j+1)((j+1)+1)}{2}$$

menggunakan argumen berikut: karena $P(j)$ benar maka persamaan persamaan sebelah kiri pada pernyataan $P(j+1)$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}(1+2+3+\cdots+j)+(j+1) &= \frac{j(j+1)}{2}+(j+1)\\ &= \frac{j(j+1)+2(j+1)}{2}\\ &= \frac{(j+1)(j+2)}{2}\\ &= \frac{(j+1)((j+1)+1)}{2}.\end{aligned}$$

Persamaan terakhir ini menyatakan bahwa pernyataan $P(j+1)$ juga bernilai benar. Menggunakan format argumen matematika induksi, kesimpulan bahwa pernyataan $P(n)$ bernilai bernar untuk semua $n \in \mathbb{N}$ menjadi ***valid***.

❖ Pembuktian dengan Kontradiksi

Beberapa masalah dalam matematika sering memerlukan ***rekonstruksi*** pernyataan matematika yang mana pernyataan baru ini senilai dengan pernyataan awal. Hal ini dikarenakan banyak masalah awal sukar untuk divalidasi menggunakan format argumen standar. Format argumen dari pembuktian dengan kontradiksi ini adalah sebagai berikut:

(1). $P(n)$ suatu pernyataan,

(2). nyatakan hipotesis bukan $P(n)$.

Jika hipotesis ditolak maka pernyataan $P(n)$ valid.

Bukti dengan kontradiksi didasarkan pada "Law of the Excluded Middle" –suatu ide yang kembali ke jaman Aristoteles. Substansi dari strategi bukti adalah bahwa ide adalah benar atau salah. Tidak ada status antara (terjadi hanya satu saja yaitu benar atau salah). Dengan premis dalam benak, kita dapat membuktikan bahwa sesuatu itu benar dengan mengeluarkan kemungkinan bahwa hal itu salah. Cara dimana kita mengeluarkan kemungkinan bahwa pernyataan tersebut salah adalah untuk menganggap itu adalah salah dan menunjukkan bahwa asumsi tersebut mengarah ke posisi yang tidak bisa diterima (yaitu, kontradiksi). Oleh karenanya, satu-satunya kesimpulan yang mungkin adalah bahwa pernyataan itu benar.

Berikut contoh kasus ini:

Misalkan $P(n)$ suatu pernyataan

$P(n)$: $n+1$ surat akan didistribusikan ke n buah kotak surat maka paling sedikit ada satu kotak yang berisi dua surat.

Hipotesis yang kita ajukan adalah pernyataan berikut

$\hat{P}(n)$: $n+1$ surat akan didistribusikan ke n buah kotak surat maka masing-masing kotak surat berisi 0 atau 1 surat.

Menggunakan hipotesis ini kita dapat mengemukan argumen bahwa jumlah surat dari n kotak surat paling banyak n karena masing-masing kotak berisi 0 atau 1 surat. Secara simbolik (matematika formal), argumen di atas dapat kita tuliskan sebagai berikut; misalkan kotak ke j (j bergerak dari 1 sampai ke n) disimbolkan dengan m_j maka

$$n+1=\sum_{j=1}^{n} m_j \leq n.$$

Hipotesis yang kita ajukan berakhir pada pernyataan yang salah yaitu $n+1 \leq n$. Oleh karenanya kita harus menolak hipotesis. Kesimpulannya adalah pernyataan $P(n)$ ***valid*** untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Beberapa catatan penting yang harus kita perhatiakn dalam kajian argumentasi matematika ini adalah sebagai berikut:

1. Perlunya memahami sistematika argumen.
2. Perlunya unsure-unsur logika yang kuat.
3. Perlunya pengetahuan awal yang cukup untuk mendukung pernyataan yang akan dibangun.
4. Perlunya pemahaman yang mendalam tentang pernyataan simbolik yang sebagaian besar memuat pernyataan implisit.

Kasus pada Mata Kuliah Sekolah Menengah II.

Data yang diambil dari perkuliahan matematika sekolah adalah hasil tes tengah semester pada semester genap untuk tahun akademik 2009/2010. Hasil tes ini di analsis yang difokuskan pada argument yang diberikan. Hasil analisis ini didiskusikan di dalam perkuliahan dengan tujuan agar ada perbaikan argument dan cara memperlajari argument matematika.

Setelah dianalaisis hasil tes, teridentifikasi beberapa kesalahan yang dilakukan oleh mahasiswa yaitu; tidak memberi jastifikasi pada pernyataan matematika, kesalahan, tidak dapat memformulasikan masalah dengan baik, kesalahan sintaksis, dan kesalahan komparasi. Berikut analisis yang telah dilakukan terhadap hasil ujian tertulis.

Contoh Misalkan $a \in \mathbb{R}$, buktikan bahwa $(-a)^{2n} = a^{2n}$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$!

Bukti:

$$\begin{aligned}(-a)^{2n} &= ((-1)a)^{2n}\\ &= a^{2n}\end{aligned}$$

Kesalahan yang dilakukan adalah tidak memberikan jastifikasi bahwa $-a = (-1)a$ dan $(-1)^2 = 1$. Seharusnya, jastifikasinya adalah teorema 2.3.6 (1) untuk $-a = (-1)a$ dan menggunakan teorema 2.3.6 (2) untuk $(-1)^2 = (-1)(-1) = 1 \cdot 1 = 1$.

Begitu juga dengan kesalahan menggunakan induksi matematika, seperti berikut:

Untuk $n = 1$ berlaku $(-a)^{2n} = (-a)^2 = a^2 = a^{2n}$.

Asumsikan benar untuk $n = k$, maka untuk $n = k+1$ berlaku

$$\begin{aligned}(-a)^{2(k+1)} &= (-a)^{(2k+2)}\\ &= (-a)^{2k} \cdot (-a)^2\\ &= a^{2k} \cdot (-a)^2\\ &= a^{2k} \cdot a^2\\ &= a^{2k+2}\\ &= a^{2(k+1)}\end{aligned}$$

Tampak kesalahan terjadi adalah tidak menjastifikasi bahwa benar $(-a)^{2k} = a^{2k}$.

Contoh lain.

Buktikan bahwa $3 | (4^n - 1)$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Bukti:

Untuk $n = 1$ diperoleh bahwa $3 | (4^1 - 1)$ benar.

Asumsikan bahwa $3 | (4^n - 1)$ benar untuk $n \leq k, k \in \mathbb{N}$.

Berarti $4^k - 1 = 3x_1$.

$3 | (4^{(k+1)} - 1)$ menyatakan

$$\begin{aligned}3x_2 &= 4^{k+1} - 1\\ &= 4^k \cdot 4^1 - 1\\ &= (3x_1 + 1) \cdot 4 - 1\\ &= 12x_1 + 3\end{aligned}$$

Memisalkan $k = x_2 - 4x_1$ diperoleh $3 = 3k$. Terbukti.
Kita lihat betapa pekerjaan ini tidak mempunyai struktur matematika, sistematika pekerjaan tidak ada. Hal ini mengindentifikasikan bahwa berfikir matematika belum dimikili.
Seharusnya, pekerjaan ini perlu diformulasikan dahulu permasalahan. Kemudian apa yang perlu dicari untuk menyelesaikan masalah dan bagaimana mencarinya.

Formulasi masalah. $3|(4^n - 1)$ berarti ada $r_n \in N$ sedemikian hingga $4^n - 1 = 3r_n$. Tahap ini menunjukan pemahan siswa terhadap masalah matematika yang diberikan. Karena permasalahan yang diberikan adalah untuk mencari $r_n \in N$ yang memenuhi $4^n - 1 = 3r_n$ untuk semua $n \in N$, maka cara mencari $r_n \in N$ dapat menggunakan induksi.

Bukti lengkap.
Untuk $n = 1$ diperoleh bahwa pernyataan $3|(4^1 - 1)$ benar.
Asumsikan bahwa $3|(4^n - 1)$ benar untuk $n \le k$, $k \in N$. Berarti ada $q_k \in N$ sedemikian hingga $4^k - 1 = 3q_k$.
Untuk $n = k + 1$, akan dicari $q_{k+1} \in N$ sedemikan hingga $4^{k+1} - 1 = 3q_{k+1}$.
Perhatikan persamaan berikut

$$\begin{aligned} 4^{k+1} - 1 &= 4^k \cdot 4^1 - 1 \\ &= 3 \cdot 4^k + (4^k - 1) \\ &= 3 \cdot 4^k + 3q_k \\ &= 3(4^k + q_k) \end{aligned}$$

Dengan memilih $q_{k+1} = 4^k + q_k$ dimana $4^k, q_k \in N$, pernyataan terbukti.

Cara kedua (penalaran). Diketahui bahwa
$4^{k+1} - 1 = 4 \cdot 4^k - 1 = (3 \cdot 4^k) + (4^k - 1)$. Jika $4^k - 1$ habis dibagi 3 maka kedua suku sebelah kanan persamaan habis dibagi 3, maka menggunakan induksi terbukti bahwa $3|(4^n - 1)$ untuk $n \in N$.

Kesalahan sintaksis:
Untuk $n \ge 0 \to (-a)^{2n} = a^{2n}$

$$\begin{aligned} & (-a)^{2n} = a^{2n} \\ \Leftrightarrow\ & (-a)^{2n+2} \\ \Leftrightarrow\ & (-a)^{2n} \cdot (-a)^2 \\ & \vdots \end{aligned}$$

Kesalahan sintaksis terdapat pada pernyataan berikut

$$\begin{aligned} & (-a)^{2n} = a^{2n} \\ \Leftrightarrow\ & (-a)^{2n+2} \end{aligned}$$

Kesalahan Komparasi:

$$2^k > k^2$$

$$2^k + 2k > k^2 + 2k$$

$$2^k + 2k + 1 > k^2 + 2k + 1$$

$$2(2^k + 2k + 1) > 2(k^2 + 2k + 1) > k^2 + 2k + 1$$

$$2 \cdot 2^k > k^2 + 2k + 1$$

Kesalahan terjadi pada pernyataan

$$2(2^k + 2k + 1) > 2(k^2 + 2k + 1) > k^2 + 2k + 1$$

ke pernyataan $2 \cdot 2^k > k^2 + 2k + 1$.

KESIMPULAN

Argumen formal matematika merupakan jembatan emas untuk mencapai tataran berfikir terstruktur. Berfikir terstruktur ini diperlukan dalam pekerjaan pemecahan masalah, berfikir kritis, berfikir kreatif (berfikir tingkat tinggi).

Kesalahan-kesalahan terjadi yang dilakukan di atas jelas diakibatkan tidak kuatnya sistem argument yang dimiliki. Dampak dari kelemahan ini, tidak ada pola fakir terstruktur dalam mengerjakan soal matematika.

DAFTAR PUSTAKA

1. Selin, H..ed., (2000)*Mathematics Across Cultures*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht

2. Wadi, Hendra. 2010. Pengembangan soal-soal pembelajaran berbasis masalah untuk meningkatkan kemampuan logika berfikir matematika di SMA Negeri I Muara Beliti Kabupaten Musi Rawas. Tesis Magister Pendidikan Matematika Unsri.

3. Whitenack, et all. (1999). Making mathematical arguments in the primary grades: the importance of explaining and justifying ideas. National Council of Teachers of Mathematics, Inc. The Gale Group, Farmington Hills, Michigan.

.

Jurnal 53

ORIGINALITY REPORT

8%	5%	3%	5%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

MATCH ALL SOURCES (ONLY SELECTED SOURCE PRINTED)

2%

★ repository.upi.edu

Internet Source

Exclude quotes	On	Exclude matches	< 1%
Exclude bibliography	On		