PENERBIT ANDI

Persamaan Diferensial Biasa

Bambang Suprihatin, M.Si
Putera Bahtera Jaya Bangun
Muhammad Arhami

Persamaan Deferensial Biasa
**Oleh: Bambang Suprihatin, M.Si., Putra Bahtera Jaya Bangun,
Muhammad Arhami**

Editor	: Fl. Sigit Suyantoro
Setting	: Elisabeth Pipit
Desain Cover	: Krisna
Korektor	: Andang

Penerbit: C.V ANDI OFFSET (Penerbit ANDI)
Jl. Beo 38-40, Telp. (0274) 561881 (Hunting), Fax. (0274) 588282 Yogyakarta 55281

Percetakan: ANDI OFFSET
Jl. Beo 38-40, Telp. (0274) 561881 (Hunting), Fax. (0274) 588282 Yogyakarta 55281

Perpustakaan Nasional: Katalog dalam Terbitan (KDT)

Suprihatin, Bambang

Persamaan Deferensial Biasa/ Bambang Suprihatin, Putra Bahtera Jaya Bangun, Muhammad Arhami;

– **Ed. I .** – Yogyakarta: ANDI,

22 21 20 19 18 17 16 15 14 13

viii + 144 hlm.; 16 x 23 Cm.

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

ISBN: 978 – 979 – 29 – 3982 – 8

I. Judul

1. Differential Algebras
2. Bangun, Putra Bahtera Jaya
3. Arhami, Muhammad

DDC'21 : 512.56

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT, karena berkat rahmat-Nya kami dapat menyelesaikan buku *Persamaan Diferensial Biasa* ini. Buku ini dirintis sejak tahun 2001 dan telah disempurnakan pada kegiatan Penataran Penyusunan Buku Ajar yang diselenggarakan oleh Ditjen Dikti Kemendikbud RI di Cisarua, Bogor pada Bulan September 2004, yang disempurnakan lagi pada kegiatan Lokakarya Buku Ajar di Jurusan Matematika yang didanai oleh Proyek PHK A2 pada tahun 2008.

Persamaan Diferensial Biasa merupakan salah satu mata kuliah wajib pada Jurusan Matematika Fakultas MIPA. Isi buku ini telah disesuaikan dengan SAP mata kuliah Persamaan Diferensial Biasa (PDB), yang dirancang dan disusun sedemikian rupa sehingga mudah dipahami. Buku ini cocok untuk mahasiswa jurusan Matematika di Fakultas MIPA dan FKIP, mahasiswa Fakultas Teknik, juga fakultas lain yang menggunakan persamaan diferensial dalam perkuliahannya.

Terima kasih kami sampaikan kepada orang tua kami, isteri kami, dan anak-anak kami yang telah bersabar menemani kami dan telah merelakan waktunya untuk kami, terus memotivasi kami untuk berkarya.

Pada kesempatan ini kami juga mengucapkan terima kasih kepada Rektor, Dekan dan Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya, Dirjen Dikti Kemendikbud RI, dan semua pihak yang telah menyumbangkan pikiran dan tenaganya demi terbitnya buku ini.

Terima kasih kami sampaikan juga kepada penerbit ANDI OFFSET yang telah bersedia menerbitkan buku PDB ini. ANDI OFFSET telah membuat buku ini dapat berada di tangan pembaca semua. Kami ucapkan terimakasih pula kepada semua pihak yang telah membantu, yang tidak dapat kami sebutkan satu per satu dalam kesempatan ini.

Akhirnya, terima kasih juga kepada para pembaca yang telah memilih buku PDB ini sebagai bahan bacaan, referensi dan buku pegangan. Kami berharap Anda semua menemukan manfaat di dalamnya.

DAFTAR ISI

BAB 1

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial (yang selanjutnya disingkat PD) adalah persamaan yang mengandung turunan-turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui yang dinamakan $y(x)$ dan yang ditentukan dari persamaan tersebut. PD muncul dalam banyak penerapan, misalnya di bidang teknik, pertanian, ekonomi, dan lain-lain. Contoh PD:

1. $\frac{dy}{dx} = 0$
2. $\frac{dy}{dx} + xy = e^x$
3. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + x = \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$
4. $y'' + 4y = 0$ di mana $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ dan $y' = \frac{dy}{dx}$
5. $y'' = \cos x$
6. $\frac{dy}{dx} = \frac{5x+y}{5x-y}$
7. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = \sin x$
8. $\frac{d^2Q}{dt^2} - 3\frac{dQ}{dt} + 2Q = \sin 2t$

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 PENDAHULUAN

Persamaan diferensial (yang selanjutnya disingkat PD) adalah persamaan yang mengandung turunan-turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui yang dinamakan $y(x)$ dan yang ditentukan dari persamaan tersebut. PD muncul dalam banyak penerapan misalnya di bidang teknik, pertanian, ekonomi dan lain-lain. Contoh PD:

1. $\frac{dy}{dx} = 0$

2. $\frac{dy}{dx} + xy = e^x$

3. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + x = \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$

4. $y'' + 4y = 0$ dimana $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ dan $y' = \frac{dy}{dx}$

5. $y'' = \cos x$

6. $\frac{dy}{dx} = \frac{5x + y}{5x - y}$

7. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = \sin x$

8. $\frac{d^2Q}{dt^2} - 3\frac{dQ}{dt} + 2Q = \sin 2t$

9. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

10. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x.$

PD dibedakan atas dua jenis, yaitu PD biasa (PDB) dan PD parsial (PDP). PD biasa adalah suatu PD yang hanya mengandung satu variabel.bebas. Hal ini dapat dilihat pada Contoh 1 s.d. 8. Sedangkan pada Contoh 9 dan 10 terlihat bahwa variabel bebasnya lebih dari satu atau dengan kata lain melibatkan turunan parsial dinamakan PD parsial.

Suatu PD dikatakan berorde n jika turunan ke-n merupakan turunan tertinggi. Sementara itu, derajat PD adalah pangkat tertinggi dari turunan tertinggi pada suatu PD.

1.2 KONSEP PENYELESAIAN PDB

Suatu fungsi $y = g(x)$ dikatakan merupakan penyelesaian PDB apabila $g(x)$ didefinisikan dan dapat didiferensialkan sehingga persamaan tersebut menjadi suatu identitas (kesamaan) pada PDB tersebut. Hal utama dalam PDB dan penerapannya adalah untuk mencari semua penyelesaian persamaan yang diberikan. Namun demikian, sebelum semua itu dibahas lebih lanjut, pada bagian ini dibahas bagaimana menentukan PD jika diketahui penyelesaiannya.

1.3 MENENTUKAN PDB

Langkah-langkah untuk menentukan PDB jika diketahui atau diberikan suatu penyelesaiannya adalah sebagai berikut:

1. Tentukan banyaknya konstanta sebarang.
2. Turunkan sebanyak konstanta sebarangnya.

3. Jika penyelesaian itu didiferensialkan sehingga konstanta sebarangnya sudah lenyap maka hasil diferensialnya merupakan PDB.
4. Jika konstanta sebarangnya masih ada maka lenyapkan (eliminir) konstanta sebarangnya sesuai dengan aturan yang ada.

Contoh 1.1. Tunjukkan bahwa $y = x^2 + c_1 x + c_2$ adalah penyelesaian dari PDB $y'' = 2$.

Penyelesaian. Oleh substitusi diperoleh identitas 2 = 2, yakni dari $y = x^2 + c_1 x + c_2$ diturunkan sekali dan dua kali, berturut-turut diperoleh

$$y' = 2x + c_1 \text{ dan } y'' = 2.$$

Jadi 2 = 2. Dengan demikian $y = x^2 + c_1 x + c_2$ adalah penyelesaian dari $y'' = 2$. Persamaan $y = x^2 + c_1 x + c_2$ dimana terdapat dua konstanta sebarang c_1 dan c_2 ini disebut "penyelesain umum". Sementara itu, $y = x^2 + 3x + 2$ adalah penyelesaian "khusus" (partikulir) dari PDB $y'' = 2$ yang diperoleh dari penyelesaian umum setelah mengganti c_1 dengan 3 dan c_2 dengan 2, berdasarkan ketentuan yang diberikan.

Contoh 1.2. Tentukan PDB yang penyelesaiannya $y = x^2 + A + B$.

Penyelesaian. Konstanta A daan B dapat dijadikan satu saja yaitu C sehingga $y = x^2 + A + B$ dapat ditulis menjadi $y = x^2 + C$. Konstanta sebarangnya hanya satu yaitu C sehingga hanya diturunkan satu kali (turunan pertama), yakni:

$$y' = 2x \text{ atau } \frac{dy}{dx} = 2x.$$

Terlihat bahwa konstanta sebarangnya tidak ada lagi sehingga

$$y' = 2x \text{ atau } \frac{dy}{dx} = 2x$$

adalah PDB ditanyakan.

Contoh 1.3. Tentukanlah PDB yang penyelesaiannya $y = Ae^{x+B}$.

Penyelesaian. Bentuk $y = Ae^{x+B}$ dapat ditulis ulang menjadi

$$y = Ae^{x} \,.\, e^{B}$$
$$= Ae^{B} \,.\, e^{x}.$$

Bentuk Ae^{B} dapat digantikan oleh satu konstanta sebarang saja, katakanlah C, sehingga bentuk $y = Ae^{x+B}$ dapat dituliskan menjadi

$$y = Ce^{x}. \tag{1.1}$$

Dengan demikian konstanta sebarangnya hanya satu, sehingga hanya diturunkan satu kali, diperoleh $y = Ce^{x}$. Terlihat bahwa konstanta C masih ada. Untuk itu konstanta C harus dieliminir. Caranya yaitu substitusikan Persamaan (1.1) pada $y = Ce^{x}$, sehingga diperoleh PDB yang ditanyakan, yakni

$$y' = y \quad \text{atau} \quad y' - y = 0.$$

Contoh 1.4. Carilah PDB yang penyelesaiannya $x^2y^3 + x^3y^5 = C$.

Penyelesaian. PDB yang diberikan diturunkan terhadap x satu kali, diperoleh

$$2xy^3 + 3x^2y^2\frac{dy}{dx} + 3x^2y^5 + 5x^3y^4\frac{dy}{dx} = 0,$$

adalah PDB yang ditanyakan karena konstanta sebarangnya sudah lenyap.

Contoh 1.5. Tentukan PDB yang penyelesaiannya $y = A\cos 2x + B\sin 2x$, dengan A dan B konstanta sebarang.

Penyelesaian. Dari persamaan $y = A\cos 2x + B\sin 2x$, diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$$
$$= -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$

$$= -4(\mathrm{A}\cos 2x + \mathrm{B}\sin 2x).$$

Akibatnya, diperoleh hubungan

$$y'' = -4y \text{ atau } y'' + 4y = 0,$$

adalah PDB yang ditanyakan.

Contoh 1.6. Tentukan PDB yang penyelesaiannya $y = \mathrm{A}e^{2x} + \mathrm{B}e^{x} + \mathrm{C}$.

Penyelesaian. Jika persamaan $y = \mathrm{A}e^{2x} + \mathrm{B}e^{x} + \mathrm{C}$ diturunkan sekali, dua kali, dan tiga kali, berturut-turut diperoleh

$$y' = 2\mathrm{A}e^{2x} + \mathrm{B}e^{x}$$

$$y'' = 4\mathrm{A}e^{2x} + \mathrm{B}e^{x}$$

$$y''' = 8\mathrm{A}e^{2x} + \mathrm{B}e^{x}.$$

Perhatikan bahwa

$$y'' - y' = 2Ae^{2x}$$

$$y''' - y'' = 4Ae^{2x}.$$

Akibatnya, diperoleh hubungan yang merupakan PDB yang ditanyakan, yakni

$$y''' - y'' = 2\left(y'' - y'\right).$$

Contoh 1.7. Tentukan PDB dari lingkaran-lingkaran yang jari-jarinya tetap r dan dengan pusat terletak pada sumbu X.

Penyelesaian. Persamaan lingkaran itu adalah

$$(x - \mathrm{C})^2 + y^2 = r^2 \tag{1.2}$$

dimana C konstanta sebarang. Turunkan terhadap x diperoleh

$$2(x - \mathrm{C}) + 2y\,\frac{dy}{dx} = 0,$$

atau

$$(x - C) + y\,\frac{dy}{dx} = 0,$$

atau

$$(x - C) = -\,y\,\frac{dy}{dx}\,.$$

Substitusikan persamaan terakhir ini ke Persamaan (1.2), diperoleh

$$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = r^2,$$

adalah PDB yang ditanyakan.

Soal Latihan

Tentukan PDB yang penyelesaiannya:

1. $Ax^2 + By^2 = 100$, dimana A dan B konstanta sebarang.
2. $y = C_1 \sin x + C_2 x$, dimana C_1 dan C_2 konstanta sebarang.
3. $y = Ax + B$, dengan A dan B konstanta sebarang.
4. $y = e^{x+A}$, dengan A konstanta sebarang.
5. $y = \sin(x + A)$, dengan A konstanta sebarang.
6. $y = Ae^x + B$, dengan A dan B konstanta sebarang.
7. $\ln y = Ax^2 + B$, dengan A dan B konstanta sebarang.
8. $y = A\cos(x/8) + B\sin(x/8)$, dengan A dan B konstanta sebarang.
9. Tentukanlah PDB dari lingkaran yang berjari-jari r yang berpusat pada sumbu Y.
10. Tentukan PDB yang penyelesaiannya $y = C_1 \sin x + \cos y = C\,x$.

BAB 2
PDB ORDE SATU DERAJAT SATU

Bentuk umum PDB orde satu derajat satu dapat ditulis dalam bentuk

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Bentuk ini dapat pula dimanipulasi menjadi bentuk yang lain dengan pengertian yang sama. Sebagai contoh, pada bentuk

$$(y + x)\, dx + (y - x)\, dy = 0,$$

terlihat bahwa

$$M(x,y) = (y + x) \text{ dan } N(x,y) = (y - x).$$

Bentuk di atas dapat pula ditulis menjadi

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y+x}{y-x} = 0\,.$$

PDB orde satu derajat satu dapat diselesaikan dengan menggunakan beberapa metode, yang akan dibahas di bawah ini.

2.1 MEMISAHKAN PEUBAH

Kadang-kadang bentuk $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ dapat diubah menjadi $P(x)dx + Q(y)dy = 0$ dimana $P(x)$ adalah suatu fungsi dari x saja dan $Q(y)$ adalah suatu fungsi dari y saja. Persamaan demikian dinamakan persamaan dengan peubah terpisah (memisahkan peubah) atau persamaan yang dapat dipisahkan. Dengan mengintegralkan kedua ruas maka diperoleh

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = 0.$$

Jika diasumsikan bahwa P dan Q adalah fungsi yang kontinu, maka integral di atas ada dan dengan menghitung integral tersebut diperoleh penyelesaian umumnya.

Contoh 2.1. Selesaikanlah PDB $y\,y' + 4x = 0$.

Penyelesaian. Dengan pemisahan peubah maka di dapat:

$$y\,\frac{dy}{dx} + 4x = 0,$$

atau $y\,dy = -4x\,dx$, atau $y\,dy + 4x\,dx = 0$.

Dengan mengintegralkan maka didapat

$$\int y\,dy + \int 4x\,dx = \int 0$$

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{4}{2}x^2 = C \quad \text{atau} \quad 2y^2 + 4x^2 = C,$$

yang menggambarkan suatu keluarga ellips.

Contoh 2.2. Selesaikanlah PDB $y' = 1 + y^2$.

Penyelesaian.

$$y' = 1 + y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$$

$$\frac{dy}{1+y^2} = dx$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = dx$$

$$\text{arc}(\tan y) = x + C \quad \text{atau} \quad y = \tan(x + C).$$

Contoh 2.3. Selesaikanlah PDB $y' = -2xy$.

Penyelesaian. PDB dapat ditulis

$$\frac{dy}{dx} = -2xy$$

$$\frac{dy}{y} = -2x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx$$

$$\ln|y| = -x^2 + C.$$

2.2 PDB HOMOGEN

Dari bentuk M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 dikatakan PDB homogen bila M(x,y) dan N(x,y) homogen dan berderajat sama. PDB ini diselesaikan dengan substitusi

$$v = \frac{y}{x} \text{ atau } y = vx,$$

sehingga diperoleh

$$dy = v\,dx + x\,dv.$$

Contoh 2.4. Selesaikanlah PDB $(x + y)dx + (y - x)dy = 0$.

Penyelesaian. PDB ini dapat diubah menjadi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(x+y)}{(y-x)} = \frac{x+y}{x-y},$$

atau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} \ .$$

(2.1)

Misal $y = vx$, sehingga d$y = v$ d$x + x$ dv. Substitusikan pada Persamaan (2.1), diperoleh

$$v + x\ \frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{1-v}$$

atau

$$x\ \frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{1-v} - v = \frac{1+v-v(1-v)}{1-v} \ ,$$

yang disederhanakan menjadi

$$x\ \frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{1-v} \quad \text{atau} \quad \frac{1-v}{1+v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{dx}{x} \ .$$

Dengan pengintegralan diperoleh

$$\int \frac{1-v}{1+v^2}\,dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{1+v^2} - \int \frac{v}{1+v^2}\,dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$\text{arc tan } v - \frac{1}{2}\ln(1+v^2) = \ln x + C$$

$$\text{arc tan } v = \ln(1+v^2)^{1/2} + \ln x + C$$

$$\text{arc tan }(y/x) = \ln x\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)^{1/2} + C,$$

adalah penyelesaian PDB yang diminta.

Contoh 2.5. Selesaikan PDB $(2x^3 + y^3)\,\mathrm{d}x - 3xy^2\,\mathrm{d}y = 0$.

Penyelesaian. PDB dapat ditulis menjadi

$$3xy^2\,\mathrm{d}y = (2x^3 + y^3)\,\mathrm{d}x$$

atau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3 + y^3}{3xy^2} = \frac{2 + \frac{y^3}{x^3}}{3\frac{y^2}{x^2}} .$$

Misal $v = \frac{y}{x}$, sehingga

$$\mathrm{d}y = v\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}v \text{ dan } \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} .$$

Substitusikan pada PDB, diperoleh

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{2 + v^3}{3v^2}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{2 + v^3 - 3v^3}{3v^3} = \frac{2 - 2v^3}{3v^2}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{3v^2}{2 - 2v^3}\,dv .$$

Dengan pengintegralan diperoleh

$$\int \frac{3v^2 dv}{2 - 2v^3} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln\left(1-\frac{v^3}{x^3}\right)^{1/2} + \ln x + C = 0 \text{ atau } \ln x\left(1-\frac{v^3}{x^3}\right)^{1/2} + C = 0,$$

adalah penyelesaian PDB yang diminta.

2.3 PDB DENGAN KOEFISIEN LINIER

Bentuk umum PDB dengan koefisien linier adalah

$(ax + by + c)\, dx + (px + qy + r)\, dy = 0.$ (2.2)

1. Bila c = 0 dan r = 0 maka bentuk (2.2) menjadi

   $(ax + by)\, dx + (px + qy)\, dy = 0,$

   adalah PDB homogen sehingga dapat diselesaikan dengan mensubstitusikan $v = \dfrac{y}{x}$.

2. Bila $px + qy = k\,(ax + by)$ dimana k = konstanta, maka bentuk (2.2) menjadi

   $$(ax + by + c)\, dx + k(ax + by) + r\, dy = 0. \qquad (2.3)$$

   Misalkan $ax + by = z$, sehingga diperoleh

   $a\,dx + b\,dy = dz,$

   dan

   $$dy = \frac{dz - adx}{b}.$$

   Akibatnya bentuk (2.3) menjadi

   $$(z + c)\, dx + (kz + r)\, dy = 0$$

   $$(z + c)\, dx + (kz + r)\left(\frac{dz - adx}{b}\right) = 0$$

   $$b(z + c)\, dx + (kz + r)\, dz - a(kz + r)\, dx = 0$$

$$b(z + c) - a(kz + r)\,dx + (kz + r)\,dz = 0,$$

merupakan PDB dengan variabel terpisah.

3. Bila $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$; c $\neq 0$ dan r $\neq$ 0.

   Diselesaikan dengan memisalkan

$$ax + by + c = u$$
$$px + qy + r = v$$
$$adx + bdy = du$$
$$pdx + qdy = dv$$

$$dx = \frac{\begin{vmatrix} du & b \\ dv & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}} = \frac{qdu - bdy}{aq - bp}.$$

   Substitusi pada Persamaan (2.3), diperoleh PDB homogen.

Contoh 2.6. Selesaikanlah PDB $(x + y + 1)\,dx + (2x + 2y + 1)\,dy = 0$.

Penyelesaian. Misal $x + y = z$, sehingga

$$dz = dx + dy \text{ atau } dy = dz - dx.$$

PDB menjadi

$$(z + 1)\,dx + (2z + 1)\,(dz - dx) = 0$$
$$(z + 1)\,dx + (2z + 1)\,dx - (2z + 1) = 0$$
$$-zdx + (2z + 1)\,dz = 0.$$

Dengan pengintegralan diperoleh

$$\int dx = \int \frac{2z+1}{2} dz$$

$$x = 2z + \ln z + c$$

$$x = 2(x + y) + \ln (x + y) = c,$$

adalah penyelesaian PDB yang diminta.

Contoh 2.7. Carilah solusi dari PDB $(x + 2y - 1)\, dx + (2x - y - 7)\, dy = 0$.

Penyelesaian. Misal $x + 2y - 1 = u$, dan $2x - y - 7 = v$, sehingga diperoleh

$$dx + 2dy = du$$

$$2dx - dy = dv$$

$$dx = \frac{\begin{vmatrix} du & 2 \\ dv & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-du - 2dv}{-1-4} = \frac{du + 2dv}{5}$$

$$dy = \frac{\begin{vmatrix} 1 & du \\ 2 & dv \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{dv - 2du}{-1-4} = \frac{2du - dv}{5}.$$

Substitusikan pada PDB semula, diperoleh

$$u\frac{(du + 2dv)}{5} + v\frac{(dv - 2du)}{-5} = 0$$

$$\frac{udu + 2udv + 2vdu - vdu}{5} = 0$$

$$(u + 2v)du + (2u - v)dv = 0$$

$$(2u - v)dv = -(u + 2v)\, du$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{-(u+2v)}{(2u-v)},$$

yang merupakan PDB homogen. Selanjutnya, dengan memisalkan

$$z = \frac{v}{u} \quad , \quad \frac{dv}{du} = u\frac{dz}{du} + z,$$

PDB homogen ini dapat ditulis menjadi

$$\frac{dv}{du} = -\frac{(1+2\frac{v}{u})}{2-\frac{v}{u}} = (\frac{1+2z}{2-z})$$

$$z + \frac{udz}{du} = \frac{1+2z}{z-2} \qquad \frac{u\,dz}{du} = \frac{1+2z-z(z-2)}{z-2}$$

$$u\frac{dz}{du} = \frac{1-z^2+4z}{z-2},$$

dan dengan pengintegralan diperoleh

$$\int \frac{z-2}{1+4z-z^2}\,dz = \int \frac{du}{u}$$

$$-\frac{1}{2}(1 + 4z - z^2) = \ln u + c$$

$$\ln (1 + 4\frac{v}{u} - \frac{v^2}{u^2})^{1/2} u + c = 0$$

$$(u^2 + 4uv - v^2)^{1/2} = e^c$$

$$u^2 + 4uv - v^2 = A$$

$$(x + 2y - 1)^2 + 4(x + 2y - 1)(2x - y - 7) - (2x - y - 7)^2 = A$$

$$x^2 + 4y^2 + 1 + 4xy - 2x - 4y + 8x^2 - 4xy - 28x + 16xy - 8y^2$$

$$-56y - 8x + 4y + 28 - 4x^2 - y^2 - 49 + 4xy + 28x - 14y = A$$

$$5x^2 + 20xy - 5y^2 - 10x - 70y - 20 = A$$

$$x^2 + 4xy - y^2 - 2x - 4 = A$$

$$x^2 + 4xy - y^2 - 2x = B,$$

adalah solusi PDB yang diminta.

2.4 PDB EKSAK

Suatu PDB orde pertama yang berbentuk

$$M(x,y)\, dx + N\, (x,y)\, dy = 0,$$

dikatakan eksak, jika ruas kiri persamaan tersebut merupakan diferensial total atau diferensial eksak

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

dari fungsi u(x,y). Maka PDB M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 dapat ditulis menjadi du = 0. Dengan pengintegralan, maka diperoleh penyelesaian umum PDB orde pertama tersebut dalam bentuk:

$$u(x,y) = 0.$$

Dengan membandingkan M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 dan persamaan yang berikutnya, terlihat bahwa persamaan di atas adalah persamaan yang eksak jika terdapat suatu fungsi u(x,y) sedemikian hingga

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M \quad \text{dan} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N\,.$$

Misalkan M dan N terdefinisi dan mempunyai turunan parsial yang pertama dan kontinu pada suatu daerah di bidang xy yang dibatasi oleh suatu kur*v*a tertutup yang tak beririsan dengan dirinya sendiri. Maka diperoleh turunan sebagai berikut:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \, \partial x} \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y}.$$

Dengan asumsi kontinuitas turunan, maka dua turunan kedua dari fungsi ini akan sama sehingga diperoleh

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Penyelesaian dari persamaan eksak diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{M}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \mathrm{N}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \tag{2.5}$$

Dengan mengintegralkan Persamaan (2.4), maka diperoleh

$$\mathrm{u}(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \mathrm{K}(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\int \mathrm{M}(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{dx} + \mathrm{K}(\mathrm{y})\right\} = \mathrm{N}(x,y),$$

atau

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\int \mathrm{M}(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{dx}\right\} + \frac{\partial\,\mathrm{K}(\mathrm{y})}{\partial\,\mathrm{y}} = \mathrm{N}(x,y)$$

$$\frac{\partial\,\mathrm{K}(\mathrm{y})}{\partial\,\mathrm{y}} = \mathrm{N}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) - \frac{\partial}{\partial\,\mathrm{y}}\left\{\int \mathrm{M}(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{dx}\right\}.$$

Integralkan ruas kiri dan ruas kanan maka diperoleh

$$\mathrm{K}(y) = \mathrm{N}(x,y)\,\mathrm{d}y - \int \left\{\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\right\} dy.$$

Dengan demikian maka diperoleh penyelesaian PDB eksak adalah

$$u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \int \left\{ N - \frac{\partial}{\partial y} \int M\,dx \right\} dy = C\,.$$

Contoh 2.8. Selesakanlah PDB $xy' + y + 4 = 0$.

Penyelesaian. PDB di atas dapat dituliskan dalam bentuk

$$(y + 4)\,dx + x\,dy = 0.$$

Terlihat bahwa

$$M(x,y) = y + 4 \text{ dan } N(x,y) = x.$$

Diperoleh

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \text{ dan } \frac{\partial N}{\partial x} = 1,$$

sehingga merupakan PDB eksak. Akibatnya

$$u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + K(y)$$

$$u(x,y) = \int M(y+4)\,dx + K(y)$$

$$u(x,y) = xy + 4x + K(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + K'(y) = N(x,y)$$

$$x + K'(y) = x.$$

Jadi, $K'(y) = 0$, sehingga $K(y) = C$. Penyelesaian PDB adalah

$$u(x,y) = xy + 4x + C = 0.$$

Contoh 2.9. Tentukanlah penyelesaian umum dari PDB

$$2x \sin 3y\,dx + (3x^2 \cos 3y + 2y)\,dy = 0.$$

Penyelesaian. Dari PDB di atas diperoleh

$$M(x,y) = 2x \sin 3y, \text{ dan } N(x,y) = 3x^2 \cos 3y + 2y$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= 6x \ cos \ 3y \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 6x \, cos \ 3y \end{aligned}\right\} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \text{maka PD di atas merupakan PD eksak.}$$

Akibatnya,

$$u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + K(y)$$

$$= \int (2x \sin 3y)\,dx + K(y)$$

$$= x^2 \sin 3y + K(y),$$

sehingga

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 \cos 3y + K'(y) = N(x,y).$$

Diperoleh hubungan

$$3x^2 \cos 3y + \frac{dk(y)}{dy} = 3x^2 \cos 3y + y$$

$$\frac{dk(y)}{dy} = 2y$$

$$dk(y) = 2y \, dy$$

$$k(y) = y^2 + C.$$

Dengan demikian penyelesaian umum PDB eksak adalah

$$x^2 \sin (3y) + y^2 = C.$$

Contoh 2.10. Selesaikanlah PDB $(3x^2 + 3y^2)\,dx + 6xy\,dy = 0$.

Penyelesaian. Terlihat bahwa $M(x,y) = 3x^2 + 3y^2$ dan $N(x,y) = 6xy$, sehingga

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6y \text{ dan } \frac{\partial N}{\partial x} = 6y.$$

Karena $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ maka PDB eksak. Selanjutnya,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) = 3x^2 + 3y^2$$

$$u(x,y) = \int (3x^2 + 3y^2)\,dx + c(y)$$

$$= x^3 + 3xy^2 + c(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left\{x^3 + 3xy^2 + c(y)\right\}.$$

Diperoleh hubungan

$$6xy = 6xy + \frac{\partial c(y)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial c(y)}{\partial y} = 0$$

$$c(y) = k.$$

Jadi, penyelesaiannya adalah $u(x,y) = x^3 + 3xy^2 + k = 0$.

Contoh 2.11. Selesaikanlah PDB $(y^3 - x)\,y' = y$.

Penyelesaian.

$$(y^3 - x)\,\frac{dy}{dx} = y$$

$$(y^3 - x)\,dy = y\,dx$$

$$y\,dx - (y^3 - x)\,dy = 0,$$

sehingga diperoleh

$$M(x,y) = y \text{ dan } N(x,y) = x - y^3.$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= 1\\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 1\end{aligned}\right\} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{PDB eksak.}$$

Dengan demikian diperoleh

$$u(x,y) = \int (x - y^3)dy + c(x)$$

$$u(x,y) = -\frac{1}{4}y^4 + c(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{-\frac{1}{4}y^4 + c(y)\right\} = M(x,y)$$

$$\frac{\partial c(x)}{\partial x} = y$$

$$c(x) = \int y\,dx = xy + k\ .$$

Jadi penyelesaiannya adalah

$$u(x,y) = xy + k - \frac{1}{4}y^4 = 0$$

Contoh 2.12. Selesaikanlah PDB $x\,dx + y\,dy - \dfrac{y\,dx - xdy}{x^2 + y^2} = 0.$

Penyelesaian. PDB ini dapat ditulis menjadi

$$(x - \frac{y}{x^2 + y^2})\,dx + (y + \frac{x}{x^2 + y^2})\,dy = 0.$$

Akibatnya diperoleh

$$\mathrm{M}(x,y) = x - \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{dan} \quad \mathrm{N}(x,y) = y + \frac{x}{x^2 + y^2} \ .$$

Selanjutnya diperoleh

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{(x^2 + y^2) - y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{(x^2 + y^2 - 2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

dan

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2) - x(2x)}{(x^2 + y^2)}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \ .$$

Selain itu,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}\right\} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

maka PDB eksak. Akibatnya diperoleh

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) = x - \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\mathrm{u}(x,y) = \int (x - \frac{y}{x^2 + y^2})\, dx = \frac{x^2}{2} - \int \frac{y}{x^2 + y^2}\, dx + c(y)$$

$$= \frac{x^2}{2} \ \mathrm{arc\ tan}\left(\frac{x}{y}\right) + \mathrm{c}(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{x^2}{2} - \text{arc tan}\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}\right) + c(y)\right\} = N(x,y)$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{x}{y^2} + \frac{\partial c(y)}{\partial y} = y + \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x}{y^2+x^2} + \frac{\partial c(y)}{\partial y} = y + \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Terlihat bahwa

$$\frac{\partial c(y)}{\partial y} = y.$$

Sehingga diperoleh

$$\mathrm{c}(y) = \frac{1}{2}y^2 + \mathrm{k}.$$

Jadi penyelesaian PDB adalah

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} - \text{arc tan}\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{y}^2 + k = 0.$$

2.5 FAKTOR-FAKTOR INTEGRASI

Jika pada PDB M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0, dimana $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ maka PDB tersebut bukan merupakan PD eksak. Namun demikian PD tersebut dapat dijadikan menjadi PD eksak dengan menggandakan PD tersebut dengan suatu faktor atau fungsi tertentu. Faktor atau fungsi tersebut dinamakan faktor integrasi. Pada beberapa kasus khusus, faktor integrasi dapat ditentukan dengan cara sistematis, misalnya:

1. $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = d\,(\dfrac{y}{x})$

2. $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{y^2} = -\,d\,(\dfrac{x}{y})$

3. $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = d\left(\text{arc tan}\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)$

4. $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = \dfrac{1}{2}\,d\left\{\ln\left(x^2 + y^2\right)\right\}$

5. $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 - y^2} = \dfrac{1}{2}\,d\left\{\ln\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)\right\}$

Contoh 2.13. Tentukan faktor integrasi, kemudian selesaikan PDB

$$(y + x^4)\,dx - x\,dy = 0.$$

Penyelesaian. Dari persamaan di atas diketahui:

$$\left.\begin{array}{ll} M(x,y) = y + x^2\,, \quad \text{sehingga} & \dfrac{\partial M}{\partial y} = 1 \\ N(x,y) = -\,x\,, \quad \text{sehingga} & \dfrac{\partial N}{\partial x} = -1 \end{array}\right\} \dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}\,.$$

Maka persamaan di atas bukan merupakan PD eksak. Faktor integrasi dapat diambil $\dfrac{1}{x^2}$, dan mengalikannya dengan PDB, sehingga diperoleh

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2} + x^2\,dx = 0 \text{ atau } -\,d\left(\frac{y}{x}\right) + x^2\,dx = 0\,.$$

Dengan pengintegralan diperoleh

$$-\int d\left(\frac{y}{x}\right)+\int x^2\,dx=0$$

$$-\frac{y}{x}+\frac{1}{3}x^3=C,$$

adalah penyelesaian yang diminta.

Contoh 2.14. Tentukanlah faktor integrasi kemudian selesaikanlah PDB

$$x\,dy - y\,dx = 0.$$

Penyelesaian. Dari PDB $x\,dy - y\,dx = 0$ diketahui

$$M(x,y) = -y \text{ dan } N(x,y) = x.$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-1 \text{ dan } \frac{\partial N}{\partial x}=1,$$

yang menunjukkan bahwa $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$. Maka PD tersebut bukan PD eksak. Dengan mengambil faktor integrasi $\frac{1}{x^2}$ dan mengalikannya dengan PD maka diperoleh

$$\frac{1}{x^2}(x\,dy-y\,dx)=0,$$

atau

$$\frac{x\,dy-ydx}{x^2}=0.$$

Sehingga diperoleh

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

$$\int d\left(\frac{y}{x}\right) = \int 0$$

$$\frac{y}{x} = \mathrm{c}$$

$$y = \mathrm{c}x,$$

adalah penyelesaian PD.

Contoh 2.15. Tentukanlah faktor integrasi dari persamaan diferensial $(x^3 + xy^2 - y)\ \mathrm{d}x + x\ \mathrm{d}y = 0$, kemudian selesaikan.

Penyelesaian. Dari PD ini diperoleh:

$$\left.\begin{array}{ll} M(x,y) = x^3 + xy^2 - y, \text{ sehingga} & \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2xy - 1 \\ N(x,y) = x, \quad \text{sehingga} & \dfrac{\partial N}{\partial x} = 1 \end{array}\right\} \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Maka PD di atas bukan PD eksak. PD $(x^3 + xy^2 - y)\ \mathrm{d}x + x\ \mathrm{d}y = 0$ dapat ditulis menjadi

$$x(x^2 + y^2)\ \mathrm{d}x - y\ \mathrm{d}x + x\ \mathrm{d}y = 0.$$

Faktor integrasinya adalah $\dfrac{1}{x^2 + y^2}$, sehingga setelah dikalikan dengan PD diperoleh

$$x\,dx + \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = 0.$$

Dengan pengintegralan diperoleh penyelesaian PD, yaitu

$$\int x\,dx + \int d\left(arc\tan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 + arc\tan\left(\frac{y}{x}\right) = c.$$

Untuk menentukan faktor integrasi dapat juga ditempuh dengan cara berikut. Misalkan F(x,y) merupakan faktor integrasi dari persamaan M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0, maka

$$F(x,y)\,M(x,y)\,dx \pm F(x,y)\,N(x,y)\,dy = 0,$$

merupakan suatu PD eksak. Dengan demikian syarat agar PD menjadi eksak adalah $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Sekarang menjadi

$$\frac{\partial}{\partial y}\{F(x,y)M(x,y)\} = \frac{\partial}{\partial x}\{F(x,y)N(x,y)\}.$$

Jika faktor integrasi F(x,y) yang hanya tergantung pada satu peubah saja, misalkan x maka diperoleh

$$F\frac{\partial M}{\partial y} = F\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$N\frac{\partial F}{\partial x} = F\frac{\partial M}{\partial y} - F\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$N\frac{\partial F}{\partial x} = F\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N}$$

$$\frac{\partial F}{F} = \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N} dx$$

$$\ln F = \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx$$

$$F = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx},$$

merupakan faktor integrasi jika *F* fungsi dari *x* saja.

Dengan cara yang sama, diperoleh faktor integrasi untuk fungsi *y* saja sebagai berikut:

$$F \frac{\partial N}{\partial x} = F \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$M \frac{\partial F}{\partial y} = F \frac{\partial N}{\partial x} - F \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$M \frac{\partial F}{\partial y} = F \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{F \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)}{M}$$

$$\frac{\partial F}{F} = \frac{\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)}{M} dy$$

$$\ln F = \int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy$$

$$F = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy},$$

merupakan faktor integrasi jika F fungsi y saja.

Jika PD M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 homogen dan M. x + N. $y \neq 0$ maka faktor integrasinya $\dfrac{1}{M.x + N.y}$, dan apabila M. x + N. y = 0 maka faktor integrasinya $\dfrac{1}{xy}$.

Contoh 2.16. Tentukanlah faktor integrasi dari persamaan $y\cos x$ dx + 3sin x dy = 0, kemudian selesaikan.

Penyelesaian. Dari PD yang diketahui diperoleh

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y) = y\cos x, \quad \text{sehingga } \dfrac{\partial M}{\partial y} = \cos x \\ N(x,y) = 3\sin x, \quad \text{sehingga } \dfrac{\partial N}{\partial x} = 3\cos x \end{array}\right\} \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Faktor integrasinya adalah fungsi y, sehingga

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{3\cos x - \cos x}{y\cos x} = \frac{2\cos x}{y\cos x} = \frac{2}{y}$$

$$F = e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{2\ln y}$$

$$F = e^{\ln y^2}$$

$F = y^2$.

Dengan demikian faktor integrasinya $F = y^2$, sehingga PD menjadi

$$y^2 (y \cos x)\, dx + y^2 (3 \sin x)\, dy = 0$$

atau

$$y^3 \cos x\, dx + 3y^2 \sin x\, dy = 0.$$

Terlihat bahwa

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y) = y^3 \cos x, \text{ sehingga } \dfrac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 \cos x \\ N(x,y) = 3y^2 \sin x, \text{ sehingga } \dfrac{\partial N}{\partial x} = 3y^2 \cos x \end{array}\right\} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Sekarang PD menjadi PD eksak, dan selanjutnya diselesaikan menurut PD eksak.

Contoh 2.17. Tentukanlah faktor integrasi dari PD $(x^4 + y^4)\, dx + xy^3\, dy = 0$, dan selesaikan

Penyelesaian. PD ini adalah homogen. Faktor integrasinya adalah

$$\frac{1}{M.x + N.y} = \frac{1}{x(x^4 - y^4) - y(xy^3)} = \frac{1}{x^5}.$$

Sehingga PD menjadi

$$\left(\frac{x^4 + y^4}{x^5}\right) dx - \frac{xy^3}{x^5}\, dy = 0.$$

Terlihat bahwa

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{4y^3}{x^5} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{4y^3}{x^5},$$

sehingga PD eksak. Dengan demikian, diperoleh

u(x,y) =
$$\int M(x,y)\,dx = \int\left(\frac{1}{x}+\frac{y^4}{y^5}\right)dx = \ln x - \frac{1}{4}\frac{y^4}{y^4} + c(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\ln x - \frac{y^4}{4x^4} + c(y)\right\} = \frac{y^3}{x^4}$$

$$-\frac{4y^3}{4x^4} + \frac{d\,c(y)}{d\,y} = -\frac{y^3}{x^4}$$

$$\frac{d\,c(y)}{d\,y} = 0$$

c(y) = k.

Jadi jawab PD adalah $\ln x - \dfrac{y^4}{4x^4} + k = 0$.

Contoh 2.18. Selesaikan PD y^2 dx + (x^2 – xy – y^2) dy = 0 dengan mencari faktor integrasinya.

Penyelesaian. Ini adalah PD homogen, dan faktor integrasinya adalah

$$\frac{1}{M.x+N.y} = \frac{1}{xy^2 + y(x^2 - xy - y^2)} = \frac{1}{y(x^2-y^2)}.$$

Kalikan faktor integrasi ini dengan PD semula, diperoleh

$$\frac{y}{x^2-y^2}dx + \frac{x^2-xy-y^2}{y(x^2-y^2)}dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{y(x^2-y^2)(2x-y)-(x^2-xy-y^2)(2xy)}{y^2(x^2-y^2)}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}.$$

Sehingga PD eksak

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{(x^2 - y^2)}, \text{ dan } u(x,y) = \int \frac{y}{x^2 - y^2}\, dx = \int \frac{y}{(x-y)(x-y)}\, dx.$$

Perhatikan bahwa

$$\frac{y}{(x+y)(x-y)} = \frac{A}{x+y} + \frac{B}{x-y} \quad \text{atau} \quad \frac{A(x-y)+B(x+y)}{(x+y)(x-y)} = y.$$

Dari sini diperoleh hubungan

$$(A+B)x + (B-A)y = y,$$

sehingga

$$A + B = 0$$

$$\underline{B - A = 1}$$

$$2B = 1$$

$$B = ½ \quad \text{dan} \quad A = -½.$$

Sehingga

$$\int \frac{y}{(x+y)(x-y)}\, dx = \frac{1}{2}\int \left\{ \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} \right\} dx = \frac{1}{2}\ln\frac{x-y}{x+y} + c(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 - y^2} + \frac{d\,c(y)}{d\,y} = \frac{x^2 - xy - y^2}{y(x^2 - y^2)} = \frac{1}{y} - \frac{x}{x^2 - y^2}$$

$$\frac{d\,c(y)}{d\,y} = \frac{1}{y}$$

$$c(y) = \ln y + k.$$

Jadi diperoleh penyelesaian PD adalah

$$\frac{1}{2} ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right) + ln\, y + K = C \quad \text{atau} \quad (x-y)y^2 = k(x-y).$$

Jika bentuk M dx + N dy = 0 dapat ditulis dalam bentuk

$$y\, f(x, y)\, dx + xg(x, y) dy = 0$$

dimana $f(x, y) \neq g(x, y)$ maka faktor integrasinya adalah $\dfrac{1}{M.x - N.y}$

.

Contoh 2.19. Selesaikanlah PD $y(2xy + 1)\ dx + x(1 + 2xy - x^3y^3)\ dy = 0$.

Penyelesaian. Faktor integrasinya adalah

$$\frac{1}{M.x - N.y} = \frac{1}{2x^2y^2 + x - 2x^2y^2 + x^4y^4} = \frac{1}{x^4 y^4}.$$

Sehingga PD menjadi

$$\left(\frac{2}{x^3 y^2} + \frac{1}{x^4 y^3}\right)dx + \left(\frac{1}{x^3 y^4} + \frac{2}{x^2 y^3} - \frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

Terlihat bahwa

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{-4}{x^3 y^3} - \frac{3}{x^4 y^4} \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{-3}{x^4 y^4} - \frac{4}{x^3 y^3} \end{aligned}\right\} \quad \text{PD eksak.}$$

Dengan demikian diperoleh

$$u(x, y) = \left(\frac{2}{x^3 y^3} + \frac{1}{x^4 y^3}\right)dx = -\frac{1}{x^2 y^2} - \frac{1}{3x^3 y^3} + c(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2}{x^2 y^3} + \frac{1}{x^3 y^4} + \frac{\partial c(y)}{\partial y} = \frac{1}{x^3 y^4} + \frac{2}{x^2 y^3} - \frac{1}{y}$$

$$\frac{d\,c(y)}{y} = -\frac{1}{y},$$

dan

$$c(y) = -\ln y + k.$$

Jadi jawab PD adalah

$$-\frac{1}{x^2 y^2} - \frac{1}{3x^3 y^3} - \ln y = k.$$

Contoh 2.20. Tentukanlah faktor integrasi dari PD

$$\sin y \, \mathrm{d}x + \cos y \, \mathrm{d}y = 0.$$

Penyelesaian. Dari persamaan $\sin y \, \mathrm{d}x + \cos y \, \mathrm{d}y = 0$ diperoleh

$$\left.\begin{array}{ll} M(x,y) = \sin y, \text{ sehingga} & \dfrac{\partial M}{\partial y} = \cos y \\ N(x,y) = \cos y, \text{ sehingga} & \dfrac{\partial N}{\partial x} = 0 \end{array}\right\} \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Perhatikan bahwa

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{\cos y - 0}{\cos y} = 1.$$

Maka faktor integrasinya adalah fungsi x, yakni $F = e^{\int dx} = e^x$.

Sehingga PD menjadi

$$e^x \sin y \, \mathrm{d}x + e^x \cos y \, \mathrm{d}y = 0.$$

Terlihat bahwa

$$\left.\begin{array}{ll} M(x,y) = e^{x}\sin y, \text{ sehingga} & \dfrac{\partial M}{\partial y} = e^{x}\cos y \\ N(x,y) = e^{x}\cos y, \text{ sehingga} & \dfrac{\partial N}{\partial x} = e^{x}\cos y \end{array}\right\} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

PD eksak.

Maka $F = e^x$ merupakan faktor integrasi.

2.6 PD LINIER ORDE SATU

Suatu PD orde satu dikatakan linier apabila persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$$

atau

$$y' + Py = Q,$$

dimana P dan Q merupakan fungsi x saja. Untuk menyelesaian PD ini dapat dilakukan dengan menggunakan tiga metode, yaitu :

1. Metode Lagrange
2. Metode Bernoulli
3. Metode faktor integrasi.

2.6.1 Metode Lagrange

Pertama-tama, ambil

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{dy}{y} + P(x)\,dx = 0.$$

Dengan pengintegralan diperoleh

$$\int \frac{dy}{y} + \int P(x)\,dx = 0$$

$$\ln y + \int P(x)\,dx = \ln c$$

$$\frac{y}{c} = e^{-\int P(x)dx}$$

$$y = c\,e^{-\int P(x)dx}$$

Pandang c sebagai fungsi dari x, yakni

$$y = c(x)\ e^{-\int P(x)dx}.$$

Sehingga

$$\frac{dy}{dx} = c'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)\,c(x)\,e^{-\int P(x)dx}.$$

Subsitusikan ke dalam PD, diperoleh

$$c'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)c(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)c(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$c'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$c'(x) = e^{\int P(x)dx}\ Q(x).$$

Maka $c(x) = \int Q(x)e^{-\int P(x)dx} + C$. Dengan demikian, diperoleh penyelesaian PD adalah

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left\{\int Q(x)\,e^{\int P(x)dx}\ dx + C\right\}.$$

Contoh 2.21. Selesaikanlah PD $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2}{x+1}y = (x+1)^3$.

Penyelesaian. Dari PD yang diberikan, terlihat bahwa

$$P(x) = \frac{2}{x+1} \text{ dan } Q(x) = (x+1)^3.$$

Ambil $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1} y = 0$, yang dapat ditulis

$$\frac{dy}{y} - \frac{2}{x+1}\, dx = 0.$$

Dengan pengintegralan diperoleh

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{2}{x+1} dx = 0$$

$$\ln y - 2\ln(x+1) = \ln c$$

$$y = c(x+1)^2.$$

Pandang c sebagai fungsi dari x, yakni $y = c(x)(x+1)^2$. Diferensialkan terhadap x, diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = c'(x)(x+1)^2 + 2c(x)(x+1).$$

Subsitusikan pada PD, dan diperoleh

$$c'(x)(x+1)^2 + 2c(x)(x+1) - \frac{2}{x+1} c(x)(x+1)^2 = (x+1)^3$$

$$c'(x)(x+1)^2 = (x+1)^3$$

$$c'(x) = x+1.$$

Dengan demikian

$$c(x) = \int (x+1)dx = \frac{1}{2}x^2 + x + \text{k}.$$

Jadi jawab PD $y = (x+1)^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + x + \text{k}\right)$. Atau, jawab PD dengan menggunakan rumus

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left\{\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx} + C\right\},$$

dimana

$$Q(x) = (x+1)^3 \text{ dan } P(x) = -\frac{2}{x+1}.$$

Perhatikan bahwa

$$\int P(x)\,dx = -2\ln|x+1| = \ln|x+1|^{-2}.$$

Jadi jawab PD

$$y = e^{-\ln|x+1|^{-2}}\left\{\int (x+1)^3\, e^{\ln|x+1|^{-2}}\,dx + k\right\}$$

$$= (x+1)^2\left\{\int (x+1)^3 (x+1)^{-2}\,dx + k\right\}$$

$$= (x+1)^2\left\{\int (x+1)\,dx + k\right\}$$

$$= (x+1)^2\left(\frac{1}{2}x^2 + x + k\right).$$

2.6.2 Cara Bernoulli

Dari PD $y' + P(x)\,y = Q(x)$, misalkan $y = u.v$, dimana u dan v fungsi dari x. Maka

$$y' = u'v + u\,v'.$$

PD menjadi

$$u'v + u\,v' + P(x)\,uv = Q(x)$$

atau

$$v(u' + P(x)\,u) + u\,v' = Q(x).$$

Ambil $u' + P(x)\,u = 0$, maka $uv' = Q(x)$. Sehingga

$$\frac{u'}{u} = -P(x)$$

$$\frac{\frac{du}{dx}}{u} = -P(x)$$

$$\frac{du}{dx} = -P(x)(u)\,.$$

Dengan pengintegralan diperoleh

$$\int \frac{du}{u} = \int -P(x)\,dx$$

$$\ln u = \int -P(x)\,dx$$

$$u = e^{\int -P(x)\,dx}.$$

Dari $uv' = Q(x)$ atau $v' = \dfrac{Q(x)}{u}$, diperoleh

$$v' = Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}.$$

Akibatnya

$$v = \int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C_1.$$

Sehingga jawab PD adalah

$$y = uv = e^{-\int P(x)\,dx}\left\{\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C\right\}.$$

3. Dengan Faktor Integral

PD $\dfrac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$ dapat ditulis sebagai

$$[P(x)y - Q(x)]\,dx + dy = 0.$$

Terlihat bahwa

$$M(x,y) = P(x)y - Q(x), \text{ sehingga } My = \frac{\partial M}{\partial y} = P(x)$$

dan

$$N(x,y) = 1, \text{ sehingga } Nx = \frac{\partial N}{\partial x} = 0.$$

Akibatnya $\dfrac{My - Nx}{N} = \dfrac{P(x) - 0}{1} = P(x)$ hanya tergantung pada x saja. Maka faktor integral F = $e^{\int P(x)\,dx}$. Setelah dikalikan dengan faktor integral ini PD menjadi

$$e^{\int P(x)\,dx}\left\{\frac{dy}{dx} + P(x)y\right\} = Q(x)e^{\int P(x)\,dx},$$

yang dapat ditulis mejadi

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)\,dx}\,y\right) = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}$$

atau

$$\int e^{\int P(x)\,dx}\,dy = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx$$

$$e^{\int P(x)\,dx}\,y = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx.$$

Sehingga penyelesaian PD adalah

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left\{\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C\right\}.$$

Contoh 2.22. Selesaikanlah PD $x\dfrac{dy}{dx} - 2y = x^3 \cos\, 4x.$

Penyelesaian. PD ini dapat ditulis $\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y=x^2\cos 4x,$ yang merupakan PD linier. Terlihat bahwa

$$P(x)=-\frac{2}{x} \text{ dan } Q(x)=x^2\cos 4x.$$

Dengan demikian

$$\int P(x)dx=-\int\frac{2}{x}dx=-2\ln x.$$

Sehingga faktor integrasinya adalah $F = e^{-2\ \ln x} = x^{-2}$. Kalikan PD dengan x^{-2} diperoleh

$$x^{-2}\frac{dy}{dx}-2x^3y=\cos 4x.$$

Dengan pengintegralan diperoleh

$$\int d(x^{-2}y)=\int \cos 4x\ dx$$

$$x^{-2}y=\frac{1}{4}\sin 4x+C$$

$$y=\frac{x^2}{4}\sin 4x+Cx^2.$$

Contoh 2.23. Selesaikanlah PD $\frac{dy}{dx}+y=e^x.$

Penyelesaian. PD tersebut dapat ditulis $(y-e^x)\,dx+dy=0.$ Terlihat bahwa

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y)=y-e^x, \text{ sehingga } \frac{\partial M}{\partial y}=1 \\ N(x,y)=1, \text{ sehingga } \frac{\partial N}{\partial x}=0 \end{array}\right\} \quad \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Perhatikan bahwa

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{1-0}{1}=1.$$

Faktor integrasinya adalah $F = e^{\int dx} = e^x$. Akibatnya diperoleh PD

$$e^x\frac{dy}{dx}+e^x y=e^x.e^x$$

atau

$$e^x\frac{dy}{dx}+e^x y=e^{2x}.$$

PD ini dapat ditulis menjadi

$$\frac{d}{dx}(e^x y)=e^{2x} \text{ dan } d\ (e^x y)=e^{2x}\,dx.$$

Dengan pengintegralan diperoleh

$$\int d\ (e^x y)=\int e^{2x}\,dx$$

$$e^x y=\frac{1}{2}e^{2x}+C.$$

Jadi penyelesaian PD adalah

$$y=e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x}+C\right).$$

2.7 PD BERNOULLI

Suatu PD yang berbentuk

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n,$$

untuk $n \in \mathbf{R}$ dan $n \notin 1$ dinamakan PD Bernoulli. Untuk menentukan penyelasaian umumnya dilakukan dengan transformasi $v = y^{1-n}$. Dari transformasi ini diperoleh

$$\frac{dv}{dx}=(1-n)\,y^{-n}\,\frac{dy}{dx} \text{ atau } \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-n}\,y^{n}\,\frac{dv}{dx}.$$

Apabila PD semula dikalikan dengan y^{-n} diperoleh

$$y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x).$$

Akibatnya diperoleh persamaan

$$y^{-n}\,\frac{1}{1-n}\,y^{n}\,\frac{dv}{dx}+P(x)\,v=Q(x)$$

$$\frac{1}{1-n}\,\frac{dv}{dx}+P(x)v=Q(x)$$

$$\frac{dv}{dx}+(1-n)\,P(x)\,v=(1-n)\,Q(x).$$

Persamaan terakhir ini merupakan PD linier orde satu. Selanjutnya diselesaikan dengan menggunakan salah satu metode untuk menyelesaikan PD orde satu.

Contoh 2.24. Selesaikanlah PD Bernoulli $\dfrac{dy}{dx} - y = xy^{5}$.

Penyelesaian. Kalikan PD $\dfrac{dy}{dx} - y = xy^{5}$ dengan y^{-5} diperoleh

$$y^{-5}\,\frac{dy}{dx} - y^{-4} = x.$$

Dengan menggunakan transformasi $y^{-4} = v$, diperoleh

$$-4\,y^{-5}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx} \quad \text{atau} \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{4}y^{5}\frac{dv}{dx}.$$

Sehingga PD menjadi

$$y^{-5}\left(-\frac{1}{4}y^{5}\frac{dv}{dx}\right)-v=x$$

atau

$$\frac{dv}{dx}+4v=-4x.$$

Dari PD ini diperoleh

$$P(x) = 4 \text{ dan } Q(x) = -4x.$$

Sehingga $e^{\int P(x)dx}=e^{\int P(x)dx}=e^{4x}$ dan

$$e^{4x}.\,v = -4\int e^{4x}.\,x\,dx + C$$

$$e^{4x}.\,y^{4} = -xe^{4x} + \frac{1}{4}e^{4x} + C.$$

Akibatnya penyelesaian PD adalah

$$\frac{1}{y^{4}}=-x+\frac{1}{4}+Ce^{-4x}.$$

Contoh 2.25. Selesaikanlah PD Bernoulli $x\frac{dy}{dx}+y=xy^{3}$.

Penyelesaian. PD di atas dapat ditulis

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=y^{3}$$

yang merupakan PD Bernoulli. Kalikan PD ini dengan y^{-3}, diperoleh

$$y^{-3}\frac{dy}{dx}+\frac{y^{1-3}}{x}=1.$$

Misal $y^{-2} = v$ sehingga $\frac{dv}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx}$ atau $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}y^{3}\frac{dv}{dx}$.
Substitusikan pada PD, diperoleh

$$y^{-3}\left(-\frac{1}{2}y^{3}\frac{dv}{dx}\right)+\frac{y^{1-3}}{x}=1$$

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx}+\frac{v}{x}=1$$

$$\frac{dv}{dx}-2\frac{v}{x}=-2,$$

yang merupakan PD linier. Terlihat bahwa

$$P(x)=-\frac{2}{x}\ \text{ sehingga }\int P(x)\,dx=\int-\frac{2}{x}dx=-2\ln x.$$

Sehingga

$$v = e^{-\ln x^{-2}}\left\{\int -2e^{\ln x^{-2}}\,dx+C\right\}$$

$$= x^{2}\left\{\int -2x^{-2}dx+C\right\}$$

$$= x^{2}\left(2x^{-1}+C\right).$$

Jadi penyelesaian PD adalah

$$v = 2x + Cx^{2} \text{ atau } y^{-2} = 2x + + C\,x^{2}.$$

2.8 MASALAH NILAI AWAL

Dari semua uraian di atas, setiap PD baru ditentukan penyelesaian umumnya, yaitu suatu penyelesaian yang mengandung sebarang konstanta. Akan tetapi dalam sebagian besar penerapan, mestinya dapat ditentukan penyelesaian yang memenuhi syarat yang ditetapkan yang berasal dari sistem fisis atau sistem lainnya yang mana persamaan tersebut merupakan model matematisnya. Hal ini akan menghasilkan konsep nilai awal atau syarat awal $y(x_0) = y_0$ yang digunakan untuk menentukan penyelesaian khusus, yang diperoleh dari penyelesaian umum dengan cara memasukkan nilai awalnya. Sehingga konstanta sebarang tidak ada lagi dan diganti dengan konstanta tertentu.

Contoh 2.26. Selesaikanlah PD $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{2x^3\cos\left(x^2\right)}{y}$ dengan syarat awal $y(\sqrt{\pi}) = 0$.

Penyelesaian. Misal $u = y/x$, maka $y = xu$, dan $y' = x\,u' + u$. Sehingga PD di atas menjadi

$$xu' + u = u + \frac{2x^3\cos\left(x^2\right)}{y} = \frac{2x^2\cos\left(x^2\right)}{u}$$

atau

$$u\,u' = 2x\cos(x^2).$$

Selanjutnya dengan pengintegralan diperoleh

$$\int u\,du = \int 2x\cos\left(x^2\right)dx$$

$$\frac{1}{2}u^2 = \sin\left(x^2\right) + C.$$

Karena $u = y/x$ maka

$$y = \text{u}x = x\ \sqrt{2\sin\left(x^2\right) + 2C}.$$

Dari syarat awal $(y\sqrt{\pi}) = 0$, artinya $y = 0$ untuk $x = \sqrt{\pi}$ maka diperoleh C = 0, akhirnya diperoleh

$$y = x\ \sqrt{2\sin\left(x^2\right)}.$$

Contoh 2.27. Selesaikanlah PD $x^2 y' + 2xy - x + 1 = 0$, dengan syarat awal $y(1) = 0$.

Penyelesaian. PD di atas dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{d}{dx}(x^2 y) = x - 1 \text{ atau } d\left(x^2 y\right) = (x-1)dx.$$

Dengan pengintegralan diperoleh

$$\int d\left(x^2 y\right) = \int (x-1)dx$$

$$x^2 y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + C$$

$$x^2 y = \frac{1}{2}x^2 - x + C$$

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}.$$

Dari syarat awal $y(1) = 0$, maka

$$0 = \frac{1}{2} - 1 + C$$

$$C = 1/2.$$

Jadi $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x^2}$ adalah penyelesaian khusus dari PD.

Contoh 2.28. Selesaikanlah PD

$$y' - y = e^{2x}, \text{ dengan syarat awal } y(0) = 5$$

Penyelesaian. Persamaan di atas adalah PD linier orde satu, sehingga diperoleh penyelesaiannya adalah

$$y = e^{2x} + Ce^{x}.$$

Dengan syarat awal $y(0) = 5$ maka

$$5 = e^{2.0} + Ce^{0} \text{ atau } 5 = 1 + C.1.$$

Didapat C = 4. Jadi $y = e^{2x} + 4e^{x}$ adalah penyelesaian khusus dari PD.

Contoh 2.29. Selesaikanlah PD $y' + (\tan x).\ y = \sin 2x$ dengan syarat awal $y(0) = 1$.

Penyelesaian. Ini adalah PD linier orde satu, sehingga penyelesaiannya adalah

$$y = \cos x \left(-\int \sin 2x \cos x dx\right)$$

$$= \cos x \left(-2\int \sin x \cos^2 x dx\right)$$

$$= \cos x\left(\frac{2}{3}\cos^3 x + C\right).$$

Menurut syarat awal $y(0) = 1$, maka

$$1 = 1\left(\frac{2}{3} + C\right) \text{ dan diperoleh } C = 1/3.$$

Jadi $y = \dfrac{2}{3}\cos^4 x + \dfrac{1}{3}\cos x$ adalah penyelesaian khusus PD.

Soal Latihan

Selesaikanlah soal–soal berikut ini dengan memisahkan peubahnya.

1. $x^3\, dx + (y - 1)^2\, dy = 0$

2. $(x-1)^2 y\,dx + x^2 (y+1)\,dy = 0$
3. $x^2\,dy - \cos^2 y\,dx = 0$
4. $4x\,dy - y\,dx = 0$
5. $y\sqrt{2x^2+3}\,dy + x\sqrt{4-y^2}\,dx = 0$
6. $(1+x^3)\,dy - x^2 y\,dx = 0$
7. $x\,dx - (5y^4+3)\,dy = 0$
8. $2x(y^2 - y)\,dx + (x^2-1)\,y\,dy = 0$
9. $e^{x-y}\,y' = \sin x$
10. $\cos x \sin y\,dy - (\cos y \cos x + \cos x)\,dx = 0$
11. $(1-y^2)\cos x\,dx = (1-\sin^2 x)\,2y\,dy$

Selesaikanlah PD homogen di bawah ini.

12. $2xy\,dx - (x^2 - y^2)\,dy = 0$
13. $(x^3+y^3)\,dx - 2xy^2\,dy = 0$
14. $x\,dy - y\,dx - \sqrt{x^2 - y^2}\,dy = 0$
15. $(2x+3y)\,dx + (y-x)\,dy = 0$
16. $(x+y)\,dy + (x-y)\,dx = 0$
17. $(x\,e^{y/x} + y)\,dx - x\,dy = 0$
18. $(x^2+y^2)\,dy - y^2\,dx = 0$
19. $x^2\,dy + (y^2 - xy)\,dx = 0$
20. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x + \sqrt{x^2+y^2}}{y}$
21. $(x^2+y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$

22. $y' = \dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{x-\sqrt{x^2+y^2}}$

Selesaikanlah PD berikut.

23. $(x + y + 1)\ dx + (2x + 2y + 1)\ dy = 0$
24. $(2x - 5y + 3)\ dx - (2x + 4y - 6)\ dy = 0$
25. $(x + y + !)\ dx + (2x + 2y + 3)\ dy = 0$
26. $(2 - x - y)\ dx + (3 + x + y)\ dy = 0$
27. $(3x - 2y + 2)\ dx + (7y - 3x - 3)\ dy = 0$
28. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x - y + 7}{x - y + 1}$
29. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x + y + 4}{x - y + 1}$
30. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y + 5}{2x - y - 3}$
31. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{5x - y - 2}{x + y + 4}$
32. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x - 2y + 7}{2x + 3y + 9}$
33. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x\ y + 1}{3x - y - 1}$

Tunjukkan bahwa PD berikut eksak dan selanjutnya selesaikan.

34. $(x^2 - y)\ dx + (y^2 - x)\ dy = 0$

35. $y\ \mathrm{d}x + x\ \mathrm{d}y = 0$

36. $\sinh x \cos y\ \mathrm{d}x = \cosh x \sin y\ \mathrm{d}y$

37. $(\cot y + x^2)\ \mathrm{d}x = x\ \mathrm{cosec}^2 y\ \mathrm{d}y$

38. $(\cos y + y \cos x)\ \mathrm{d}x + (\sin x - x \sin y)\ \mathrm{d}y = 0$

39. $2x\ (y\ e^{x^2} - 1)\ \mathrm{d}x + e^{x^2}\ \mathrm{d}y = 0$

40.$(2x - y \sin x y\ )\ \mathrm{d}x + (6y^2 - x \sin xy)\ \mathrm{d}y = 0$

41. $(e^x \cos y - x^2)\ \mathrm{d}x + (e^y \sin x + y^2)\ \mathrm{d}y = 0$

42. $(y + \cos x)\ \mathrm{d}x + (x + \sin y)\ \mathrm{d}y = 0$

43. $ye^{xy}\ \mathrm{d}x + (xe^{xy} + 1)\ \mathrm{d}y = 0$

44. $(y + \cos x)\ \mathrm{d}x + (x + \sin y)\ \mathrm{d}y = 0$

Tentukanlah faktor integrasi dari PD berikut, kemudian selesaikan.

45. $x\ \mathrm{d}y - y\ \mathrm{d}x = 0$

46. $\sin y\ \mathrm{d}x + \cos y\ \mathrm{d}y = 0$

47. $2 \cos x \cos y\ \mathrm{d}x - \sin x \sin y\ \mathrm{d}y = 0$

48. $(2xy^4\ e^4)\ \mathrm{d}x - xy^3\ \mathrm{d}y = 0$

49. $(x + y \cos x)\ \mathrm{d}x + \sin x\ \mathrm{d}y = 0$

50. $(x^4 + y^4)\ \mathrm{d}x - xy^3\ \mathrm{d}y = 0$

51. $(x^2 - y^2 + x)\ \mathrm{d}x + 2xy\ \mathrm{d}y = 0$

52. $(y - 2x)\ \mathrm{d}x - x\ \mathrm{d}y = 0$

53. $(x^2 - 2y)\ \mathrm{d}x + x\ \mathrm{d}y = 0$

54. $(y + 1)\ \mathrm{d}x - (x + 1)\ \mathrm{d}y = 0$

55. $2\ \mathrm{d}x - e^{y-x}\ \mathrm{d}y = 0$

Selesaikanlah PD linier orde satu berikut.

56. $y' + y \cot x = 5\ e^{\cos x}$

57. $y' + y = 2 \sin x$

58. $y' + 2y = \cos x$

59. $y' = \dfrac{2y}{x} + x^2 e^x$

60. $y' + y \tan x = 2x \cos x$

61. $y' - y \operatorname{cotan} x = 2x - x^2 \operatorname{cotan} x$

62. $x^3 y' + (2 - 3x^2)\, y = x^3$

63. $x y' + 2y = 2 e^{x^2}$

64. $y' + 3y = e^{2x} + 6$

65. $y' + 2xy = -6x$

66. $y' - 4y = x - 2x^2$

Selesaikanlah PD Bernoulli berikut.

67. $y' - \dfrac{3}{x} y = y^5$

68. $x y' + y = xy^3$

69. $y' = x^3 y^2 + xy$

70. $3 y' + y = (1 - 2x)\, y^4$

71. $y' + xy = xy^{-1}$

72. $y' + x^{-1} y = xy^2$

73. $y' + y = \dfrac{x}{y}$

74. $y' + xy = y^2 \sin x$

75. $y' + \dfrac{y}{x+1} = \dfrac{-(x+1)^3}{2} y^3$

76. $x\,y' - y = y^3$

77. $x\mathrm{d}y - \left\{y + xy^3(1+\ln x)\right\} \mathrm{d}x = 0$

Selesaikanlah PD berikut dengan syarat awal yang ditentukan.

78. $(1 + x^3)\,\mathrm{d}x - x^2 y\,\mathrm{d}y = 0;\; y(1) = 0$

79. $y' = \dfrac{y-x}{y+x};\; y(1) = 1$

80. $(y + 2)\mathrm{d}x + (x - 2)\,\mathrm{d}y = 0;\; y(1) = -7$

81. $\left\{e^x \cos y + 2(x-y)\right\} \mathrm{d}x + \left\{e^x \sin y + 2(x-y)\right\} \mathrm{d}y = 0;\; y(0) = \pi$

82. $y' - x^3 y = -4x^3;\; y(0) = 6$

83. $x\,y' = (1 + x)\,y;\; y(2) = 6e^2$

84. $(1 + x)\,y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0;\; y(1) = 2$

85. $y' - 2y = 2\cosh 2x + 4;\; y(0) = -1{,}25$

86. $y' - y \operatorname{cotan} x = 2x - x^2 \operatorname{cotan} x;\; y(\tfrac{1}{2}\pi) = \tfrac{1}{4}\pi^2 + 1$

87. $y' - (1 + 3x^{-1})\,y = x + 2;\; y(1) = 1/\mathrm{e}$

88. $\cos(\pi x)\cos(\pi y)\,\mathrm{d}x = 2\sin(\pi x)\sin(\pi y)\,\mathrm{d}y;\; y(3/2) = 1/2.$

BAB 3

PENERAPAN PERSAMAAN DIFERENSIAL

PD sering kali muncul dalam model matematik yang mencoba menggambarkan keadaan nyata. Banyak hukum alam dan hipotesis dapat diterjemahkan ke dalam persamaan yang mengandung turunan atau diferensial melalui model matematika. PD juga sangat penting dalam bidang rekayasa maupun dalam bidang lainnya, karena banyak hukum dan hubungan fisis yang model matematiknya berbentuk PD.

Sebagai contoh, turunan-turunan dalam fisika muncul sebagai kecepatan, dalam biologi sebagai laju pertambahan populasi, dalam psikologi sebagai laju belajar, dalam kimia sebagai laju reaksi, dalam ekonomi sebagai laju perubahan biaya hidup, dalam keuangan sebagai laju pertambahan investasi. Selanjutnya diberikan gambaran-gambaran khusus mengenai penerapan PD orde satu pada bidang-bidang berikut ini.

3.1 BIDANG BIOLOGI

Sudah lama diamati oleh para pengamat dalam bidang biologi bahwa beberapa koloni sejenis bakteri yang besar cenderung berkembang dengan laju yang berbanding lurus dengan jumlah bakteri yang ada. Untuk koloni bakteri tersebut ambil S = S(t) sebagai jumlah bakteri yang ada pada setiap saat t dimana t adalah waktu. Jika p adalah konstanta perbandingan, maka fungsi S = S(t) memenuhi PD

$$\frac{dS}{dt} = pS.$$

Persamaan ini disebut juga persamaan Malthus mengenai perkembangan populasi.

3.2 FARMAKOLOGI

Dalam farmakologi dikenal bahwa penisilin dan banyak obat lainnya yang diberikan kepada si pasien akan lenyap (hilang) dari tubuh si pasien sesuai dengan kaidah sebagai berikut: Ambil $y(t)$ adalah jumlah atau banyaknya obat di dalam tubuh seseorang pada saat t dimana t adalah waktu, maka laju perubahan $y(t)$ dari obat itu berbanding lurus dengan banyaknya obat yang ada saat t. Dengan demikian memenuhi persamaan $\frac{dy}{dt} = ky$ dengan $k > 0$ adalah konstanta perbandingan. Tanda minus (–) sesuai dengan fakta bahwa $y(t)$ berkurang bila t bertambah. Jadi turunan $y(t)$ menurut t bertanda negatif. Untuk tiap obat, konstanta k diketahui dari percobaan.

3.3 MEKANIKA

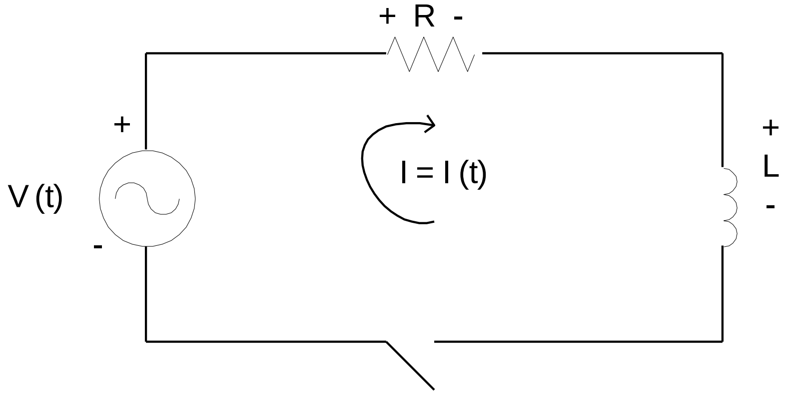
Hukum Newton kedua mengenai gerak, mengatakan bahwa "laju perubahan momentum benda berbanding lurus dengan jumlah gaya yang bekerja pada benda itu dan dalam arah jumlah gaya itu", terlihat bahwa gerak setiap benda ditunjukkan oleh PD. Penting diingat bahwa momentum suatu benda adalah hasil kali antara massa dengan kecepatan, maka diperoleh persamaan

$$\frac{d}{dt}(mv) = k\,F,$$

dimana k suatu konstanta perbandingan. Persamaan ini merupakan PD dalam v yang bentuk khususnya tergantung pada m dan F. Masa m dapat merupakan konstanta atau suatu fungsi t. Juga F dapat merupakan konstanta atau suatu fungsi t atau bahkan merupakan fungsi t dan v

3.4 RANGKAIAN LISTRIK

Hukum masalah tegangan dari Krichoff mengatakan bahwa "jumlah aljabar dari semua tegangan yang dialirkan mengelilingi suatu rangkaian tertutup adalah nol". Hukum ini diterapkan pada rangkaian seri RL yang ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1 Rangkaian RL

Dengan I = I(t) adalah arus dirangkaikan pada saat t, dengan t adalah waktu yang memenuhi persamaan

$$\frac{dI}{dt} RI = V(t).$$

3.5 PENENTUAN UMUR RADIOAKTIF

Percobaan menunjukkan bahwa suatu unsur radioaktif meluruh dengan laju yang sebanding dengan banyaknya unsur pada saat itu. Dengan kata lain bahwa unsur radioaktif meluruh dengan laju berbanding lurus dengan banyaknya zat yang ada. Untuk menyelesaikan masalah ini dapat ditempuh langkah-langkah sebagai berikut.

Langkah pertama: Membentuk suatu model matematis dari proses fisis. Jika diambil banyaknya unsur pada saat *t* sama dengan *y*(*t*), laju perubahan adalah turunan dari *y*(*t*), yaitu $y'(t)$ atau $\frac{dy}{dt}$.

Menurut hukum fisis tentang proses radiasi, $\frac{dy}{dt}$ sebanding dengan *y*. Dengan demikian, diperoleh PD

$$\frac{dy}{dt} = ky.$$

Langkah kedua: Selesaikan PD ini untuk menentukan penyelesaian umum dengan menggunakan metode yang ada, yaitu sebagai berikut: Dari persamaan $\frac{dy}{dt} = ky$, ditulis menjadi $\frac{dy}{y} = kdt.$ Dengan pengintegralan diperoleh

$$\int \frac{dy}{y} = \int kdt$$

$$\ln y = \text{kt} + \ln \text{C}$$

$$\ln (y / \text{C}) = \text{kt}$$

$$y/\text{C} = e^{\text{kt}}$$

$$y = \text{C}\, e^{\text{kt}}$$

$$y(\text{t}) = \text{C e}^{\text{kt}}.$$

Langkah ketiga: Menentukan penyelesaian khusus PD yaitu dengan menggunakan syarat awal atau masalah nilai awal dari penyelesaian umumnya.

Langkah keempat: Menentukan tafsiran geometris dari hasil atau penyelesaian khususnya, yang dapat ditunjukkan pada grafik.

Contoh 3.1. Andaikan suatu koloni bakteri bertambah dengan laju berbanding lurus dengan jumlah bakteri yang ada. Jika jumlah bakteri berlipat dua dalam 5 jam, berapa waktu yang diperlukan untuk menjadi berlipat tiga?

Penyelesaian. Ambil s(t) sebagai jumlah bakteri pada saat t. Kemudian dengan pengandaian bahwa koloni bertambah dengan laju yang berbanding lurus dengan jumlah yang ada maka memenuhi PD

$$\frac{ds}{dt} = p\,s(t)$$

PD ini dapat ditulis menjadi

$$\frac{ds}{s} - pdt = 0.$$

Dengan pengintegralan diperoleh penyelesaian PD:

$$\int \frac{ds}{s} - \int pdt = \int 0$$

$$\ln s - pt = \ln C$$

$$\ln (s/C) = pt$$

$$s/C = e^{pt}$$

$$s = C\,e^{pt}$$

$$s(t) = C\,e^{pt}.$$

Berdasarkan syarat awal, maka diperoleh

$$s(t) = s(0)\,e^{pt},$$

dimana s(0) adalah jumlah bakteri pada saat awal. Karena jumlah bakteri menjadi dua kali lipat dalam waktu 5 jam maka diperoleh

$$s(5) = 2\,s(0).$$

Dari persamaan $s(t) = s(0)\,e^{pt}$, maka diperoleh

$$s(0)\,{}^{5p} = 2\,s(0)$$

$$e^{5p} = 2$$

$$p = \frac{1}{5}\ln 2$$

Waktu t yang diperlukan bakteri untuk mencapai jumlah bakteri tiga kali lipat harus memenuhi persamaan

$$s(t) = 3\, s(0).$$

Sehingga diperoleh

$$s(0)\, e^{pt} = 3\, s(0)$$

$$e^{pt} = 3$$

$$pt = \ln 3$$

$$t = \frac{\ln 3}{\frac{1}{5}\ln 2} = 7{,}89 \text{ (dibulatkan sampai 2 desimal).}$$

Jadi waktu yang diperlukan untuk menjadi berlipat tiga sama dengan 7,89 jam.

Contoh 3.2. Uang sejumlah Rp. 5.000.000,- di investasikan dengan bunga 8% tiap tahun, bertambah secara kontinu. Hitunglah jumlah uang tersebut setelah 25 tahun.

Penyelesaian. Misal $y(t)$ adalah jumlah uang (modal tambah bunga) pada saat t. Maka laju pertambahan perubahan jumlah uang pada saat t memenuhi persamaan

$$\frac{dy}{dt} = \frac{8}{100}\, y.$$

Apabila persamaan ini diselesaikan dengan memisahkan variabel, maka diperoleh:

$$y(t) = y(0)e^{(8/100)t}.$$

Karena $y(0) = 5.000.000$ dan $t = 25$, maka diperoleh

$$y(25) = 5.000.000\ e^{(8/100)25}$$
$$= 36945280{,}49.$$

Jadi jumlah uang setelah 25 tahun sama dengan Rp. 36.945.289,49.

Contoh 3.3. Suatu benda bermassa m = 2 kg dilemparkan ke bawah dari suatu tempat yang tinggi dengan kecepatan yang awal $v_0 = 10^5$ detik. Disamping beratnya, ada gesekan udara yang bekerja pada benda itu yang besarnya (dalam dine) dua kali kecepatan benda itu pada setiap saat. Hitunglah kecepatan benda setelah $t = 10^3$ detik (asumsikan g = 900 cm/detik^2).

Penyelesaian. Misal $v(t)$ = keceptan benda pada saat t. Jumlah gaya yang bekerja pada benda tersebut adalah

$$F = (\text{berat}) - (\text{gesekan udara}) = (mg - 2v) \text{ dine.}$$

Menurut hukum Newton kedua mengenai gerak diperoleh persamaan:

$$\frac{d}{dt}(mv) = mg - 2v$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg - 2v$$

$$\frac{m}{mg-2v}\,dv = dt$$

$$\frac{m}{mg-2v}\,dv = dt.$$

Penyelesaian dari masalah nilai awal di atas adalah

$$v(t) = \frac{1}{2}\left\{mg - (mg - 2v_0)e^{-2t/m}\right\}.$$

Untuk $t = 10^3$ dan dengan $v(0) = 10^5$, maka diperoleh

$$v(10^3) = \tfrac{1}{2}\ \text{mg} - (\text{mg} - 2v_0)\ e^{-2.10^3/m}$$
$$= (9 - 8/e)\ 10^5\ \text{cm/det}$$
$$= (9 - 8/e)\ \text{km/det}$$
$$= 6{,}05\ \text{km/det}.$$

Jadi kecepatan benda tersebut setelah $t = 10^3$ det adalah 6,5 km/det.

Contoh 3.4. Suatu bejana berisi 81 galon air asin yang mengandung 20 pon larutan garam. Air asin yang mengandung 3 pon larutan garam tiap galon mengalir ke dalam bejana dengan laju 5 galon tiap menit. Campuran dipertahankan merata dengan cara mengaduknya, mengalir keluar dengan kecepatan 2 galon tiap menit. Berapa jumlah garam di dalam bejana sesudah 37 menit?

Penyelesaian. Misal $y(t)$ sebagai jumlah garam pada saat t dan $\frac{dy}{dt} = y'(t)$ adalah laju perubahan garam di dalam bejana pada saat t, sehingga diperoleh hubungan

$$y'(t) = \text{laju masuk} - \text{laju ke luar},$$

dimana "laju masuk" adalah laju garam yang mengalir ke dalam bejana pada saat t dan "laju keluar" adalah laju garam yang mengalir ke luar pada saat t. Dari permasalahan di atas diperoleh laju masuk

$$= (3\ \text{pon/galon})\ (5\ \text{galon/menit}) = 15\ \text{pon/menit},$$

yaitu 15 pon garam/menit mengalir ke bejana. Untuk menghitung laju ke luar, kita harus menghitung konsentrasi garam pada saat t yaitu banyaknya garam di dalam tiap galon air asin pada saat t, yaitu

$$\text{konsentrasi} = \frac{\text{pon garam dalam bejana pada saat t}}{\text{Jumlah galon air asin dalam bejana pada saat t}}$$

$$= \frac{y(t)}{81 + (5-2)t}$$

$$= \frac{y(t)}{81+3t}.$$

Sehingga didapat

$$\text{laju keluar} = \frac{y(t)}{81+3t}\ (2 \text{ galon / menit})$$

$$= \frac{2y(t)}{81+3t}.$$

Dengan demikian diperoleh persamaan dari masalah di atas adalah

$$\frac{dy}{dt} = 15 - \frac{2y}{81+3t}.$$

Dari persamaan $\frac{dy}{dt} = 15 - \frac{2y}{81+3t}$ dan syarat awal $y(0) = 20$, maka diperoleh:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{2}{81+3t}\ y = 15$$

atau

$$\frac{dy}{y} + \frac{2}{3}\ \frac{1}{27+t}\, dt = 15.$$

Persamaan ini merupakan PD linier orde pertama. Perhatikan bahwa dari PD

$$\frac{dy}{y} + \frac{2}{3}\ \frac{1}{27+t}\, dt = 0$$

diperoleh

$$\int \frac{dy}{y} + \frac{2}{3}\int \frac{dt}{27+t} = \int 0$$

$$\ln y + \frac{2}{3} \ln (27 + t) = \ln C$$

$$\ln (y/C) = - 2/3 \ln (27 + t)$$

$$\ln (y/C) = \ln (27 + t)^{-2/3}$$

$$y/C = (27 + t)^{-2/3}$$

$$y = C (27 + t)^{-2/3}.$$

Ambil C sebagai fungsi dari t, yakni $C = C(t)$, sehingga

$$y = C(t)\,(27 + t)^{-2/3}$$

dan

$$\frac{dy}{dt} = C'(t)\,(27 + t)^{-2/3} + C(t)^{-2/3}\,(27 + t)^{-5/3}.$$

Selanjutnya substitusi pada PD awal, sehingga menghasilkan:

$$C'(t)\,(27 + t)^{-2/3} = 15$$

$$C'(t) = 15\,(27 + t)^{2/3}$$

$$C(t) = 15\,\frac{3}{5}\,(27 + t)^{5/3} + k$$

$$= 9\,(27 + t)^{5/3} + k.$$

Maka

$$y = \{9(27+t)^{5/3} + k\}\,(27+t)^{-2/3}$$

$$= 9\,(27 + t) + k\,(27 + t)^{-2/3}.$$

Dengan memasukkan syarat awal diperoleh:

$$20 = 9\,(27 + 0) + k(27 + 0)^{-2/3}$$

$$20 = 243 + k(27)^{-2/3}$$

$$k = -2007.$$

Akibatnya, penyelesaian PD adalah

$$y(t) = 9\,(27 + t) - 2007\,(27 + t)^{-2/3}.$$

Dengan demikian maka jumlah garam dalam bejana setelah adalah t = 37 menit menghasilkan

$$y\,(37) = 9\,(27 + 37) - 2007(27 + 37)^{-2/3}$$

$$= 576 - 125{,}45 = 450{,}55 \text{ lb}.$$

Jadi, jumlah garam dalam bejana setelah 37 menit sama dengan 450,55 lb.

Contoh 3.5. Apabila fosil tulang mengandung 25% dari jumlah unsur karbon radioaktif murni $6^{C^{14}}$, tentukanlah umur fosil tersebut?

Penyelesaian. Dari pembahasan soal sebelumnya, model matematis peluruhan unsur radioaktif adalah $\frac{dy}{dt} = ky$, yang penyelesaiannya adalah

$$y(\text{t}) = y(0)\, e^{kt}.$$

Di sini $y(0)$ merupakan jumlah awal unsur $6^{C^{14}}$. Dengan menggunakan waktu paruh unsur $6^{C^{14}}$, maka diperoleh

$$1/2 = e^{5730\,k},$$

dimana t = 5730 adalah waktu paruh $6^{C^{14}}$. Sehingga diperoleh

$$5730\,k = \ln\,(½)$$

$$k = \frac{ln(1/2)}{5730} = -0{,}000121.$$

Karena 25% unsur $6^{C^{14}}$ tersisa pada fosil tulang itu berarti bahwa $y(t)$ $= \frac{1}{4}$ maka menghasilkan:

$$\frac{1}{4} = e^{kt}$$

$$\frac{1}{4} = e^{-0,000121\, t}$$

$$-0,000121\, t = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{-0,000121}$$

$$= 11460 \text{ satuan waktu.}$$

Jadi diperkirakan umur fosil tulang tersebut adalah 11460 satuan waktu.

Contoh 3.6. Suatu bola tembaga dipanaskan sampai suhu 100^{o}C kemudian pada saat t = 0 bola tersebut direndam dalam air yang bersuhu tetap 30^{o}C. Setelah 3 menit ternyata suhu bola menjadi 70^{o}C, tentukanlah saat ketika suhu bola menjadi 31^{o}C.

Penyelesaian. Percobaan menunjukkan bahwa laju perubahaan suhu bola yaitu T sebanding dengan perbedaan antara T dengan suhu medium (hukum perbandingan Newton). Percobaan juga menunjukkan bahwa aliran panas dalam bola demikian cepat, sehingga setiap saat suhu dianggap sama diseluruh bagian bola. Dari persoalan di atas menurut hukum perbandingan Newton diperoleh PD yang berbentuk

$$\frac{dT}{dt} = -k\,(T - 30)\,.$$

Penyelesaian PD ini adalah

$$T(t) = C\,e^{-kt} + 30.$$

Kondisi awal diberikan oleh T(0) = 100, maka diperoleh

$$100 = Ce^{-k.0} + 30$$

$$100 = C + 30$$

$$C = 70.$$

Sehingga

$$T(t) = 70\ e^{-kt} + 30.$$

Dari informasi yang diberikan yaitu T(3) = 70, maka diperoleh

$$70 = 70\ e^{-3k} + 30$$

$$70\ e^{-3k} = 40$$

$$k = \frac{1}{3}\ \ln(4/7) = 0{,}1865.$$

Suhu bola T = 31^{o}C dicapai bila

$$31 = 70e^{-0{,}1816\,t} + 30$$

$$70\ e^{-0{,}1816\,t} = 1$$

$$t = \frac{\ln 70}{0{,}1816} = 22{,}78 \text{ menit.}$$

Jadi suhu bola T = 31^{o}C dicapai setelah mendekati 23 menit.

Soal Latihan

1. Suatu koloni bakteri bertambah dengan laju yang berbanding lurus dengan banyaknya bakteri yang ada. Jika banyaknya bakteri menjadi berlipat dua dalam 3 jam, berapa lama waktu diperlukan agar banyaknya bakteri menjadi berlipat tiga?
2. Suatu koloni bakteri bertambah dengan laju yang berbanding lurus dengan banyaknya bakteri yang ada. Dalam waktu satu jam jumlahnya bertambah dari 2000 menjadi 5000. Berapa waktu yang diperlukan agar jumlah bakteri berlipat dua?
3. Uang sejumlah \$ 4000 diinvestasikan dengan bunga 12% tiap tahun bertambah secara kontinu. Berapa jumlah uang tersebut sesudah 6 tahun?
4. Uang sejumlah \$ 15000 ditanamkan dengan bunga 6% tiap tahun, bertambah secara kontinu. Dalam berapa tahun jumlah uang menjadi dua kali?
5. Suatu benda dengan massa 25 kg dilemparkan ke atas dari permukaan bumi dengan kecepatan awal v_0 = -30 kaki/detik. Selain beratnya, gesekan dengan udara bekerja pada benda itu yang besarnya (dalam pon) sama dengan tiga kali kecepatan benda pada setiap saat. Berapa lama benda bergerak ke atas? (Perjanjian yang dipakai di sini ialah bahwa arah + (positif) adalah arah ke bawah)
6. Suatu bejana berisi 50 galon air asin yang di dalamnya dilarutkan 5 pon garam. Air murni mengalir ke dalam bejana dengan laju 3 galon tiap menit. Campuran diaduk agar merata mengalir keluar bejana dengan laju aliran masuk. Berapa jumlah garam di dalam bejana sesudah 15 menit?
7. Berapa tahun diperlukan untuk menanam uang sejumlah \$ 2000 dengan bunga 5,5% tiap tahun dan bertambah secara kontinu sampai mencapai \$ 8000?

8. Dalam suatu rangkaian listrik RL diketahui bahwa L = 3 henry, R = 6 ohm, $V(t) = 3 \sin t$ dan $I_0 = 10$ ampere. Hitunglah nilai arus pada saat t?
9. Dalam suatu rangkaian RL diketahui bahwa L = 4 henry, R = 5 Ohm, V = 8 *V*olt dan I(0) = 0 Ampere. Tentukanlah arus pada rangkaian sesudah 0,1 detik?
10. Sebuah bejana berisi 40 galon air asin yang mengandung 10 pon larutan garam. Air asin mengandung 2 pon larutan garam tiap galon mengalir ke dalam bejana dengan laju 4 galon tiap menit. Campuran dipertahankan merata, mengalir ke luar bejana dengan 3 galon tiap menit. Berapa banyaknya garam dalam bejana pada setiap saat? Carilah jumlah garam dalam bejana sesudah satu jam?
11. Sebuah benda bersuhu 70^0F ditempatkan (pada saat $t = 0$) di luar rumah, yang suhunya 40^0F. Sesudah 3 menit suhu menjadi 60^0F. Berapa waktu diperlukan agar suhu benda mendingin sampai 50^0F dan berapa suhu benda sesudah 5 menit?
12. Suatu bejana berisi 30 galon air asin yang mengandung 10 pon larutan garam. Air asin yang tiap galonnya mengandung 2 pon larutan garam mengalir ke dalam bejana dengan laju 3 galon tiap menit. Campuran dipertahankan merata dengan mengaduknya, mengalir ke luar bejana dengan laju 2 galon tiap menit. Berapa jumlah garam dalam bejana pada setiap saat t? Berapa jumlah garam dalam bejana sesudah 10 menit?
13. Diketahui bahwa waktu umur paroh radio karbon adalah 5568 tahun. Berapa umur contoh kayu purba yang telah kehilangan 15% dari jumlah radio karbon semula?
14. Dalam rangkaian RL diketahui bahwa L = 2 henry, R = 4 ohm, $V(t) = e^{-t}$ volt dan I(0) = 0 ampere. Tentukanlah arus pada setiap saat?
15. Jika laju pertumbuhan rugi yang dibiakkan sebanding dengan banyaknya populasi pada saat t dan populasi tersebut menjadi dua kali lipat banyaknya dalam sehari. Berapa banyaknya populasi tersebut setelah satu minggu?

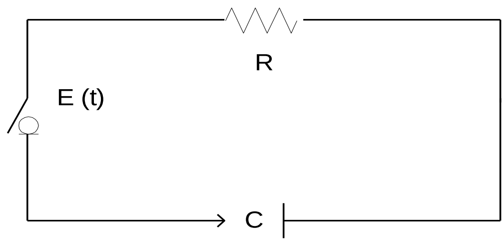
16. Andaikan suatu kapur barus yang berbentuk bola berkurang *v*olumenya karena menguap dengan laju yang sebanding dengan luas permukaannya saat itu. Jika garis tengah kapur barus menurun dari 2 cm menjadi 1 cm dalam 3 bulan, berapa lama kapur tersebut habis? (sampai garis tengahnya 1 mm)

17. Percobaan menunjukkan bahwa laju in*v*ersi gula tebu dalam larutan gula dengan air adalah sebanding dengan konsentrasi larutan gula $y(t)$ tersebut. Misalkan konsentrasinya adalah $\frac{1}{100}$ pada $t = 0$ dan $\frac{1}{300}$ pada $t = 4$ jam tentukanlah $y(t)$.

18. Sebuah termometer, terbaca 15^0C, dimasukkan ke dalam suatu ruangan yang temperaturnya 23^0C. Satu menit kemudian termometer sebut menunjukkan angka 19^0C. Berapa lama waktu yang diperlukan agar termometer tersebut menunjukkan angka 23^0C, katakanlah $22{,}9^0$C?

19. Sebuah kapasitor (C = 0,1 farad) dihubungkan seri dengan resistor (R = 200 ohm) dan sebuah sumber energi (E_0 = 12 *v*olt) seperti terlihat pada Gambar 2. Tentukanlah tegangan V(t) pada kapasitor, andaikan pada saat $t = 0$ kapasitor dalam keadaan tidak bermuatan sama sekali?

20. Tentukanlah arus I(t) dalam rangkaian RC seperti tampak pada Gambar 2. Andaikan E = 100 *v*olt, C = 0,25 farad, R merupakan peubah yang berharga R = $(100 - t)$ ohm, bila $0 \leq t \leq 100$ detik, R = 0 bila t =100 detik dan I(0) = 1 ampere.



Gambar 2 Rangkaian RC untuk Soal No. 19 dan 20

21. Andaikan seorang penerjun jatuh ke bawah dari keadaan diam dan parasut terbuka pada suatu saat, katakanlah t = 0 ketika kecepatan penerjun $V(0)$ = 10 m/detik.

BAB 4
PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER

Suatu PD linier orde n adalah suatu persamaan yang dapat ditulis dalam bentuk

$$a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\, y' + a_0(x)y = r(x).$$

Koefisien-koefisien $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, …, $a_0(x)$ dan $r(x)$ merupakan fungsi-fungsi yang kontinu dan koefisien yang pertama yaitu $a_n(x) \neq 0$. Apabila fungsi $r(x)$ identik dengan nol ($r(x) = 0$) maka PD tersebut disebut PD linier homogen, sedangkan apabila fungsi $r(x) \neq 0$, disebut PD linier non homogen. Apabila koefisien-koefisien $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$,…, $a_0(x)$ adalah konstan (tetap) maka PD linier dengan koefisien konstanta dan di lain pihak dinamakan PD dengan koefisien-koefisien peubah. Contoh:

1. $x\,y' - 2yx = x^2$
2. $y'' + 4y = e^x \sin x$
3. $y'' + 2\,y' + 3y = \cos x$
4. $y^{(4)} - y = 0$
5. $y''' - y'' - y' + y = \sin x$

Contoh 1 adalah suatu PD linier non homogen orde satu dengan koefisien konstanta. Contoh 2 dan 3 adalah suatu PD linier non homogen orde 2 dengan koefisien konstanta. Contoh 4 adalah suatu PD linier homogen orde 4 dengan koefisien konstanta, sedangkan Contoh 5 adalah suatu PD linier non homogen orde 3 dengan koefisien konstan.

Suatu PD linier orde dua dikatakan linier, apabila PD tersebut dapat ditulis dalam bentuk

$$a\,y'' + b\,y' + cy = r(x),$$

dimana *a, b* dan *c* merupakan konstanta, atau

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = r(x).$$

Apabila r(x) = 0 maka dikatakan PD linier orde dua homogen dan bila r(x) $\neq 0$, maka dikatakan PD linier orde dua non homogen.

Bentuk umum PD linier orde 2 homogen adalah

$$a_2\,y'' + a_1\,y' + a_0 y = 0$$

atau

$$a_2\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = 0,$$

dimana a_2, a_1, dan a_0 merupakan konstanta. Metode untuk memudahkan menyelesaikan PD jenis ini digunakan operator D, yakni D = $\frac{d}{dx}$ sehingga Dy = $\frac{dy}{dx}$. Dengan demikian PD dapat ditulis menjadi

$$(a_2 D^2 + a_1 D + a_0)\,y = 0.$$

Jika difaktorkan maka diperoleh

$$(D - \alpha)(D - \beta) = 0,$$

dimana α dan β merupakan konstanta. Langkah selanjutnya adalah sebagai berikut:

Misalkan (D - α) y = z diperoleh

$$(D - \alpha)\,z = 0 \text{ atau } Dz - \alpha z = 0.$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{dz}{dx} - \alpha z = 0 \text{ atau } \frac{dz}{z} - \alpha\, dx = 0 .$$

Dengan pengintegralan, diperoleh

$$\int \frac{dz}{z} - \int \alpha \; dx = \int 0$$

$$\ln z - \alpha x = \ln C$$

$$\ln (z/C) = \alpha \; x$$

$$z/C = e^{\alpha x}$$

$$z = C\, e^{\alpha x}.$$

Sehingga diperoleh

$$(D - \beta)\, y = Ce^{\alpha x} \text{ atau } \frac{dy}{dx} - \beta \; y = Ce^{\alpha x} .$$

Untuk menyelesaikan PD (D - β) y = C$e^{\alpha x}$ dilakukan sebagai berikut: Ambil

$$(D - \beta)\, y = 0 \text{ atau } Dy - \beta y = 0,$$

yang dapat ditulis menjadi

$$\frac{dy}{dx} - \beta y = 0 \text{ atau } \frac{dy}{y} - \beta \; dx = 0 .$$

Dengan pengintegralan, diperoleh

$$\int \frac{dy}{y} - \int \beta\, dx = \int 0$$

$$\ln y - \beta x = \ln C_1$$

$$\ln (y/C_1) = \beta x$$

$$y/C_1 = e^{\beta x}$$

$$y = C_1 e^{\beta x}.$$

Pandang C_1 adalah fungsi dari x $y$aitu $C_1 = C_1(x)$, sehingga $y = C_1(x)e^{\beta x}$. Jadi $\frac{dy}{dx} = C_1'(x)e^{\beta x} + C_1(x)\beta e^{\beta x}$,

dan substitusikan pada $\frac{dy}{dx} - \beta y = Ce^{\alpha x}$, sehingga diperoleh:

$$C_1'(x)\, e^{\beta x} + C_1(x)\ \beta e^{\beta x} - \beta C_1(x)e^{\beta x} = C e^{\alpha x}.$$

Bentuk ini disederhanakan menjadi

$$C_1'(x)\, e^{\beta x} = Ce^{\alpha x} \text{ atau } C_1'(x) = Ce^{(\alpha - \beta)x}.$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \int Ce^{(\alpha-\beta)x}\, dx + k \\ &= \left(\frac{C}{\alpha-\beta}\right)e^{(\alpha-\beta)x} + k. \end{aligned}$$

Tulis $\frac{C}{\alpha-\beta} = k_0$ sehingga $C_1(x) = k_0\, e^{(\alpha-\beta)x} + k$. Jadi penyelesaian PD adalah

$$\begin{aligned} y &= \left(k_o e^{(\alpha-\beta)x} + k\right)e^{\beta x} \\ &= k_0\, e^{(\alpha-\beta)x}\, e^{\beta x} + ke^{\beta x} \\ &= k_0\, e^{\alpha x} + k\, e^{\beta x}. \end{aligned}$$

Contoh 4.1. Selesaikan PD $y'' + 5y' + 6y = 0$.

Penyelesaian. Tulis PD ini menjadi

$$(D^2 + 5D + 6)y = 0 \text{ atau } (D + 2)(D + 3)y = 0.$$

Akibatnya diperoleh akar-akar

$$D_1 = \alpha = -2 \text{ dan } D_2 = \beta = -3.$$

Dengan demikian, penyelesaian PD adalah

$$y = k_0\, e^{\alpha x} + k\, e^{\beta x}$$

$$= k_0\, e^{-2x} + k\, e^{-3x}.$$

Contoh 4.2. Selesaikanlah PD $y'' + y' - 2y = 0$.

Penyelesaian. Tulis kembali PD menjadi

$$(D^2 + D - 2)y = 0 \quad \text{atau} \quad (D - 1)(D + 2)\, y = 0.$$

Sehingga akar-akarnya adalah $D_1 = \alpha = 1$ dan $D_2 = \beta = -2$. Jadi, penyelesaian PD adalah

$$y = k_0\, e^{x} + k\, e^{-2x}.$$

Contoh 4.3. Selesaikanlah PD $4\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + y = 0$.

Penyelesaian. PD ini dapat ditulis menjadi

$$(4D^2 - 5D + 1)\, y = 0 \quad \text{atau} \quad (4D - 1)\,(D - 1)\, y = 0.$$

Sehingga diperoleh

$$D_1 = \alpha = 1/4 \quad \text{dan} \quad D_2 = \beta = 1.$$

Jadi, penyelesaian PD adalah

$$y = k_0\, e^{\alpha x} + k\, e^{\beta x}$$

$$= k_0\, e^{x/4} + k\, e^{x}.$$

Cara lain untuk memperoleh penyelesaian umum PD homogen orde dua berkoefisien konstanta adalah sebagai berikut: Pandang PD yang berbentuk

$$a_0\, y'' + a_1\, y' + a_2\, y = 0,$$

dengan a_0, a_1 dan a_2 adalah konstanta sebarang. Jika dimisalkan m adalah akar persamaan karakteristik

$$a_0\, m^2 + a_1\, m + a_2 = 0,$$

maka akar-akar karakteristiknya dapat diselesaikan dengan rumus *abc* untuk persamaan kuadrat, yaitu :

$$m_1 = \frac{1}{2a_0}\left(-a_1 + \sqrt{a_1^{\,2} - 4a_0\, a_2}\right),$$

dan

$$m_2 = \frac{1}{2a_0}\left(-a_1 - \sqrt{a_1^{\,2} - 4a_0\, a_2}\right).$$

Karena a_0, a_1 dan a_2 adalah bilangan real sehingga akar-akar karakteristiknya mempunyai 3 (tiga) kemungkinan (kasus) yakni:

1. Dua akar real berbeda
2. Dua akar real sama
3. Dua akar kompleks konjugate

Kasus-kasus di atas ditinjau sebagai berikut:

Kasus 1: Dua akar real berbeda.

Kasus ini timbul disebabkan diskriminan (D) dari persamaan karakteristiknya adalah bilangan positif atau D > 0, yakni

$$a_1^{\,2} - 4a_0\, a_2 > 0,$$

sehingga akar-akar kuadratnya adalah bilangan real dan berbeda. Jadi penyelesaian umum PD adalah:

$$y = c_1\, e^{m_1 x} + c_2\, e^{m_2 x},$$

dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta sebarang.

Kasus 2: Dua akar real sama.

Kasus ini timbul disebabkan diskriminan (D) dari persamaan karakteristiknya sama dengan nol yaitu D = 0, dapat dituliskan

$$a_1^2 - 4a_0 a_2 = 0 .$$

Sehingga akar-akar kuadratnya adalah

$$m_1 = m_2 = -\frac{1}{2a_0} a_1 \ .$$

Jadi penyelesaian umum PD adalah

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{mx} ,$$

dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta sebarang dan $m_1 = m_2 = m$.

Kasus 3: Dua akar kompleks conjugate.

Kasus ini timbul disebabkan diskriminan (D) dari persamaan karakteristiknya adalah negatif *y*aitu D < 0, dapat dituliskan

$$a_1^2 - 4a_0 a_2 < 0 .$$

Sehingga akar-akar kuadratnya adalah kompleks konjugat yaitu

$$m_1 = -\frac{1}{2a_0} a_1 + i\omega \quad \text{dan} \quad m_2 = -\frac{1}{2a_0} a_1 - i\omega ,$$

dengan $\omega = \sqrt{a_0 a_2 - \frac{1}{4} a_1^2}$. Dengan menggunakan rumus Euler diperoleh bahwa:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x .$$

Dengan demikian diperoleh penyelesaian umum PD adalah

$$y = e^{-\frac{1}{2a_0}a_1 x}(c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x),$$

dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta sebarang.

Contoh 4.4. Carilah penyelesaian umum PD $y'' + y' - 2y = 0$.

Penyelesaian. Misal m adalah akar-akar persamaan karakteristiknya, sehingga diperoleh persamaan karakteristik

$$m^2 + m - 2 = 0 \text{ atau } (m + 2)(m - 1) = 0.$$

Akar-akarnya adalah $m_1 = -2$, dan $m_2 = 1$ ($m_1 \neq m_2$). Jadi penyelesaian umum PD adalah

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}.$$

Contoh 4.5. Carilah penyelesaian umum PD $y'' - y' - 6y = 0$.

Penyelesaian. Misal m adalah akar persamaan karakteristik

$$m^2 - m - 6 = 0 \text{ atau } (m - 3)(m + 2) = 0.$$

Diperoleh $m_1 = 3$, $m_2 = -2$, sehingga penyelesaian umum PD adalah

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}.$$

Contoh 4.6. Carilah penyelesaian umum PD $y'' - 14y' + 49y = 0$.

Penyelesaian. Misal m adalah akar persamaan karakteristiknya, sehingga diperoleh persamaan karakteristik

$$m^2 - 14m + 49 = 0 \text{ atau } (m - 7)(m - 7) = 0.$$

Sehingga diperoleh akar-akar persamaan karakteristik $m_1 = 7$ dan $m_2 = 7$, dan penyelesaian umumnya adalah

$$y = c_1 e^{7x} + c_2 x e^{7x}.$$

Contoh 4.7. Carilah penyelesaian umum PD $y''-2y'+10y=0$.

Penyelesaian. Persamaan karakteristiknya adalah $m^2 - 2m + 10 = 0$. Perhatikan bahwa

$$\mathrm{D} = b^2 - 4ac = 4 - 40 = -36 < 0$$

dan

$$\omega = \sqrt{a_0\, a_2 - \frac{1}{4} a_1^{\ 2}} = \sqrt{10-1} = \sqrt{9} = \pm 3.$$

Akibatnya,

$$m_1 = -\frac{1}{2a_0} a_1 + i\,\omega = 1 + 3i \quad \text{dan} \quad m_1 = -\frac{1}{2.1}(-2) + 3i = 1 - 3i\,.$$

Jadi penyelesaian umum PD adalah

$$y = e^x\,(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)\,,$$

dengan c_1 dan c_2 konstanta sebarang.

BAB 5
PD LINIER ORDE DUA NON HOMOGEN DENGAN KOEFISIEN KONSTANTA

Bentuk umum PD orde dua non homogen dengan koefisien konstanta adalah

$$a_0\, y'' + a_1\, y' + a_2\, y = G(x)\,,$$

dengan a_0, a_1 dan a_2 merupakan konstanta serta $G(x) \neq 0$. Misal y_h merupakan penyelesaian PD homogen yang mana telah dibahas pada bab sebelumnya, dan y_p adalah penyelesaian non homogennya. Penyelesaian umum PD linier orde dua non homogen adalah

$$y = y_h + y_p.$$

Untuk mencari y_p dapat digunakan metode:

1. Koefisien tak tentu
2. Variasi parameter

5.1 KOEFISIEN TAK TENTU

Untuk menyelesaikan PD di atas dengan menggunakan metode koefisien tak tentu, dapat dibagi menjadi beberapa kasus, yaitu

Kasus 1: Jika bentuk fungsi $G(x)$ pada PD merupakan fungsi eksponensial, yaitu Ee^{ax}, maka pilihlah y_p adalah fungsi berbentuk

$x^k\,(Ae^{ax})$, dengan k adalah banyaknya akar *y*ang sama pada PD homogennya dan A merupakan koefisien tak tentu yang dicari dengan cara substitusi y_p dan turunan y_p dua kali terhadap x ke dalam PD. Jika $G(x)=Ee^{ax}$, maka PD menjadi

$$a_0\,y''+a_1\,y'+a_2\,y=Ee^{ax}. \qquad (5.1)$$

Misalkan $y_p=Ae^{ax}$, dan turunkan y_p dua kali terhadap x, diperoleh

$$y_p'=Aae^{ax} \quad \text{dan} \quad y_p''=Aa^2e^{ax}.$$

Substitusikan y_p, y_p' dan y_p'' pada Persamaan (5.1), diperoleh

$$a_0\,(Aa^2\,e^{ax})+a_1\,(Aa\,e^{ax})+a_2\,(Ae^{ax})=Ee^{ax},$$

yang kemudian bagi kedua ruas dengan e^{ax}, didapat

$$a_0\;Aa^2+a_1\;Aa+a_2\;A=E,$$

atau

$$A(a_0\,a^2+a_1a+a_2)=E.$$

Sehingga diperoleh $A=\dfrac{E}{a_0\,a^2+a_1a+a_2}$. Dari persamaan ini, diperoleh bahwa

$$a_0\,a^2+a_1a+a_2=0.$$

Maka

$$y_p=x^k\,(Ae^{ax}),$$

dengan k banyaknya akar yang sama pada PD homogennya dan a adalah akar persamaan karakteristiknya. Jadi penyelesaian umum PD berbentuk

$$y=y_h+y_p,$$

atau

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + x^k (Ae^{ax}),$$

dengan c_1 dan c_2 konstanta sebarang.

Kasus 2: Jika fungsi $G(x)$ pada PD berbentuk polinomial berderajat m, yaitu x^m, dengan $m \geq 0$, maka y_p dipilih berbentuk $x^k (A_0 + A_1 x + ... + A_m x^m)$, dengan k adalah banyaknya akar yang sama pada PD homogennya. Jika $G(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m$, PD menjadi

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m. \qquad (5.2)$$

Untuk memperoleh penyelesaian PD non homogen, dimisalkan

$$y_p = A_0 + A_1 x + ... + A_m x^m$$

dan diperoleh

$$y_p' = m A_m x^{m-1} + ... + A_1,$$

$$y_p'' = m(m-1) A_m x^{m-2} + ... + 2A_2.$$

Substitusikan y_p, y_p' dan y_p'' ke Persamaan (5.2), diperoleh

$$a_0 [m(m-1) A_m x^{m-2} + \cdots + 2A_2] + a_1 \left(m A_m x^{m-1} + \cdots + A_1\right)$$
$$a_2 (A_0 + A_1 x + ... + A_m x^m) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m. \qquad (5.3)$$

Samakan koefisien ruas kiri dan ruas kanan, diperoleh

$$a_2 A_m = b_0,$$

$$a_2 A_{m-1} + m a_1 A_m = b_1,$$

$$\vdots$$

$$a_2 A_0 + a_1 A_1 + 2a_0 A_2 = b_m,$$

sehingga didapat $A_m = \frac{a}{a_2}$, dengan $a_2 \neq 0$. Jika $a_2 = 0$ dan $a_1 \neq 0$, maka ruas kiri pada Persamaan (5.3) menjadi polinomial berderajat m-1, dan tidak memenuhi Persamaan (5.3). Untuk menjadikan $a_0\, y_p'' + a_1\, y_p'$ polinomial berderajat m, dan penyelesaian tidak homogen y_p harus diubah menjadi polinomial berderajat m +1, sehingga

$$y_p = x(A_0 + A_1 x + ... + A_m x^m).$$

Jika $a_2 = 0$ dan $a_1 = 0$, maka ruas kiri pada Persamaan (1.3) menjadi polinomial berderajat m - 2, sehingga pilihan y_p berbentuk

$$y_p = x^2\,(A_0 + A_1 x + ... + A_m x^m).$$

Jadi, secara umum penyelesaian PD non homogen adalah:

$$y_p = x^k\,(A_0 + A_1 x + ... + A_m x^m),$$

dengan k adalah banyaknya akar yang sama pada PD homogennya. Dengan demikian penyelesaian umum PD adalah

$$y = c_1\, y_1 + c_2\, y_2 + x^k\,(A_0 + A_1 x + ... + A_m x^m),$$

dengan c_1 dan c_2 konstanta sebarang, dan A_0 , A_1, …, A_m merupakan koefisien tak tentu yang dicari dengan cara substitusi y_p dua kali terhadap x pada PD.

Kasus 3: Jika fungsi $G(x)$ pada PD berbentuk perkalian antara fungsi polinomial dengan fungsi eksponensial, yaitu $x^m\, e^{ax}$, maka pilihan y_p berbentuk

$$x^k\,(A_0 + A_1 x + ... + A_m x^m)\,e^{ax},$$

dengan k adalah banyaknya akar yang sama pada PD homogennya. Jika $G(x) = \left(b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m\right)e^{ax}$, maka PD menjadi

$$a_0\, y'' + a_1\, y' + a_2\, y = (b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m)\,e^{ax}. \qquad (5.4)$$

Misalkan

$$y_p = (A_0 + A_1 x + ... + A_m x^m) e^{ax} \text{ , atau } y_p = e^{ax} u(x) ,$$

dengan $u(x) = A_0 + A_1 x + ... + A_m x^m$. Turunkan y_p dua kali terhadap x, diperoleh

$$y_p' = e^{ax} [u'(x) + au(x)]$$

dan

$$y_p'' = e^{ax} [u''(x) + 2au'(x) + a^2 u(x)].$$

Substitusikan y_p, y_p' dan y_p'' pada Persamaan (5.4) diperoleh

$$a_0 [u''(x) + 2au'(x) + a^2 u(x)] + a_1 [u'(x) + au(x)] + a_2 u(x)$$

$$= \left(b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m\right) e^{ax},$$

atau

$$a_0 u''(x) + (2a_0 a + a_1) u'(x) + (a_0 a^2 + a_1 a + a_2) u(x) = P_n(x)$$

dengan $P_n(x) = \left(b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m\right) e^{ax}$. Jika $a_0 a^2 + a_1 a + a_2 \neq 0$, maka $u(x) = A_0 + A_1 x + ... + A_m x^m$, sehingga penyelesaian Persamaan (5.4) adalah

$$y_p = e^{ax} (A_0 + A_1 x + ... + A_m x^m) .$$

Sedangkan jika $a_0 a^2 + a_1 a + a_2 = 0$ dan $2a_0 a + a_1 = 0$, maka dalam hal ini

$$u(x) = x^2 (A_0 + A_1 x + ... + A_m x^m),$$

dikarenakan e^{ax} dan xe^{ax} adalah penyelesaian PD homogennya. Jadi penyelesaian PD homogen adalah

$$y_p = x^k (A_0 + A_1 x + ... + A_m x^m) e^{ax} ,$$

dengan A_0, A_1, …,A_m adalah koefisien yang dicari dengan cara substitusi y_p dan turunkan y_p dua kali terhadap x pada Persamaan (5.4). Dengan demikian, penyelesaian umum PD adalah

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + x^k (A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m) e^{ax}. \end{aligned}$$

Kasus 4: Jika fungsi $G(x)$ pada PD berbentuk $x^m \sin Bx + x^n \cos Bx$, dengan m dan n masing-masing adalah derajat polinomial, maka y_p yang dipilih berbentuk

$$y_{p1} = x^k [(A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m)\cos Bx + (B_0 + B_1 x + \ldots + B_m x^m)\sin Bx]$$

dan

$$y_{p2} = x^k [(A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n)\cos Bx + (B_0 + B_1 x + \ldots + B_n x^n)\sin Bx]$$

,

dengan A_0, A_1, …,A_m dan B_0, B_1, …,B_n merupakan koefisien tak tentu yang dicari dengan cara substitusi y_p dan turunkan y_p dua kali terhadap x pada PD. Maka PD menjadi

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = x^m \sin Bx + x^n \cos Bx. \qquad (5.5)$$

Untuk mencari penyelesaian partikulir Persamaan (5.5), dimisalkan

$$y_p = x^k [(A_0 + A_1 x + \ldots + A_s x^s)\cos Bx + (B_0 + B_1 x + \cdots + B_s x^s)\sin Bx]$$

,

dengan s adalah derajat polinomial m dan n. Dengan demikian penyelesaian umum PD adalah

$$y = y_h + y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p.$$

Kasus 5: Jika fungsi $G(x)$ pada PD berbentuk $E_1 \cos Bx$ atau $E_2 \sin Bx$, dengan $B \neq 0$, maka y_p yang dipilih berbentuk $x^k (A_0 \cos Bx + B_0 \sin Bx)$, dengan A_0 dan B_0 koefisien tak tentu yang dicari dengan cara substitusi y_p dan turunkan y_p dua kali terhadap x ke PD. Maka PD menjadi

$$a_0\, y'' + a_1\, y' + a_2\, y = E_1 \cos Bx, \tag{5.6}$$

atau

$$a_0\, y'' + a_1\, y' + a_2\, y = E_2 \sin Bx. \tag{5.7}$$

Untuk mencari penyelesaian Persamaan (5.6) atau Persamaan (5.7), dimisalkan $y_p = x^k\,(A_0 \cos Bx + B_0 \sin Bx)$, dengan k adalah banyaknya akar yang sama pada PD homogennya. Jadi penyelesaian umum PD adalah

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p \\ &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + x^k\,(A_0 \cos Bx + B_0 \sin Bx), \end{aligned}$$

dengan c_1 dan c_2 konstanta sebarang.

Kasus 6: Jika fungsi $G(x)$ pada PD berbentuk $E_1\, e^{ax} \cos Bx$ atau $E_2\, e^{ax} \sin Bx$, dengan E_1, E_2 adalah konstanta yang tidak sama dengan nol, maka y_p yang dipilih berbentuk $x^k\,(A_0\, e^{ax} \cos Bx + B_0\, e^{ax} \sin Bx)$. Maka PD menjadi

$$a_0\, y'' + a_1\, y' + a_2\, y = E_1\, e^{ax} \cos Bx, \tag{5.8}$$

atau

$$a_0\, y'' + a_1\, y' + a_2\, y = E_2\, e^{ax} \sin Bx. \tag{5.9}$$

Untuk mencari penyelesaian partikulir Persamaan (5.8) atau Persamaan (5.9), dimisalkan

$$y_p = x^k\,(A_0\, e^{ax} \cos Bx + B_0\, e^{ax} \sin Bx).$$

Dengan demikian penyelesaian umum PD adalah

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + x^k\,(A_0\, e^{ax} \cos Bx + B_0\, e^{ax} \sin Bx). \end{aligned}$$

Di sini k adalah banyaknya akar yang sama pada PD homogennya dan A_0 dan B_0 adalah koefisien yang dicari dengan cara substitusi y_p dan turunkan y_p dua kali terhadap x ke PD. Untuk lebih memudahkan dalam mencari penyelesaian PD dengan metode koefisien tak tentu, dapat dilihat pada Tabel 1 di bawah ini.

Tabel 1 Pemilihan y_p untuk Beberapa Kasus Khusus $G(x)$ pada Metode Koefisien Tak Tentu

No.	Bentuk Fungsi $G(x)$	Pilihan untuk y_p
1.	x^m	$x^k\,(A_0 + A_1x + ... + A_mx^m)$
2.	Ee^{ax}	$x^k\,(Ae^{ax})$
3.	$x^m\,e^{ax}$	$x^k\,(A_0 + A_1x + ... + A_mx^m)\,e^{ax}$
4.	$E_1 \cos Bx$ atau $E_2 \sin Bx$	$x^k\,(A_0 \cos Bx + B_0 \sin Bx)$
5.	$x^m \sin Bx + x^n \cos Bx$	$x^k\,[(A_0 + A_1x + ... + A_mx^m)\cos Bx +$ $(B_0 + B_1x + ... + B_mx^m)\sin Bx]$
6.	$E_1\,e^{ax} \cos Bx$ atau $E_2\,e^{ax} \sin Bx$	$x^k\,e^{ax}(A_0 \cos Bx + B_0 \sin Bx)$

Dalam mencari penyelesaian PD linier dengan menggunakan metode koefisien tak tentu berlaku aturan-aturan sebagai berikut:

A. Aturan Dasar

Jika $G(x)$ pada PD merupakan salah satu fungsi yang terdapat di kolom pertama pada Tabel 1, maka pilihlah fungsi y_p yang bersesuaian di kolom kedua, lalu tentukan koefisien tak tentunya dengan cara substitusi y_p dan turunkan y_p dua kali terhadap x ke persamaan diferensialnya.

B. Aturan Modifikasi

Jika $G(x)$ pada PD merupakan bentuk penyelesaian PD homogen, maka kalikan y_p yang dipilih dengan x^k, dengan k adalah banyaknya akar yang sama pada PD homogennya.

C. Aturan Penjumlahan

Jika $G(x)$ pada PD merupakan penjumlahan fungsi-fungsi yang berasal dari beberapa baris pada kolom pertama pada Tabel 1, maka pilihlah y_p yang berupa penjumlahan fungsi-fungsi dari baris yang bersesuaian pada kolom kedua.

Contoh 5.1. Carilah penyelesaian umum PD

$$y'' - 3y' = 2x^2 + 1. \tag{5.10}$$

Penyelesaian. Langkah pertama yang harus dilakukan adalah mencari penyelesaian PD dari Persamaan (5.10). PD homogennya adalah

$$y'' - 3y' = 0. \tag{5.11}$$

Misalkan m adalah akar-akar karakteristik dari Persamaan (5.11), maka persamaan karakteristik dari Persamaaan (5.11) adalah

$$m^2 - 3m = 0 \text{ atau } m(m-3) = 0.$$

Sehingga akar-akarnya adalah $m_1 = 0$ dan $m_2 = 3$. Penyelesaian umum PD homogennya adalah

$$y_h = c_1 e^{0x} + c_2 e^{3x} = c_1 + c_2 e^{3x},$$

dengan c_1 dan c_2 konstanta sebarang. Untuk mencari penyelesaian PD non homogennya yaitu y_p, maka Aturan A yang digunakan, sehingga

$$y_p = x^k (A_0 + A_1 x + A_2 x^2).$$

Karena $2x^2 + 1$ ditulis dalam bentuk penyelesaian PD homogennya, dengan akar yang sama tidak ada, artinya $k = 1$, sehingga

$$y_p = x(A_0 + A_1 x + A_2 x^2)\,. \tag{5.12}$$

Persamaan (5.12) diturunkan terhadap x dua kali, diperoleh

$$y_p' = A_0 + 2A_1 x + 3A_2 x^2 \tag{5.13}$$

dan

$$y_p'' = 2A_1 + 6A_2 x\,. \tag{5.14}$$

Substitusikan Persamaan (5.12), (5.13) dan (5.14) ke Persamaan (5.10), diperoleh

$$2A_1 + 6A_2 x - 3A_0 - 6A_1 x - 9A_2 x^2 = 2x^2 + 1\,.$$

Samakan koefisien ruas kiri dan ruas kanan, diperoleh

$$2A_1 - 3A_0 = 1,$$

$$6A_2 - 6A_1 = 0,$$

$$-9A_2 = 2.$$

Penyelesaian sistem persamaan ini adalah

$$A_2 = -\frac{2}{9}, \quad A_1 = -\frac{2}{9} \quad \text{dan} \quad A_0 = -\frac{13}{27}\,.$$

Jadi penyelesaian persamaan tidak homogennya adalah:

$$y_p = -\frac{13}{27}x - \frac{2}{9}x^2 - \frac{2}{9}x^3\,.$$

Sedangkan penyelesaian umum PD adalah:

$$y = y_h + y_p$$

$$= c_1 + c_2 e^{3x} - \frac{13}{27}x - \frac{2}{9}x^2 - \frac{2}{9}x^3.$$

Co

Contoh 5.2. Carilah penyelesaian umum PD

$$y''-5y'+6y=4e^{2x} \tag{5.15}$$

Penyelesaian. Pertama-tama selesaikan persamaan homogennya

$$y''-5y'+6y=0. \tag{5.16}$$

Persamaan karakteristik dari Persamaan (5.16) adalah

$$m^2 - 5m + 6 = 0 \text{ atau } (m-2)(m-3) = 0,$$

sehingga akar-akarnya adalah $m_1 = 2$, $m_2 = 3$. Penyelesaian umum dari PD homogennya adalah

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x},$$

dengan c_1 dan c_2 konstanta sebarang. Sedangkan penyelesaian persamaan tidak homogennya, yaitu y_p dapat digunakan Aturan B, sehingga

$$y_p = x^k Ae^{2x}$$

Karena Ae^{2x} ditulis sebagai bentuk penyelesaian PD homogennya, dengan akar yang sama tidak ada, maka $k = 1$, sehingga

$$y_p = xAe^{2x}. \tag{5.17}$$

Diturunkan terhadap x dua kali, diperoleh

$$y_p' = 2Axe^{2x} + Ae^{2x} \tag{5.18}$$

dan

$$y_p'' = 4Axe^{2x} + 4Ae^{2x}. \tag{5.19}$$

Substitusikan Persamaan (5.17), (5.18) dan (5.19) ke PD diperoleh

$$4Axe^{2x} + 4Ae^{2x} - 5(2Axe^{2x} + Ae^{2x}) + 6Axe^{2x} = 4e^{2x}$$

$$4Axe^{2x} + 4Ae^{2x} - 10Axe^{2x} - 5Ae^{2x} + 6Axe^{2x} = 4e^{2x}$$

$$-Ae^{2x} = 4e^{2x}$$

$A = -4.$

Penyelesaian PD non homogennya adalah

$$y_p = -4xe^{2x}.$$

Jadi penyelesaian umum PD adalah

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} - 4xe^{2x}.$$

Contoh 5.3. Carilah penyelesaian umum PD

$$y'' - 2y' + y = 7xe^x \tag{5.20}$$

Penyelesaian. Persamaan homogen dari PD ini adalah

$$y'' - 2y' + y = 0, \tag{5.21}$$

sehingga persamaan karakteristiknya adalah

$$m^2 - 2m + 1 = 0 \text{ atau } (m-1)^2 = 0.$$

Dengan demikian akar-akarnya adalah $m_1 = 1$ dan $m_2 = 1$. Penyelesaian umum PD homogennya adalah

$$y_h = c_1 e^x + c_2 xe^x,$$

dengan c_1, c_2 konstanta sebarang. Untuk mencari penyelesaian PD non homogennya, dipilih y_p sesuai dengan Aturan C, yaitu

$$y_p = x^k (A_0 + A_1 x) e^x$$

Karena $7xe^x$ ditulis sebagai bentuk penyelesaian PD homogennya, dengan akar yang sama ada dua, maka $k = 2$, sehingga

$$y_p = x^2 (A_0 + A_1 x) e^x. \tag{5.22}$$

Diturunkan terhadap x dua kali, diperoleh

$$y_p' = (2A_0 x + 3A_1 x^2) e^x + (A_0 x^2 + A_1 x^3) e^x \tag{5.23}$$

dan

$$y_p''=(A_0x^2+A_1x^3)e^x+(4A_0x+6A_1x^2)e^x+(2A_0+6A_1x)e^x \quad (5.24)$$

Substitusikan Persamaan (5.22), (5.23) dan (5.24) ke PD, diperoleh

$$(A_0x^2+A_1x^3)e^x+(4A_0x+6A_1x^2)e^x+(2A_0+6A_1x)e^x -$$
$$(2A_0x+3A_1x^2)e^x+(A_0x^2+A_1x^3)e^x + (A_0x^2+A_1x^3)e^x=7xe^x,$$

sehingga diperoleh $(2A_0+6A_1x)e^x=7xe^x$. Samakan ruas kiri dan kanan, diperoleh

$$A_0 = 0 \qquad \text{dan } A_1=\frac{7}{6}.$$

Penyelesaian PD non homogennya adalah

$$y_p=\frac{7}{6}x^3e^x.$$

Jadi penyelesaian umum PD adalah

$$y=c_1e^x+c_2xe^x+\frac{7}{6}x^3e^x.$$

Contoh 5.4. Carilah penyelesaian umum PD

$$y''+2y'+2y=3e^{-x}+4\cos x.$$

Penyelesaian. Pertama-tama selesaikan persamaan homogennya, yaitu

$$y''+2y'+2y=0,$$

sehingga persamaan karakteristiknya adalah

$$m^2 + 2m + 2 = 0.$$

Akar-akar persamaan karakteristiknya, yaitu

$$m_1 = -1 + i, \quad m_2 = -1 - i.$$

Penyelesaian umum PD homogennya adalah

$$y_h = e^{-x}\,(c_1 \cos x + c_2 \sin x),$$

dengan c_1 dan c_2 konstanta sebarang. Untuk mencari penyelesaian PD non homogennya, yaitu y_p, maka gunakan Aturan C, sehingga

$$y_p = x^k\,(A_1 e^{-x} + A_2 \cos x + A_3 \sin x).$$

Karena $3e^{-x} + 4 \cos x$ bukan bentuk penyelesaian PD homogennya, dan tidak ada akar yang sama, maka

$$y_p = A_1 e^{-x} + A_2 \cos x + A_3 \sin x. \qquad (5.25)$$

Diturunkan dua kali terhadap x, didapat

$$y_p' = -A_1 e^{-x} - A_2 \sin x + A_3 \cos x \qquad (5.26)$$

dan

$$y_p'' = A_1 e^{-x} - A_2 \cos x - A_3 \sin x \qquad (5.27)$$

Substitusikan Persamaan (5.25), (5.26) dan (5.27) pada PD, diperoleh

$$A_1 e^{-x} - A_2 \cos x - A_3 \sin x + 2(-A_1 e^{-x} - A_2 \sin x + A_3 \cos x) + \quad 2$$
$$(A_1 e^{-x} + A_2 \cos x + A_3 \sin x) = 3e^{-x} + 4 \cos x. \qquad (5.28)$$

Samakan ruas kiri dan ruas kanan Persamaan (5.28), diperoleh

$$A_1 = 3,\ \ A_2 + 2A_3 = 4,\ \ A_3 - 2A_2 = 0.$$

Sistem persamaan ini diselesaikan, diperoleh

$$A_1 = 3,\ \ A_2 = \frac{4}{5},\ \text{dan}\ A_3 = \frac{8}{5}.$$

Jadi penyelesaian PD non homogennya adalah

$$y_p = 3e^{-x} + \frac{4}{5}\cos x + \frac{8}{5}\sin x..$$

Penyelesaian umum PD adalah

$$y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + 3e^{-x} + \frac{4}{5}\cos x + \frac{8}{5}\sin x.$$

5.2 VARIASI PARAMETER

Jika fungsi $G(x)$ pada PD bukan fungsi koefisien tak tentu, maka untuk mencari penyelesaian umum PD non homogennya dapat diselesaikan dengan menggunakan metode variasi parameter. Jika $\{y_1, y_2\}$ merupakan himpunan penyelesaian fundamental dari PD homogen orde dua, maka langkah-langkah yang digunakan untuk menyelesaikan PD linier orde dua berkoefisien konstanta dengan menggunakan metode variasi parameter sebagai berikut:

1. Menyelesaikan PD homogennya, yaitu

$$a_0\, y'' + a_1\, y' + a_2\, y = 0,$$

sehingga penyelesaian umum persamaan homogennya adalah

$$y_h = c_1\, y_1 + c_2\, y_2,$$

dengan c_1 dan c_2 konstanta sebarang. Sedangkan y_1 dan y_2 adalah penyelesaian fundamental dari PD homogennya.

2. Menggantikan konstanta-konstanta sebarang pada penyelesaian umum PD homogen dengan fungsi-fungsi x sebarang, sehingga penyelesaian PD non homogennya adalah

$$y_p = u_1(x)\, y_1(x) + u_2(x)\, y_2(x),$$

dengan $u_1(x)$ dan $u_2(x)$ adalah fungsi sebarang yang belum diketahui. Sedangkan $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ adalah basis penyelesaian PD homogennya.

3. Jika y_p pada Langkah (2) diturunkan terhadap x dua kali, maka didapat

$$y_p' = u_1'(x)\, y_1(x) + u_1(x)\, y_1'(x) + u_2'(x)\, y_2(x) + u_2(x)\, y_2'(x).$$

Karena u_1 dan u_2 merupakan dua fungsi sebarang dari x, diperoleh

$$u_1'(x)\,y_1(x)+u_2'(x)\,y_2(x)=0\,, \tag{5.29}$$

sehingga diperoleh

$$y_p'=u_1(x)\,y_1'(x)+u_2(x)\,y_2'(x)$$

dan

$$y_p''=u_1'(x)\,y_1'(x)+u_1(x)\,y_1''(x)+u_2'(x)\,y_2'(x)+u_2(x)\,y_2''(x)\,.$$

4. Mensubstitusikan y_p, y_p' dan y_p'' pada Langkah 3 ke PD, didapat

$$a_0\,[u_1'(x)\,y_1'(x)+u_1(x)\,y_1''(x)+u_2'(x)\,y_2'(x)+u_2(x)\,y_2''(x)]+$$

$$a_1\,[u_1(x)\,y_1'(x)+u_2(x)\,y_2'(x)] + a_2\,[u_1(x)\,y_1(x) + u_2(x)\,y_2(x)]$$

$$= u_1(x)[a_0\,y_1''(x)+a_1\,y_1'(x)+a_2\,y_1(x)] +$$

$$u_2(x)[a_0\,y_2''(x)+a_1\,y_2'(x)+a_2\,y_2(x)] +$$

$$a_0\,[u_1'(x)\,y_1'(x)+u_2'(x)\,y_2'(x)]=G(x)\,. \tag{5.30}$$

Karena y_1 dan y_2 merupakan penyelesaian persamaan homogen, mengakibatkan

$$a_0\,y_1''(x)+a_1\,y_1'(x)+a_2\,y_1(x)=0\,.$$

dan

$$a_0\,y_2''(x)+a_2\,y_2'(x)+a_2\,y_2(x)=0\,.$$

Persamaan (5.30) menjadi

$$a_0\,[u_1'(x)\,y_1'(x)+u_2'(x)\,y_2'(x)]=G(x)\,. \tag{5.31}$$

5. Dari Persamaan (5.29) pada Langkah 3 dan Persamaan (5.31) pada Langkah 4 diperoleh sistem persamaan

$$u_1'(x)\,y_1(x)+u_2'(x)\,y_2(x)=0,$$

$$u_1'(x)\,y_1'(x)+u_2'(x)\,y_2'(x)=\frac{G(x)}{a_0}.$$

6. Menyelesaikan sistem persamaan pada Langkah 5, sehingga didapat $u_1'(x)$ dan $u_2'(x)$.
7. Mengintegralkan $u_1'(x)$ dan $u_2'(x)$ pada Langkah 6, diperoleh $u_1(x)$ dan $u_2(x)$.
8. Mensubstitusikan $u_1(x)$ dan $u_2(x)$ ke y_p pada Langkah 2, diperoleh

$$y_p = u_1(x)\,y_1(x) + u_2(x)\,y_2(x).$$

9. Menjumlahkan penyelesaian umum PD homogen dengan penyelesaian PD non homogen, sehingga penyelesaian umum PD

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= c_1y_1 + c_2y_2 + u_1(x)\,y_1 + u_2(x)\,y_2. \end{aligned}$$

Contoh 5.5. Carilah penyelesaian umum PD

$$2y''-4y'+2y=x^{-1}e^x,\ x>0.$$

Penyelesaian. *Langkah pertama,* selesaikan PD homogennya:

$$2y''-4y'+2y=0.$$

Persamaan karakteristiknya adalah

$$2m^2 - 4\,m + 2 = 0 \ \text{ atau } \ 2\,(m-1)^2 = 0,$$

sehingga akar-akarnya adalah $m_1 = 1$ dan $m_2 = 1$. Penyelesaian umum persamaan homogennya adalah

$$y_h=c_1e^x+c_2\,xe^x,$$

dengan c_1 dan c_2 konstanta sebarang serta e^x dan xe^x adalah penyelesaian fundamental PD homogennya. *Langkah kedua*, gantilah c_1

dan c_2 pada penyelesaian umum persamaan homogen menjadi fungsi-fungsi x sebarang, sehingga

$$y_p = u_1(x)e^x + u_2(x)\,xe^x, \tag{5.32}$$

merupakan penyelesaian PD non homogennya. *Langkah ketiga*, turunkan y_p pada Persamaan (5.32) dua kali terhadap x, didapat

$$y_p' = u_1'(x)e^x + u_1(x)e^x + u_2'(x)xe^x + u_2(x)[xe^x + e^x].$$

Dari sini diperoleh

$$u_1'(x)e^x + u_2'(x)\,xe^x = 0 \tag{5.33}$$

sehingga

$$y_p' = u_1(x)e^x + u_2(x)[xe^x + e^x] \tag{5.34}$$

dan

$$y_p'' = u_1'(x)e^x + u_1(x)e^x + u_2'(x)[xe^x + e^x] + u_2(x)[2e^x + xe^x]. \tag{5.35}$$

Langkah keempat, substitusikan Persamaan (5.32), (5.34) dan (5.35) ke PD, diperoleh

$$2[u_1'(x)e^x + u_1(x)e^x + u_2'(x)[xe^x + e^x] + u_2(x)[2e^x + xe^x]] -$$
$$4[u_1(x)e^x + u_2(x)[xe^x + e^x]] +$$
$$2[u_1(x)e^x + u_2(x)\,xe^x]$$
$$= 2[u_1'(x)e^x + u_2'(x)[xe^x + e^x]] = x^{-1}e^x,$$

atau

$$[u_1'(x)e^x + u_2'(x)[xe^x + e^x]] = \frac{x^{-1}e^x}{2}. \tag{5.36}$$

Langkah kelima, bentuk sistem persamaan dari Persamaan (5.33) dan (5.36), yaitu

$$u_1'(x)e^x + u_2'(x)\,xe^x = 0$$

$$u_1'(x)e^x + u_2'(x)[\,xe^x + e^x\,] = \frac{x^{-1}e^x}{2}. \qquad (5.37)$$

Langkah keenam, menyelesaikan sistem persamaan (5.37), diperoleh

$$u_1'(x) = -u_2'(x)\,x\,. \qquad (5.38)$$

Substitusikan Persamaan (5.38) pada persamaan kedua dari sistem persamaan (5.37), diperoleh

$$-u_2'(x)\,x + u_2'(x)\,x + 1 = \frac{x^{-1}}{2}. \qquad (5.39)$$

Sederhanakan Persamaan (5.391), diperoleh

$$u_2'(x) = \frac{1}{2x}$$

dan substitusikan ke Persamaan (5.38), sehingga diperoleh

$$u_1'(x) = -\frac{1}{2}.$$

Langkah ketujuh, mengintegralkan $u_1(x)$ dan $u_2(x)$, diperoleh

$$u_1(x) = \int -\frac{1}{2}\,dx = -\frac{x}{2}$$

dan

$$u_2(x) = \int \frac{1}{2x}\,dx = \frac{\ln x}{2}.$$

Langkah kedelapan, mensubstitusikan $u_1(x)$ dan $u_2(x)$ ke Persamaan (5.32), diperoleh

$$y_p = -\frac{x}{2}e^x + \frac{\ln x}{2}xe^x,$$

merupakan penyelesaian PD non homogennya. *Langkah kesembilan*, menjumlahkan y_h yaitu penyelesaian umum PD homogennya dengan y_p, yaitu penyelesaian umum PD non homogennya, diperoleh

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= c_1e^x + c_2xe^x - \frac{x}{2}e^x + \frac{\ln x}{2}xe^x. \end{aligned}$$

Contoh 5.6. Carilah penyelesaian umum PD $y'' + y = \sec x$.

Penyelesaian. PD homogennya adalah $y'' + y = 0$, sehingga persamaan karakteristiknya adalah

$$m^2 + 1 = 0.$$

Akar-akar persamaan karakteristik adalah $m_1 = i$ dan $m_2 = -i$. Jadi penyelesaian PD homogennya adalah

$$\begin{aligned} y_h &= e^{0x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) \\ &= C_1 \cos x + C_2 \sin x, \end{aligned}$$

dengan C_1 dan C_2 konstanta sebarang. Untuk mencari penyelesaian PD non homogennya, gantilah konstanta sebarang pada penyelesaian umum PD homogennya menjadi fungsi-fungsi x sebarang, sehingga

$$y_p = u_1(x)\cos x + u_2(x)\sin x. \tag{5.40}$$

Turunkan y_p dua kali terhadap x, diperoleh

$$y_p' = u_1'(x)\cos x - u_1(x)\sin x + u_2'(x)\sin x + u_2(x)\cos x.$$

Dari sini didapat

$$u_1'(x)\cos x + u_2'(x)\sin x = 0, \tag{5.41}$$

sehingga y_p' menjadi

$$y_p' = -u_1(x)\sin x + u_2(x)\cos x \tag{5.42}$$

dan

$$y_p'' = -u_1'(x)\sin x - u_1(x)\cos x + u_2'(x)\cos x - u_2(x)\sin x\,. \tag{5.43}$$

Substitusikan Persamaan (5.40) dan (5.43) ke PD, diperoleh

$$-u_1'(x)\sin x + u_2'(x)\cos x = \sec x\,. \tag{5.44}$$

Dari Persamaan (5.41) dan (5.44), diperoleh sistem persamaan

$$u_1'(x)\cos x + u_2'(x)\sin x = 0$$

$$-u_1'(x)\sin x + u_2'(x)\cos x = \sec x\,.$$

Selesaikan sistem persamaan ini, didapat

$$u_1'(x) = -\tan x \quad \text{dan} \quad u_2'(x) = 1\,.$$

Dengan demikian,

$$u_1(x) = \int -\tan x\, dx \;=\; \ln(\cos x),$$

$$u_2(x) = \int 1\, dx \;=\; x.$$

Substitusikan $u_1(x)$ dan $u_2(x)$ ke y_p, diperoleh

$$y_p = \ln(\cos x).\cos x + x\sin x$$

$$= \cos x\, \ln(\cos x) + x\sin x,$$

merupakan penyelesaian PD non homogennya. Penyelesaian umum PD adalah

$$y = y_h + y_p$$

$$= c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x\, \ln(\cos x) + x\sin x.$$

BAB 6

PD LINIER HOMOGEN ORDE *n* DENGAN KOEFISIEN KONSTANTA

Bentuk umum PD linier homogen orde n dengan koefisien konstanta adalah

$$a_o\,y^{(n)}+a_1\,y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\,y'+a_n\,y=0,$$

dengan $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ adalah konstanta sebarang. Pada prinsipnya, untuk menyelesaikan PD ini adalah sama saja dengan PD linier homogen orde dua. Dengan demikian jika telah dipahami penyelesaian PD orde dua maka tidak sukar lagi untuk menyelesaikan PD orde n. Namun demikian, untuk menyelesaikan persamaan karakteristiknya diperlukan metode atau cara menyelesaikan akar-akar persamaan polinomial. Sehingga penyelesaian PD linier homogen orde n adalah perluasan dari penyelesaian PD linier homogen orde dua.

Misal m adalah akar karakteristik dari PD di atas, dengan demikian diperoleh persamaan dalam bentuk m $y$aitu

$$a_0\,m^n+a_1\,m^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\,m+a_0=0\,.$$

Jika persamaan ini diselesaikan, maka diperoleh akar-akarnya yaitu $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$. Dengan demikian, secara umum:

Kasus 1. Untuk $m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq \ldots \neq m_n$, diperoleh penyelesaian homogennya adalah

$$y_h=c_1\,e^{m_1x}+c_2\,e^{m_2x}+c_3\,e^{m_3x}+\cdots+c_n\,e^{m_nx}\,,$$

dengan $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ adalah konstanta sebarang.

Kasus 2. Untuk $m_1 = m_2 = m_3 = \ldots = m_n$, diperoleh penyelesaian homogennya adalah

$$y_h = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + \cdots + c_n x^{n-1})e^{mx}.$$

Untuk kasus lain, dapat digunakan sebagaimana halnya pada PD linier homogen orde dua dengan koefisien konstanta.

Contoh 6.1. Carilah penyelesaian umum PD $y^{(4)} - 7y'' + 6y' = 0$.

Penyelesaian. Misal m adalah akar persamaan karakteristik

$$m^4 - 7m^2 + 6m = 0 \text{ atau } m(m-1)(m-2)(m+3) = 0.$$

Diperoleh akar-akar karakteristik

$$m_1 = 0,\ m_2 = 1, m_3 = 2 \text{ dan } m_4 = -3.$$

Jadi penyelesaian umum

$$y_h = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-3x},$$

dengan c_1, c_2, c_3, dan c_4 adalah konstanta sebarang.

Contoh 6.2. Carilah penyelesaian umum PD $y^{(4)} + 2y''' - 3y'' - 4y' + 4y = 0.$

Penyelesaian. Persamaan karakteristiknya adalah

$$m^4 + 2m^3 - 3m^2 - 4m + 4 = 0 \text{ atau } (m-1)^2(m+2)^2 = 0.$$

Sehingga akar-akar karakteristik adalah

$$m_1 = 1,\ m_2 = 1, m_3 = -2 \text{ dan } m_4 = -2.$$

Jadi penyelesaian umum PD adalah

$$y_h = c_1 e^x + c_2 xe^x + c_3 e^{-2x} + c_4 xe^{-2x}$$

$$= (c_1 + c_2 x)e^x + (c_3 + c_4 x)e^{-2x},$$

dengan c_1, c_2, c_3, dan c_4 adalah konstanta sebarang.

Contoh 6.3. Carilah penyelesaian umum PD $y^{(7)}+18y^{(5)}+81y'''=0$.

Penyelesaian. Persamaan karakteristik dari PD adalah

$$m^7 + 18\, m^5 + 81\, m^3 = 0,$$

yang jika difaktorkan diperoleh

$$m^3(m^2 + 9)(m^2 + 9) = 0.$$

Diperoleh akar-akar karakteristik adalah

$$m_1 = m_2 = m_3 = 0,\ m_4 = m_7 = -3i\ , m_5 = m_6 = -3i.$$

Jadi penyelesaian umumnya adalah

$$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 \cos 3x + c_5 \sin 3x + x(c_6 \cos 3x + c_7 \sin 3x).$$

BAB 7

PD LINIER NON HOMOGEN ORDE *n* DENGAN KOEFISIEN KONSTANTA

Bentuk umum PD linier non homogen orde n dengan koefisien konstanta adalah

$$a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = G(x)$$

dengan $a_0, a_1, , a_n$ adalah konstanta dan $G\,(x) \neq 0$. Penyelesaian dari PD ini sama saja dengan PD orde dua, yaitu tentukan soluai homogennya (y_h) dan penyelesaian non homogennya (y_p), sehingga penyelesaian umumnya adalah

$$y = y_h + y_p.$$

Untuk penyelesaian homogennya (y_h) adalah

$$y_h = c_1\, y_1 + c_2\, y_2 + \ldots + c_n\, y_n.$$

Untuk penyelesaian non homogennya (y_p) dapat ditentukan dengan metode:

7.1 Koefisien Tak Tentu

Dengan menggunakan metode koefisien tak tentu, dilakukan sebagai berikut:

1. Jika $G(x)$ atau fungsi non homogennya merupakan jumlah bentuk $x^m e^{ax}$ dengan x^m adalah polinomial berderajat m, dengan $m \geq 0$ dan $a \neq 0$, maka y_p yang dipilih berbentuk $x^k\,(A_0 + A_1 x + .. + A_m x^m)\,e^{ax}$, dengan k adalah banyaknya akar yang sama pada persamaan homogennya dan $A_0, A_1, \ldots, A_m$ adalah koefisien tak tentunya.

2. Jika $G(x)$ berbentuk $x^m e^{ax} \cos Bx + x^n e^{ax} \sin Bx$, dengan x^m adalah polinomial berderajat m dan x^n adalah polinomial berderajat n, maka y_p yang dipilih berbentuk

$$x^k (A_0 + A_1x + \ldots + A_sx^s)\, e^{ax} \cos Bx + x^k (A_0 + A_1x + \ldots + A_sx^s)\, e^{ax} \sin Bx,$$

dengan s adalah derajat m dan n. Sedangkan k adalah banyaknya akar yang sama pada persamaan homogennya.

3. Substitusikan y_p dan turunannya hingga turunan ke-n sesuai dengan orde PD ke PD semula untuk mencari koefisien tak tentunya, yaitu

$$A_0, A_1, \ldots, A_m \quad \text{dan} \quad B_0, B_1, \ldots, B_m,$$

atau

$$A_0, A_1, \ldots, A_n \quad \text{dan} \quad B_0, B_1, \ldots, B_n.$$

4. Penyelesaian umum PD adalah

$$y = y_h + y_p.$$

Contoh 7.1. Carilah penyelesaian umum PD $y''' + 3y'' - 4y = e^{-2x}$.

Penyelesaian. PD homogennya adalah $y''' + 3y'' - 4y = 0$. Misal m adalah akar karakteristik dari persamaan karakteristik

$$m^3 + 3m^2 - 4 = 0 \text{ atau } (m-1)(m+2)^2 = 0.$$

Akar-akar karakteristik adalah $m_1 = 1$, $m_2 = -2$ dan $m_3 = -2$. Penyelesaian umum PD homogennya adalah

$$y_h = c_1 e^x + (c_2 + c_3 x)\, e^{-2x},$$

dengan c_1, c_2 dan c_3 konstanta sebarang. Untuk mencari penyelesaian PD non homogennya, yaitu y_p, digunakan Aturan B, yaitu

$$y_p = x^k (A_0 e^{-2x}).$$

Karena e^{-2x} ditulis dalam bentuk penyelesaian PD homogennya, dengan akar yang sama ada dua, $k = 2$, sehingga

$$y_p = x^2 (A_0 e^{-2x}) \text{ atau } y_p = A_0 x^2 e^{-2x}.$$

Karena PD orde tiga, maka y_p diturunkan tiga kali terhadap x, diperoleh

$$y_p' = 2A_0 xe^{-2x} - 2A_0 x^2 e^{-2x}$$

$$y_p'' = 2A_0 e^{-2x} - 8A_0 xe^{-2x} + 4A_0 x^2 e^{-2x}$$

$$y_p''' = -12 A_0 e^{-2x} + 24A_0 xe^{-2x} - 8A_0 x^2 e^{-2x}.$$

Substitusikan turunan-turunan ini dan y_p ke PD, diperoleh $A_0 = -\frac{1}{6}$.

Jadi, penyelesaian PD non homogennya adalah

$$y_p = -\frac{1}{6} x^2 e^{-2x}.$$

Penyelesaian umum PD adalah

$$y = c_1 e^x + (c_2 + c_3 x) e^{-2x} + (-\frac{1}{6} x^2 e^{-2x}),$$

Atau $y = c_1 e^x + (c_2 + c_3 x - \frac{1}{6} x^2) e^{-2x}$.

7.2 Variasi Parameter

Penggunaan metode koefisien tak tentu bersifat terbatas pada fungsi-fungsi tertentu. Untuk fungsi-fungsi yang tidak dapat digunakan pada metode koefisien tak tentu, dapat digunakan metode variasi parameter. Dengan demikian penggunaan metode variasi parameter lebih luas dari metode koefisien tak tentu. Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Menggantikan konstanta-konstanta sebarang pada penyelesaian homogennya dengan fungsi-fungsi x sebarang, sehingga

$$y_p = u_1(x)\, y_1 + u_2(x)\, y_2 + \ldots + u_n(x)\, y_n,$$

merupakan penyelesaian PD non homogennya, dan $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, $u_n(x)$ merupakan fungsi-fungsi x sebarang yang belum diketahui.

2. Turunkan y_p pada Langkah (1) hingga turunan ke-n, lalu substitusikan y_p dan turunan y_p ke PD, sehingga didapat sistem persamaan:

$$u_1'(x)\, y_1 + u_2'(x)\, y_2 + \ldots + u_n'(x)\, y_n = 0$$
$$u_1'(x)\, y_1' + u_2'(x)\, y_2' + \ldots + u_n'(x)\, y_n' = 0$$
$$u_1'(x)\, y_1'' + u_2'(x)\, y_2'' + \ldots + u_n'(x)\, y_n'' = 0$$
$$\vdots$$
$$u_1'(x)\, y_1^{(n-1)} + \ldots + u_n'(x)\, y_n^{(n-1)} = \frac{G(x)}{a_0}.$$

3. Selesaikan sistem persamaan pada Langkah (2), sehingga

$$u_m'(x) = \frac{W_m(x)}{W(x)}, \quad m = 1, 2, \ldots, n$$

dengan $W_m(x)$ adalah determinan yang diperoleh dari W dengan mengganti kolom ke-m menjadi kolom (0, 0, …, 0, $\frac{G(x)}{a_0}$).

Sedangkan

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

4. Mengintegralkan $u_m'(x)$ pada Langkah (3), sehingga diperoleh

$$u_m(x) = \int \frac{W_m(x)}{W(x)}\, dx, \qquad m = 1, 2, \ldots, n.$$

5. Mensubstitusikan $u_m(x)$ pada penyelesaian PD non homogennya, yaitu y_p, diperoleh

$$y_p = u_1(x)\, y_1 + u_2(x)\, y_2 + \ldots + u_n(x)\, y_n.$$

6. Menjumlahkan y_h dan y_p sebagai penyelesaian umum PD yaitu $y = y_h + y_p$.

Contoh 7.2. Carilah penyelesaian umum PD $y''' + y' = \csc x$.

Penyelesaian. *Langkah pertama*, selesaikan PD homogen $y''' + y' = 0$. Persamaan karakteristiknnya adalah $m^3 + m = 0$, sehingga akar-akar karakteristiknya adalah $m_1 = 0$, $m_2 = -i$ dan $m_3 = -i$. Penyelesaian umum persamaan homogennya adalah

$$y_h = c_1 e^{0x} + e^{0x}(c_2 \cos x + c_3 \sin x)$$

$$= c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x,$$

dengan c_1 , c_2 dan c_3 konstanta sebarang. *Langkah kedua*, gantilah konstanta sebarang pada penyelesaian homogennya dengan fungsi-fungsi x sebarang, sehingga

$$y_p = u_1(x) + u_2(x) \cos x + u_3(x) \sin x$$

merupakan penyelesaian PD non homogennya dan $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$ merupakan fungsi-fungsi x sebarang yang belum diketahui. *Langkah ketiga*, turunkan y_p tiga kali terhadap x, diperoleh

$$y_p' = u_1'(x) + u_2'(x)\cos x - u_2(x)\sin x + u_3'(x)\sin x + u_3(x)\cos x\,.$$

Karena $u_2(x) = \cos x$ dan $u_3(x) = \sin x$, maka diperoleh

$$u_1'(x) + u_2'(x)\cos x + u_3'(x)\sin x = 0\,.$$

Turunan kedua dari y_p, yaitu

$$y_p'' = u_3'(x)\cos x - u_3(x)\sin x - u_2'(x)\sin x - u_2(x)\cos x\,.$$

Karena $u_2(x) = \cos x$ dan $u_3(x) = \sin x$, maka diperoleh

$$u_3'(x)\cos x - u_2'(x)\sin x = 0\,.$$

Turunan ketiga dari y_p , yaitu

$$y_p''' = -u_3'\sin x - u_3(x)\cos x - u_2'(x)\cos x + u_2(x)\sin x.$$

Karena $u_2(x) = \cos x$ dan $u_3(x) = \sin x$, maka diperoleh

$$-u_3'(x)\sin x - u_2'(x)\cos x = \csc x.$$

Diperoleh sistem persamaan sebagai berikut:

$$u_1'(x) + u_2'(x)\cos x + u_3'(x)\sin x = 0\,,$$

$$u_3'(x)\cos x - u_2'(x)\sin x = 0\,,$$

$$-u_3'(x)\sin x - u_2'(x)\cos x = \csc x\,.$$

Langkah keempat, menyelesaikan sistem persamaan di atas diperoleh

$$u_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)}\,,$$ dengan

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \csc x & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}$$

dan

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}.$$

Jadi $u_1'(x)$ = csc x. Selanjutnya

$$u_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)}, \text{dengan } W_2(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \csc x & -\sin x \end{vmatrix},$$

sehingga $u_2'(x)$ = -cot x. Sedangkan

$$u_3'(x) = \frac{W_3(x)}{W(x)}, \text{dengan } W_3(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \csc x \end{vmatrix},$$

sehingga $u_3'(x) =$ -1/1 = -1. *Langkah kelima*, mengintegralkan $u_1'(x), u_2'(x)$ dan $u_3'(x)$ sehingga diperoleh:

$$u_1(x) = \int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x|$$

$$u_2(x) = -\int \cot x \, dx = -\ln|\sin x|$$

$$u_3(x) = -\int 1 dx = -x.$$

Akibatnya

$$y_p = u_1(x) + u_2(x)\cos x + u_3(x)\sin x$$

$$= \ln|\csc x - \cot x| - \ln|\sin x|\cos x - x\sin x.$$

Sehingga penyelesaian umumnya adalah

$$y = y_h + y_p$$

$$= c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \ln|\csc x - \cot x| - \ln|\sin x|.\cos x - x\sin x.$$

Soal Latihan

Selesaikanlah PD berikut ini.

1. $y''-y'-2y=0$
2. $y''+y'-2y=0$
3. $y''+y'+2y=0$
4. $y''+y=0$
5. $y''+y'+y=0$
6. $y''-4y'+4y=0$
7. $y''=5y'$
8. $y''-5y=0$
9. $y''-y'+6y=0$
10. $2y''+y'-y=0$
11. $y''+5y'-2y=0$
12. $3y''+y'++2y=0$
13. $2y''+2y'+3y=0$
14. $y''+4y'+5y=0$
15. $y''+25y=0$
16. $y''+y=e^{2x}$
17. $y''-y=x^2$
18. $y''+4y'+3y=10e^{-2x}$
19. $y''-4y'+3y=\cos x$
20. $y''-y'-2y=\sin 2x$

21. $y''-2y'+2y=x^3+x$
22. $y''+4y=10e^{2x}$
23. $y''-6y'+9y=2xe^{2x}$
24. $y''+y=x\sin x$
25. $y''-4y'-y=-\frac{2}{3}\cos x+\frac{1}{2}\sin x$
26. $y''-2y'+y=e^x x$
27. $y''+2y'+5y=16e^x+\sin 2x$
28. $y''+y=\sec x$
29. $y''+y'+y=\tan x$
30. $y''+2y'+y=e^{-x}\cos x$
31. $y''-4y'+5y=e^x\ln x$
32. $y'''+y'=0$
33. $y^{(4)}-y=0$
34. $y^{(5)}+y'=0$
35. $y'''+y''+y'=0$
36. $y'''-8y''+16y'-8y=0$
37. $y'''+3y''+3y'+y=0$
38. $y^{(4)}+2y''+y=0$
39. $y^{(4)}-16y=0$
40. $y'''-2y''-2y'+4y=0$
41. $y^{(4)}+8y'=0$

42. $y''' - 7y'' + 8y' + 10y = 0$
43. $2y''' - 5y'' + 6y' - 2y = 0$
44. $y^{(7)} + 18y^{(5)} + 81y''' = 0$
45. $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y''' - y'' = 0$
46. $y''' + y'' + y' + y = 0$
47. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$
48. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$
49. $y''' + 8y = 0$
50. $y^{(4)} + y'' - y = 0$
51. $y^{(4)} + y'' + 9y = e^{2x}$
52. $y^{(4)} - 81y = x^{-5}$
53. $y^{(4)} - 3y'' - 4y = \sin x$
54. $y^{(4)} - 5y'' + y = \cos x$
55. $y''' + 2y'' + y = 2x + 4$
56. $y''' + y'' - y' - y = 2e^{-x}$
57. $y''' - 3y'' + 3y' - y = x^{-2}\, e^{x}$
58. $y''' + 8y = e^{2x}$
59. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 8\cos x$
60. $y''' + 5y'' + 4y' = 4x^2 + 2x$

BAB 8

SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL

PD yang dipelajari pada bab-bab sebelumnya adalah persamaan yang hanya mengandung satu fungsi yang tidak diketahui. Akibatnya, kita harus menyelesaikan satu PD yang mengandung satu fungsi yang tak diketahui. Sementara itu, pada sistem PD terdiri dari beberapa PD tunggal dengan beberapa fungsi yang tak diketahui dan diselesaikan secara serentak (simultan). Pada sistem n $(n \geq 2)$ PD mengandung n buah fungsi yang tak diketahui. Contoh sistem PD:

1. $$\frac{dx}{dt} = y$$
   $$\frac{dy}{dt} = -2x + 3y$$
   dimana fungsi yang tak diketahui adalah $x = x(t)$ dan $y = y(t)$. Sementara itu, t adalah variabel bebas.

2. $$3\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 4x - y = e^t$$
   $$\frac{dx}{dt} + 3x + y = 0$$

3. $$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + y = 1$$
   $$\frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} + 2x + z = 1$$
   $$\frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} + y + 2z = 0$$

Ada beberapa metode yang digunakan untuk menyelesaikan sistem PD, diantaranya adalah metode eliminasi, metode matriks dan metode transformasi Laplace. Dua metode yang pertama akan dibahas di sini.

8.1 METODE ELIMINASI

Metode eliminasi adalah metode paling sederhana untuk menyelesaikan sistem n PD dalam n fungsi yang tak diketahui. Semua fungsi yang tak diketahui, kecuali satu buah fungsi yang tak diketahui, dieliminasikan (dihilangkan) dengan cara menurunkan persamaan yang diketahui. Persamaan yang dihasilkan dengan eliminasi selanjutnya diselesaikan untuk satu fungsi yang tak diketahui. Fungsi yang tak diketahui lainnya diselesaikan dengan cara yang sama. Dengan kata lain, tujuan metode eliminasi ini adalah untuk mengubah sistem n PD yang diberikan ke suatu PD tunggal dalam satu fungsi yang tak diketahui dengan cara mengeliminasikan fungsi-fungsi yang tak diketahui lainnya. Metode eliminasi sendiri terdiri dari tiga cara, yaitu :

1. Eliminasi langsung
2. Menyamakan koefisien
3. Dengan menggunakan determinan.

Untuk memahami ketiga cara dalam metode eliminasi tersebut, perhatikan beberapa contoh di bawah ini.

Contoh 8.1. Carilah penyelesaian dari sistem persamaan diferensial

$$\frac{dx}{dt} = y \qquad (i)$$

$$\frac{dy}{dt} = -2x + 3y \qquad (ii)$$

Penyelesaian 1. Dengan menurunkan kedua ruas dari persamaan (i) terhadap *t*, diperoleh

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt}. \qquad (iii)$$

Substitusikan persamaan (ii) ke persamaan (iii), diperoleh

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2x + 3y. \qquad (iv)$$

Selanjutnya, substitusikan (i) ke (iv), diperoleh

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2x + 3\frac{dx}{xt}$$

atau

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{xt} + 2x = 0. \qquad (v)$$

Dari persamaan terakhir ini terlihat bahwa salah satu fungsi yang tak diketahui *y*, telah dieliminasi dari sistem. Persamaan yang diperoleh adalah PD tunggal dalam satu fungsi yang tak diketahui *x*. Tepatnya adalah PD linier orde dua homogen, yang penyelesaiannya telah dibahas pada bab sebelumnya. Penyelesaian dari PD (v) adalah

$$x(t) = c_1e^t + c_2e^{2t}.$$

Untuk mencari fungsi yang tak diketahui lainnya, *y*, gunakan persamaan (i), yaitu

$$y(t) = \frac{dx}{dt} = c_1e^t + 2c_2e^{2t}.$$

Penyelesaian 2. Gunakan operator $D=\dfrac{d}{dt}$, dan operator D ini dipandang sebagai variabel yang bisa bernilai konstan. Sehingga sistem di atas dapat ditulis

$$Dx = y$$
$$Dy = -2x + 3y$$

atau

$$Dx - y = 0 \qquad (i)$$
$$(D-3)y + 2x = 0. \qquad (ii)$$

Kalikan persamaan (i) dengan *D*-3, diperoleh

$$(D-3)Dx - (D-3)y = 0. \qquad (iii)$$

Jika persamaan (ii) dan (iii) dijumlahkan, diperoleh

$$(D-3)Dx + 2x = 0$$

atau

$$(D^2 - 3D + 2)x = 0$$

atau

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{xt} + 2x = 0. \qquad (iv)$$

Dari persamaan terakhir ini terlihat bahwa telah diperoleh PD tunggal dalam satu fungsi yang tak diketahui, yang penyelesaiannya sama seperti pada Penyelesian 1 di atas.

Penyelesaian 3. Metode eliminasi juga dapat menggunakan determinan. Juga digunakan operator $D=\dfrac{d}{dt}$, yang dapat dipandang sebagai variabel yang bisa bernilai konstan. Tulis kembali sistem di atas menjadi

$$Dx-y=0$$
$$(D-3)y+2x=0.$$

Definisikan

$$(\Delta)=\begin{vmatrix} D & -1 \\ 2 & D-3 \end{vmatrix}=D(D-3)+2,$$
$$\Delta x=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & D-3 \end{vmatrix}=0,$$
$$\Delta y=\begin{vmatrix} D & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Menurut aturan Cramer, penyelesaian untuk x dan y adalah

$$x=\frac{\Delta x}{(\Delta)} \quad \text{dan} \quad y=\frac{\Delta y}{(\Delta)},$$

atau

$$(\Delta)x=\Delta x \quad \text{dan} \quad (\Delta)y=\Delta y.$$

Dengan memasukkan nilai-nilai $(\Delta),\ \Delta x,\ \Delta y$, diperoleh

$$\big(D(D-3)+2\big)x=0 \quad \text{atau} \quad \big(D^2-3D+2\big)x=0$$

dan

$$\big(D(D-3)+2\big)y=0 \quad \text{atau} \quad \big(D^2-3D+2\big)=0.$$

Perhatikan bahwa, jika x dan y diselesaikan sekaligus akan muncul empat buah konstanta sebarang, padahal seharusnya dua saja. Untuk itu, cukup diselesaikan salah satu saja, misalnya diselesaikan PD

$$\left(D^2 - 3D + 2\right)x = 0,$$

yang penyelesaiannya adalah

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}.$$

Penyelesaiannya untuk $y(t)$ dikerjakan sama seperti pada Penyelesaian 1.

Contoh 8.2. Selesaikanlah sistem PD

$$2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 4x - y = e^t \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{dx}{dt} + 3x + y = 0. \qquad \text{(ii)}$$

Penyelesaian 1. Persamaan (ii) diturunkan terhadap *t*, diperoleh

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 0. \qquad \text{(iii)}$$

Selanjutnya, persamaan (iii) dikurangi persamaan (i) dan (ii) diperoleh

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = -e^t\ , \qquad \text{(iv)}$$

merupakan PD linier orde 2 non homogen. Penyelesaian dari PD (iv) adalah

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \tfrac{1}{2} e^t.$$

Untuk mendapatkan $y(t)$, diperoleh dari Persamaan (ii), yakni

$$y(t) = -\frac{dx}{dt} - 3x$$

$$= -(-c_1 \sin t + c_2 \cos t - \tfrac{1}{2}e^t) - 3(c_1 \cos t + c_2 \sin t - \tfrac{1}{2}e^t)$$

$$= (c_1 - 3c_2)\sin t - (3c_1 + c_2)\cos t + 2e^t.$$

***Penyelesaian* 2**. Tulis kembali sistem PD di atas menjadi

$$2\,\mathrm{D}x + \mathrm{D}y - 4x - y = e^t$$
$$\mathrm{D}x + 3x + y = 0$$

atau

$$2\,(\mathrm{D} - 2)x + (\mathrm{D} - 1)y = e^t \qquad (\text{ i })$$
$$(\mathrm{D} + 3)x + y = 0. \qquad (\text{ ii })$$

Jika Persamaan (ii) dikalikan dengan D – 1, maka diperoleh

$$(\mathrm{D} - 1)(\mathrm{D} + 3)x + (\mathrm{D} - 1)y = 0. \qquad (\text{ iii })$$

Selanjutnya, Persamaan (iii) dikurangkan Persamaan (i) diperoleh

$$[(\mathrm{D} - 1)(\mathrm{D} + 3) - 2\,(\mathrm{D} - 3)]x = -e^t$$

atau

$$(\mathrm{D}^2 + 1)x = -e^t.$$

Seterusnya, penyelesaian untuk $x(t)$ dan $y(t)$ dikerjakan seperti Penyelesaian 1 di atas.

***Penyelesaian* 3**. Perhatikan kembali sistem PD

$$2\,(\mathrm{D} - 2)x + (\mathrm{D} - 1)y = e^t$$
$$(\mathrm{D} + 3)x + y = 0.$$

Tulis

$$(\Delta) \quad = \begin{vmatrix} 2(D-2) & D-1 \\ D+3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(D-2)-(D-1)(D+3)$$

$$= -(D^2+1),$$

$$\Delta x \quad = \begin{vmatrix} e^t & D-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= e^t,$$

dan

$$\Delta y \quad = \begin{vmatrix} 2(D-2) & e^t \\ D+3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (D+3)\, e^t$$

$$= 4e^t.$$

Menurut aturan Cramer,

$$x = \frac{\Delta x}{(\Delta)} \quad \text{atau} \quad (\Delta)x = \Delta x.$$

Sehingga,

$$-(D^2+1)x = e^t$$

atau

$$(D^2+1)x = -e^t.$$

Persamaan terakhir ini adalah PD linier orde dua non homogen yang penyelesaiannya sama seperti Penyelesaian 1 di atas.

Contoh 8.3. Selesaikanlah masalah nilai awal

$$\frac{dx}{dt} = -3x + 4y \qquad (\text{ i })$$

$$\frac{dy}{dt} = -2x + 3y \qquad (\text{ ii })$$

$$x(0) = -1, \quad y(0) = 3. \qquad (\text{ iii })$$

Penyelesaian. Dengan menurunkan kedua ruas dari (i) terhadap t diperoleh

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -3\frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt}. \qquad (\text{ iv })$$

Dengan menggunakan (ii) dan kemudian (i) lagi, diperoleh

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -3\frac{dx}{dt} + 4(-2x + 3y)$$

$$= -3\frac{dx}{dt} - 8x + 12y$$

$$= -3\frac{dx}{dt} - 8x + 3\left(\frac{dx}{dt} + 3x\right)$$

$$= x,$$

atau

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0. \qquad (\text{ v })$$

Penyelesaian dari Persamaan (v) adalah

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}. \qquad (\text{ vi })$$

Selanjutnya, dari (i) diperoleh

$$4y = \frac{dx}{dt} + 3x$$

$$= c_1 e^t - c_2 e^{-t} + 3(c_1 e^t + c_2 e^{-t})$$

$$= 4c_1 e^t + 2c_2 e^{-t}.$$

Sehingga,

$$y(t) = c_1 e^t + \tfrac{1}{2} c_2 e^{-t}. \qquad (\text{vii})$$

Dengan menggunakan syarat awal (iii) dalam Persamaan (vi) dan (vii) diperoleh

$$c_1 + c_2 = -1$$

$$c_1 + \tfrac{1}{2} c_2 = 3,$$

yang jika diselesaikan utuk c_1 dan c_2 memberikan $c_1 = 7$ dan $c_2 = -8$. Akibatnya, penyelesaian dari masalah nilai awal di atas adalah

$$x(t) = 7e^t - 8e^{-t}$$

$$y(t) = 7e^t - 4e^{-t}.$$

Contoh 8.4. Carilah penyelesaian dari sistem

$$(\mathrm{D}+1)^2 x + 2\,\mathrm{D}y + 3\,\mathrm{D}z = 1 \quad (\text{i})$$

$$\mathrm{D}x + z = 0 \qquad (\text{ii})$$

$$x - \mathrm{D}y - \mathrm{D}z = 0. \qquad (\text{iii})$$

Penyelesaian. Kalikanlah (ii) dengan D, diperoleh

$$\mathrm{D}^2 x + \mathrm{D}z = 0. \qquad (\text{iv})$$

Selanjutnya, tambahkan dua kali (iii) pada (i) dan kurangkan (iv), diperoleh

$$(2\,\mathrm{D} + 3)x = 1. \qquad (\text{v})$$

Penyelesaian dari PD (v) adalah

$$x e^{3t/2} = \tfrac{1}{2}\int e^{3t/2}\,dt = \tfrac{1}{3} e^{3t/2} + c_1$$

atau

$$x(t) = \tfrac{1}{3} + c_1 e^{-3t/2}.$$

Dari (ii),

$$z = -\,\mathrm{D}x$$

$$z(\mathrm{t}) = \frac{3}{2} c_1 e^{-3t/2}.$$

Dari (iii),

$$\mathrm{D}y = x - Dz$$

$$= \tfrac{1}{3} + c_1 e^{-3t/2} + \tfrac{9}{4} c_1 e^{-3t/2}$$

$$= \tfrac{1}{3} + \tfrac{13}{4} c_1 e^{-3t/2}.$$

Akibatnya,

$$y(t) = \int \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{13}{4} c_1 e^{-3t/2}\right) dt$$

$$= \tfrac{1}{3} t - \tfrac{13}{6} c_1 e^{-3t/2} + c_2.$$

Soal Latihan

Untuk soal Nomor 1 sampai 5, carilah penyelesaian umum dari sistem PD dengan menggunakan 3 cara.

1. $\dfrac{dx}{dt} = 4x - y$

   $\dfrac{dy}{dt} = 2x + y$

2. $\dfrac{dx}{dt} = 4x - y + 3e^{2t}$

   $\dfrac{dy}{dt} = 2x + y + 2t$

3. $(D-2)x + Dy = t$

   $(2D-1)x + 3Dy = e^{t}$

4. $Dx + 2(D-1)y = \sin t$

   $2Dx + (D+2)y = \cos t$

5. $Dx + (D+1)y = 1$

   $(D+2)x + (D-1)z = 1$

   $(D+1)y + (D+2)z = 0$

Untuk soal nomor 6 sampai 10, carilah penyelesaian dari masalah nilai awal:

6. $\dfrac{dx}{dt}=4x-y$

$\dfrac{dy}{dt}=2x+y$

$x(0)=1,\quad y(0)=3$

7. $\dfrac{dx}{dt}=4x-y+3e^{2t}$

$\dfrac{dy}{dt}=2x+y+2t$

$x(0)=-\dfrac{5}{18}\ ,\quad y(0)=\dfrac{47}{9}$

8. $\dfrac{dx}{dt}=3x-2y+2t^{2}$

$\dfrac{dy}{dt}=5x+y-1$

$x(0)=0\ ,\quad y(0)=1$

9. $\dfrac{dx}{dt}=x+t$

$\dfrac{dy}{dt}=2x+y+2t$

$x(0)=-\dfrac{1}{2}\ ,\quad y(0)=-\dfrac{1}{4}$

10. $\dfrac{dx}{dt} = x + 2y$

$\dfrac{dy}{dt} = 4x - y$

$x(0) = 1, \quad y(0) = 1$

11. Misal sistem

$\dfrac{dN_1}{dt} = 4N_1 - 6N_2$

$\dfrac{dN_2}{dt} = 8N_1 - 10N_2$

menyatakan dua populasi yang berlomba, dengan N_1 sebagai populasi yang diinginkan dan N_2 sebagai suatu parasit. Hitung populasi $N_1(t)$ dan $N_2(t)$ pada setiap t.

8.2 METODE MATRIKS

Metode matriks digunakan untuk menyelesaikan sistem PD dengan koefisien konstan. Metode ini melibatkan nilai eigen dan vektor eigen. Untuk itu, sebelum membahas metode matriks lebih lanjut, diberikan terlebih dahulu definisi nilai eigen dan vektor eigen.

Definisi: *Misal A adalah matriks berorde n x n. Bilangan* $\lambda \in \mathbf{R}$ *disebut nilai eigen dari matriks A jika terdapat vektor taknol* $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ *sedemikian hingga berlaku*

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}. \qquad (8.1)$$

Vektor taknol $\mathbf{x}$ *disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen* λ.

Untuk mencari nilai eigen λ, ubah Persamaan (8.1) menjadi

$$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}, \text{ atau } (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Supaya $\mathbf{x}$ taknol, haruslah

$$|A-\lambda I|=\mathbf{0}.$$

Persamaan $|A-\lambda I|=\mathbf{0}$ disebut persamaan karakteristik. Jadi, nilai eigen λ adalah akar-akar dari persamaan karakteristik.

Contoh 8.5. Carilah nilai eigen dan vektor eigen dari matriks.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian. Misal λ adalah nilai eigen, maka persamaan karakteristiknya adalah

$$\begin{aligned}|A-\lambda I| &= \left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| \\ &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -3 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2-8\lambda+15=0,\end{aligned}$$

atau

$$(\lambda-3)(\lambda-5)=0.$$

Jadi, nilai eigennya adalah $\lambda_1=3$ dan $\lambda_2=5$. Selanjutnya dicari vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_1 dan λ_2. Misal $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_1, maka berlaku

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

atau

$$-x_1 + x_2 = 0$$
$$-3x_1 + 3x_2 = 0$$

terlihat bahwa $x_1 = x_2$. Dengan memilih $x_1 = x_2 = 1$, diperoleh vektor eigen $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Misal $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_2, maka berlaku

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

atau

$$-3x_1 + x_2 = 0$$
$$-3x_1 + 3x_2 = 0.$$

Terlihat bahwa $x_2 = 3x_1$. Dengan memilih $x_1 = 1$, diperoleh $x_2 = 3$, sehingga vektor eigen $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Sekarang, pandang sistem n PD linier orde satu homogen dengan koefisien konstan, yang mempunyai bentuk umum

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n.$$

Sistem ini dapat juga ditulis dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

atau

$$\boldsymbol{x}' = \mathrm{A}\,\boldsymbol{x}, \qquad (8.2)$$

dimana

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}, \ \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ \text{dan} \ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Jika $n = 1$, sistem (8.2) tereduksi menjadi PD tunggal

$$\frac{dx}{dt} = a\,x,$$

yang mana penyelesaiannya adalah $x(t) = c\,e^{at}$. Berdasarkan hal ini, akan dicoba suatu penyelesaian dari sistem (8.2) yang berbentuk

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}\ e^{\lambda t}, \qquad (8.3)$$

dimana eksponen λ dan vektor konstan $\boldsymbol{v}$ akan ditentukan.

Turunkan Persamaan (8.3) terhadap t dan substitusikan ke Persamaan (8.2), diperoleh

$$\lambda \, v e^{\lambda t} = A \, v e^{\lambda t}. \qquad (8.4)$$

Jika kedua ruas pada Persamaan (8.4) dibagi dengan $e^{\lambda t}$, diperoleh

$$A \, v = \lambda \, v. \qquad (8.5)$$

Persamaan (8.5) ini sama seperti Persamaan (8.1). Dengan demikian, Persamaan (8.3) adalah solusi sistem (8.2) jika λ adalah nilai eigen dari matriks A dan v adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ.

Berdasarkan nilai eigen dari matriks A, ditinjau dalam tiga kasus, yakni :

1. Semua nilai eigen dari matriks A real dan berlainan.

   Misal $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen real yang berlainan dari matriks A, dan v_1, v_2, …, v_n adalah vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Maka penyelesaian umum dari sistem (8.2) adalah

$$x(t) = c_1 v_1 \, e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 \, e^{\lambda_2 t} + \ldots + c_n v_n \, e^{\lambda_n t}.$$

2. Matriks A mempunyai nilai eigen kompleks.

   Karena A adalah matriks real, jika λ dan v pasangan eigen kompleks, maka *konjugate* kompleks $\overline{\lambda}$ dan $\overline{\boldsymbol{v}}$ juga pasangan eigen. Jadi solusi

$$\boldsymbol{x}_1(t) = \boldsymbol{v} e^{\lambda t} \text{ dan } \boldsymbol{x}_2(t) = \overline{\boldsymbol{v}} e^{\overline{\lambda} t}$$

   juga konjugate. Oleh karena itu, kita dapat mencari dua penyelesaian real dari sistem (8.2) berkaitan dengan pasangan λ dan $\overline{\lambda}$ dengan mengambil bagian real dan imajiner dari $\boldsymbol{x}_1(t)$ atau

$\boldsymbol{x}_2(t)$. Tulis v = $\boldsymbol{a}$ + $i\boldsymbol{b}$, dimana $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ real, dan $\lambda = \gamma + i\mu$, dimana γ dan μ real. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_1(t) &= (\boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b})e^{(\gamma+i\mu)t}\\ &= (\boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b})e^{\gamma t}(\cos\mu t + i\sin\mu t)\\ &= e^{\gamma t}(\boldsymbol{a}\cos\mu t - \boldsymbol{b}\sin\mu t) + ie^{\gamma t}(\boldsymbol{a}\sin\mu t + \boldsymbol{b}\cos\mu t)\end{aligned}$$

Jadi, vektor-vektor

$$\boldsymbol{u}(t) = e^{\gamma t}(\boldsymbol{a}\cos\mu t - \boldsymbol{b}\sin\mu t)$$

$$\boldsymbol{w}(t) = e^{\gamma t}(\boldsymbol{a}\sin\mu t + \boldsymbol{b}\cos\mu t)$$

adalah solusi real untuk sistem (8.2). Selanjutnya, misal $\lambda_1 = \gamma + i\mu$, $\lambda_2 = \gamma - i\mu$ adalah nilai-nilai eigen kompleks, dan $\lambda_3, \lambda_4, \ldots, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen real dan berbeda. Misal vektor-vektor eigen yang bersesuaian adalah $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{a} - i\boldsymbol{b}$, v_3, v_4, …, v_n. Maka penyelesaian umum dari sistem (8.2) adalah

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1\boldsymbol{u}(t) + c_2\boldsymbol{w}(t) + c_3\boldsymbol{v}_3 e^{\lambda_3 t} + \ldots + c_n\boldsymbol{v}_n e^{\lambda_n t}.$$

3. Matriks A mempunyai nilai eigen kembar.

Misal λ adalah nilai eigen kembar dari matriks A. Dengan kata lain, nilai eigen λ mempunyai *multiplisitas* 2, yakni λ sebagai akar kembar dari polinom karakteristik det (A - λI). Misal v adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ, maka solusi sistem (8.2) berbentuk

$$\boldsymbol{x}_1(t) = \boldsymbol{v}e^{\lambda t}.$$

Solusi lain adalah berbentuk

$$\boldsymbol{x}_2(t) = \boldsymbol{v}te^{\lambda t},$$

yang jika disubstitusikan ke Persamaan (8.2) diperoleh

$$\lambda\boldsymbol{v}te^{\lambda t} + \boldsymbol{v}e^{\lambda t} - A\boldsymbol{v}te^{\lambda t} = 0. \qquad (8.6)$$

Karena Persamaan (8.6) berlaku untuk setiap *t*, maka diperoleh

$$v = \mathbf{0}.$$

Untuk itu, penyelesaian kedua dari sistem (8.2 haruslah berbentuk

$$\boldsymbol{x}_2(t) = \boldsymbol{v}\,t\,e^{\lambda t} + \boldsymbol{w}\,e^{\lambda t}. \qquad (8.7)$$

Substitusikan Persamaan (8.7) ke Persamaan (8.2), diperoleh

$$\lambda\,\boldsymbol{v}\,t\,e^{\lambda t} + (\boldsymbol{v} + \lambda\,\boldsymbol{w})\,e^{\lambda t} = A(\boldsymbol{v}\,t\,e^{\lambda t} + \boldsymbol{w}\,e^{\lambda t}). \qquad (8.8)$$

Dengan menyamakan koefisien-koefisien dari Persamaan (8.8) diperoleh

$$(A - \lambda I)\, v = \mathbf{0},$$

dan

$$(A - \lambda I)\, w = v.$$

Vektor w disebut vektor eigen tergeneralisir dari matriks A untuk nilai eigen λ. Penyelesaian umum dari sistem (8.2) adalah

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= c_1\,\boldsymbol{x}_1(t) + c_2\,\boldsymbol{x}_2(t)\\ &= c_1\boldsymbol{v}\,e^{\lambda t} + c_2\,[\boldsymbol{v}\,t\,e^{\lambda t} + \boldsymbol{w}\,e^{\lambda t}].\end{aligned}$$

Contoh 8.6. Carilah penyelesaian umum sistem

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}.$$

Penyelesaian. Mula-mula dicari nilai eigen λ dan vektor eigen v dari matriks koefisien $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Persamaan karakteristiknya adalah

$$|A-\lambda I|=\left|\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 4 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^{2}-2\lambda-3=0,$$

yang akar-akarnya adalah $\lambda_1 = 3$ dan $\lambda_2 = -1$. Jadi nilai eigennya adalah $\lambda_1 = 3$ dan $\lambda_2 = -1$. Misal $v_1 = \begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1 = 3$. Sehingga memenuhi sistem persamaan

$$\begin{pmatrix}1-3 & 1\\ 4 & 1-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

atau $-2\,v_1 + v_2 = 0$. Dengan mengambil $v_1 = 1$, diperoleh $v_2 = 2$. Jadi, vektor eigen $v_1 = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$. Selanjutnya misal $v_2 = \begin{pmatrix}w_1\\ w_2\end{pmatrix}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_2 = -1$. Maka v_2 memenuhi sistem persamaan

$$\begin{pmatrix}1+1 & 1\\ 4 & 1+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

atau $2\,w_1 + w_2 = 0$. Dengan mengambil $w_1 = 1$, diperoleh $w_2 = -2$. Jadi, vektor eigen $v_2 = \begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$. Akibatnya, penyelesaian umum sistem adalah

$$\mathbf{x}(t)=c_1\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}e^{3t}+c_2\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}e^{-t},$$

atau

$$x_1(t) = c_1\ e^{3t} + c_2\ e^{-t},$$

$$x_2(t) = 2c_1 e^{3t} - 2c_2\ e^{-t}.$$

Contoh 8.7. Carilah penyelesaian umum dari sistem

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}.$$

Penyelesaian. Misal A = $\begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix}$. Selanjutnya dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A. Persamaan karakteristiknya adalah

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} . = \lambda^2 + \lambda + \tfrac{5}{4} = 0.$$

Dengan demikian, nilai eigennya adalah $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i$ dan $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - i$. Substitusikan nilai-nilai λ_1 dan λ_2 ke persamaan

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

yang berturut-turut diperoleh

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ dan } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-\frac{1}{2} + i)t}$$

dan

$$\mathbf{x}_2(t)=\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}e^{(-\frac{1}{2}-i)t} \quad .$$

Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1(t)&=\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}e^{(-\frac{1}{2}+i)t}\\ &=\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}e^{-t/2}\,(\cos t+i\sin t)\\ &=\begin{pmatrix}e^{-t/2}\cos t\\ -e^{-t/2}\sin t\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}e^{-t/2}\sin t\\ e^{-t/2}\cos t\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$\boldsymbol{u}(\mathrm{t}) = e^{-t/2}\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{w}(\mathrm{t}) = e^{-t/2}\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}.$$

Akibatnya, penyelesaian umumnya adalah

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t)&=c_1\,\boldsymbol{u}(t)+c_2\,\boldsymbol{w}(t)\\ &=c_1\,e^{-t/2}\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}+c_2\,e^{-t/2}\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Contoh 8.8. Carilah penyelesaian umum dari sistem

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}.$$

Penyelesaian. Untuk memperoleh nilai eigen dan vektor eigen, caranya sama seperti pada contoh 6 dan 7. Yakni, nilai eigen λ = 2 dan vektor eigennya v = $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Sehingga solusi pertama adalah

$$\boldsymbol{x}_1(t) = c_1 \boldsymbol{v} e^{\lambda t} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Solusi kedua berbentuk

$$\boldsymbol{x}_2(t) = c_2 [\boldsymbol{v} t e^{\lambda t} + \boldsymbol{w} e^{\lambda t}].$$

Untuk mencari vektor w = $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$, perhatikan bahwa w harus memenuhi persamaan

$$(A - \lambda I)\, w = v,$$

atau

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Diperoleh persamaan – w_1- w_2 = 1. Pilih w_1 = 0, diperoleh w_2 = -1, sehingga diperoleh w = $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Solusi kedua berbentuk

$$\boldsymbol{x}_2(t) = c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} \right].$$

Jadi, penyelesaian umum sistem adalah

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{x}_1(t) + \boldsymbol{x}_2(t) \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} \right].\end{aligned}$$

DAFTAR KEPUSTAKAAN

Ayres, F. and J.C. Ault, 1999. *Theory and Problems of Differential Equation*, McGraw- Hill, New York

Boyce, W.E and R.C. DiPrima, 2001. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons, New York

Hale, J. and H. Kocak, 1991. *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag, New York

Hirsch, M.W. and S. Smale, 1974. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, California

Kreyzig, E., 1994. *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons, New York

Roman, S., 1992. *Advanced Linear Algebra*, Springer-Verlag, New York

Persamaan Diferensial Biasa

Buku *Persamaan Diferensial Biasa* ini merupakan buku pegangan yang dapat digunakan oleh dosen atau mahasiswa Jurusan Matematika pada khususnya, tetapi tidak menutup kemungkinan untuk digunakan oleh mahasiswa dari jurusan keteknikan dan sosial. Buku ini membahas lengkap persamaan diferensial dengan isi yang mudah dipahami karena dipaparkan langkah demi langkah yang menuntun Anda untuk memahaminya dengan lebih cepat. Selain contoh soal dengan penyelesaian terurut rapi yang dapat dijadikan rujukan, juga terdapat latihan soal yang dapat digunakan untuk menguji sejauh mana pemahaman atas materi yang telah dibaca.

Secara garis besar materi dalam buku ini meliputi:

- Persamaan Diferensial Biasa (PDB) ordo satu derajat satu
- Penerapan Persamaan Diferesial Biasa
- PD linier orde dua nonhomogen dengan koefisien konstanta
- PD linier homogen orde n dengan koefisien konstanta
- PD linier nonhomogen orde n dengan koefisien konstanta
- Sistem Persamaan Diferensial

PELAJARAN
ISBN: 978-979-29-3982-8
9 789792 939828 12301

Penerbit ANDI
Jl. Beo 38-40 Yogyakarta
Telp. (0274) 561881 Fax. (0274) 588282
e-mail: penerbitan@andipublisher.com
website: www.andipublisher.com