

**DESAIN PEMBELAJARAN BERDASARKAN TEORI APOS  
UNTUK MENDUKUNG PEMBELAJARAN BERBASIS BUKTI  
MATERI SISTEM BILANGAN REAL**

**TESIS**

oleh

**Ety Septiati**

**NIM 06022682226023**

**Program Studi Pendidikan Matematika**



**FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN  
UNIVERSITAS SRIWIJAYA**

**2024**

**DESAIN PEMBELAJARAN BERDASARKAN TEORI APOS  
UNTUK MENDUKUNG PEMBELAJARAN BERBASIS BUKTI  
MATERI SISTEM BILANGAN REAL.**

**TESIS**

**Oleh**

**Ety Septiati**

**NIM : 06022682226023**

**Mengesahkan**

**Pembimbing I**



**Prof. Dr. Yusuf Hartono, M.Sc.  
NIP 196411161990031002**

**Pembimbing II**




**Cecil Hiltrimartin, M.Si., Ph.D.  
NIP 196403111980032001**

**Mengetahui:**

**Dekan/FKIP,**  
  
  
**Dr. Hartono, M.A.  
NIP 196710171993011001**

**Koordinator Program Studi**

  
**Dr. Hapizah, S.P., M.T  
NIP 197905302022122022**

**DESAIN PEMBELAJARAN BERDASARKAN TEORI APOS  
UNTUK Mendukung PEMBELAJARAN BERBASIS BUKTI  
MATERI SISTEM BILANGAN REAL**

**TESIS**

Oleh

Ety Septiati

NIM : 06022692226023

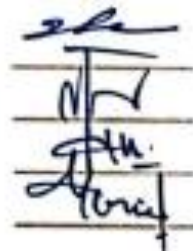
Telah diuji dan lulus pada:

Hari : Senin

Tanggal : 08 Januari 2024

**TIM PENGUJI**

- |               |                                          |
|---------------|------------------------------------------|
| 1. Ketua      | : Prof. Dr. Zulkardi, M.I.Komp., M.Sc.   |
| 2. Sekretaris | : Prof. Dr. Ratu Ilma Indra Putri, M.Si. |
| 3. Anggota    | : Dr. Ely Susanti, M.Pd                  |
| 4. Anggota    | : Dr. Meryansumayeka, M.Sc               |



Palembang, Januari 2024  
Mengetahui,  
Koordinator Program Studi



Dr. Hapizah, S.Pd., M.T  
NIP 197905302022122022

## PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ety Septiati

NIM : 06022682226023

Program Studi : Pendidikan Matematika

menyatakan dengan sungguh-sungguhbahwa tesis yang berjudul “ Desain Pembelajaran Berbasis Bukti Menggunakan Teori APOS pada Mata Kuliah Analisis Real “ ini adalah benar-benar karya saya sendiri dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku sesuai dengan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Republik Indonesia Nomor 17 tahun 2010 tentang Pencegahan dan Penanggulangan Plagiat di Perguruan Tinggi. Apabila di kemudian hari, ada pelanggaran yang ditemukan dalam tesis ini dan/atau ada pengaduan dari pihak lain terhadap keaslian karya ini, saya bersedia menanggung sanksi yang dijatuhkan kepada saya.

Demikianlah pernyataan ini dibuat dengan sungguh-sungguhtanpa pemaksaan dari pihak manapun.

Palembang, 4 Januari 2024

Yang membuat pernyataan,



Ety Septiati

NIM 06022682226023

## **PRAKATA**

Tesis dengan judul “Desain Pembelajaran Berdasarkan teori APOS untuk Mendukung Pembelajaran Berbasis Bukti Materi Sistem Bilangan Real ” disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Magister Pendidikan (M.Pd.) pada Program Studi Magister Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sriwijaya. Dalam mewujudkan tesis ini, penulis telah mendapatkan bantuan dari berbagai pihak.

Oleh sebab itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Prof. Dr. Yusuf Hartono, M.Sc. dan Ibu Cecil Hiltrimartin, M.Si, Ph.D sebagai pembimbing atas segala bimbingan yang telah diberikan dalam penulisan tesis ini. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Dr. Hartono, M.A., selaku Dekan FKIP Unsri. Dr. Ketang Wiyono, S.Pd., dan Drs. Kodri Madang, M.Si., Ph.D., selaku Ketua dan Sekertaris Jurusan Pendidikan MIPA FKIP Unsri serta ibu Dr. Hapizah, S.Pd, M.T. selaku Koordinator Program Studi Pendidikan Matematika S-2 yang telah memberikan kemudahan dalam pengurusan administrasi selama penulisan tesis ini. Akhir kata, semoga tesis ini dapat bermanfaat untuk pembelajaran bidang studi Pendidikan Matematika dan pengembangan ilmu pengetahuan, teknologi, dan seni.

Palembang, Desember 2023

Penulis,



Ety Septiati

*Dengan rahmat Allah SWT, tesis ini kupersembahkan kepada:*

- ♥ *Mamaku tersayang yang senantiasa mendoakan, mendukung dan mengharapkan keberhasilanku setiap saat.*
- ♥ *Suamiku Rudy Noor Muktamar dan anak-anakku tercinta R. Kaleqa Naafi Bagaskoro dan R. Ruby Hafizh Abhichandra. Terima kasih banyak atas kepercayaan, dukungan dan pengertiannya.*
- ♥ *Kakak, adik serta seluruh keluarga besar H. Jamuar (alm) atas doa dan dukungan yang diberikan.*
- ♥ *Keluarga besar Soeharto HK (alm) – Yogyakarta, terimakasih atas doa dan dukungannya.*

*“Sesungguhnya... Allah maha mengetahui apa yang terbaik bagi hambaNya... give what you need, not what you want. Tugasmu hanyalah menerima dengan ikhlas, menghadapi dan menjalaninya dengan sepenuh hati”*

## RIWAYAT HIDUP



**Ety Septiati.** Lahir di Plaju, 20 September 1978, anak kedua dari 3 bersaudara, dari pasangan Bapak Soedarwin (alm) dan Ibu Hj. Noviarni, SE. Menikah dengan Dr. Rudy Noor Muktamar, M.Pd dan dikarunia 2 putera, R. Kaleqa Naafi Bagaskoro dan R. Ruby Hafizh Abhichandra. Penulis menamatkan Sekolah Dasar di SD Yaktapena 9 Plaju pada tahun 1991, SMP YKPP 1 Plaju pada tahun 1994 dan SMA YKPP 1 Plaju pada tahun 1997. Pendidikan Tinggi Program Strata-1 diselesaikan dari Jurusan Matematika Institut Teknologi Bandung pada tahun 2002, dilanjutkan dengan Program Strata 2 jurusan Teknik Manajemen Industri ITB pada tahun 2005. Pada tahun 2022 peneliti menempuh kembali pendidikan Strata dua (S2) di Program Magister Pendidikan Matematika Universitas Sriwijaya.

## DAFTAR ISI

HALAMAN PENGESAHAN.....	ii
HALAMAN PERNYATAAN .....	iv
PRAKATA.....	v
HALAMAN PERSEMBAHAN.....	vi
RIWAYAT HIDUP .....	vii
DAFTAR ISI.....	viii
DAFTAR TABEL.....	x
DAFTAR GAMBAR .....	xi
DAFTAR LAMPIRAN.....	xii
ABSTRAK .....	xiii
ABSTRACT.....	xiv
BAB I PENDAHULUAN .....	1
1.1. Latar Belakang .....	1
1.2. Rumusan Masalah .....	4
1.3. Tujuan.....	4
1.4. Manfaat.....	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....	5
2.1. Bukti .....	5
2.2. Pembuktian.....	7
2.3. Pembelajaran Berbasis Bukti.....	9
2.4. Teori APOS .....	11
2.4.1 Pengertian .....	11
2.4.2 Contoh Implementasi.....	13
2.5. Lintasan Belajar ( <i>Learning Trajectory</i> ) .....	16
2.6. Materi Sistem Bilangan Real.....	17
2.7. Hasil Penelitian Terdahulu yang Relevan .....	21
BAB III METODOLOGI PENELITIAN.....	23



3.1	Metode Penelitian.....	23
3.2	Prosedur Penelitian.....	23
3.3	Teknik Pengumpulan Data .....	25
3.4	Teknik Analisis Data .....	27
3.5	Subjek, Waktu dan Tempat Penelitian .....	27
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN .....		28
4.1	Hasil Penelitian.....	28
4.1.1	Desain Pendahuluan ( <i>Preliminary Design</i> ).....	28
4.1.2	Desain Percobaan ( <i>Design Experiment</i> ).....	34
4.1.3	<i>Restropective Analysis</i> .....	54
4.2	Pembahasan .....	57
BAB V SIMPULAN DAN SARAN .....		61
5.1	Simpulan.....	61
5.2	Saran .....	61
DAFTAR PUSTAKA .....		62
LAMPIRAN.....		67

## DAFTAR TABEL

Tabel 1. Sub-CPMK dan Indikator Materi.....	28
Tabel 2. Rancangan Implementasi Teori APOS pada Materi Nilai Mutlak Bilangan Real.....	32
Tabel 3. Rancangan Implementasi Teori APOS pada Materi Sifat Kelengkapan Bilangan Real.....	32
Tabel 4. Saran Perbaikan dari Pakar .....	33

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 1. Struktur Mental dan Mekanisme Konstruksi Pengetahuan Matematis	13
Gambar 2. Ilustrasi Konsep Batas Atas, Batas Bawah, Supremum dan Infimum	21
Gambar 3. Alur Penelitian.....	26
Gambar 4. Soal Tes Kemampuan Awal.....	29
Gambar 5. HLT Nilai Mutlak Bilangan Real.....	30
Gambar 6. HLT Sifat Kelengkapan Bilangan Real.....	31
Gambar 7. Aksi dan Proses pada Materi Nilai Mutlak Bilangan Real <i>Pilot Experiment</i> .....	35
Gambar 8. Aksi dan Proses Aktivitas 2 Pilot Experiment .....	36
Gambar 9. Objek pada materi Nilai Mutlak Bilangan Real Pilot Experiment.....	37
Gambar 10. Aksi dan Proses Sifat kelengkapan Biangan Real pada Pilot experiment.....	38
Gambar 11. Skema pada Materi Sifat Kelengkapan Bilangan Real <i>Pilot Experiment</i> .....	39
Gambar 12. Aksi pada Aktivitas 1 .....	41
Gambar 13. Proses pada Aktivitas 1 .....	41
Gambar 14. Proses pada Aktivitas 2 .....	43
Gambar 15. Objek pada Aktivitas 1 .....	44
Gambar 16. Objek pada Aktivitas 2.....	45
Gambar 17. Skema oleh Subjek 1 pada Nomor 1 .....	46
Gambar 18. Skema pada Nomor 1 .....	47
Gambar 19. Skema pada Nomor 2 .....	48
Gambar 20. Langkah Aksi pada Aktivitas 1 .....	49
Gambar 21. Langkah Proses Aktivitas 1.....	50
Gambar 22. Langkah Proses pada Aktivitas 1 dan Aktivitas 2.....	50
Gambar 23. Objek pada Aktivitas 1 .....	51
Gambar 24. Objek pada Aktivitas 2.....	52
Gambar 25. Soal Latihan nomor 1 .....	53
Gambar 26. Soal Latihan Nomor 2 .....	54

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. SK Pembimbing.....	67
Lampiran 2. Kartu Bimbingan .....	69
Lampiran 3. Surat Izin Penelitian.....	72
Lampiran 4. Surat Keterangan Penelitian .....	73
Lampiran 5. Surat Keterangan Produk Penelitian.....	74
Lampiran 6. RPS Mata Kuliah .....	75
Lampiran 7 Sampel Jawaban Tes Awal .....	81
Lampiran 8. Kisi-Kisi LAM Nilai Mutlak Bilangan Real .....	83
Lampiran 9. Kisi-Kisi LAM Sifat Kelengkapan Bilangan Real .....	90
Lampiran 10. Validasi Pakar.....	101
Lampiran 11. Sampel Jawaban Pilot Experiment .....	121
Lampiran 12. Sampel Jawaban Teaching Experiment .....	133
Lampiran 13. Lembar Observasi.....	148
Lampiran 14. Lembar Wawancara .....	150
Lampiran 15. Dokumentasi Penelitian.....	172
Lampiran 16. Publikasi Penelitian .....	174
Lampiran 17. Surat Pencatatan HKI .....	175
Lampiran 18. Undangan Ujian Tesis .....	177
Lampiran 19. SK Ujian Tesis.....	178
Lampiran 20. Dokumentasi Ujian Tesis.....	180
Lampiran 21. Lembar Revisi Tesis .....	181
Lampiran 22. Hasil Cek Plagiarisme .....	184

## ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk menghasilkan serangkaian aktivitas berdasarkan teori APOS yang dapat mendukung pembelajaran berbasis bukti pada mata kuliah Analisis Real, khususnya materi Nilai Mutlak Bilangan Real dan Sifat Kelengkapan Bilangan Real. Metode penelitian yang digunakan yaitu *design research* tipe *validation study* dan melibatkan 22 orang mahasiswa semester 4 program studi Pendidikan Matematika Universitas PGRI Palembang. Penelitian dilakukan melalui 3 tahapan, yaitu *preliminary design*, *design experiment* dan *restropective analysis*. Pengumpulan data dilakukan dengan teknik observasi, dokumentasi, wawancara dan lembar aktivitas. Data penelitian dianalisis secara kualitatif, yaitu membandingkan hasil pengamatan selama proses pembelajaran dengan HLT yang telah didesain. Adapun rangkaian aktivitas berdasarkan teori APOS yang dihasilkan, yaitu pemahaman terhadap definisi, teorema dan konsep dasar sebagai bentuk Aksi, penggunaan sifat/ teorema dalam melakukan pembuktian sebagai bentuk Proses, pembuktian formal sebagai bentuk dari Objek dan penyelesaian masalah dalam soal-soal pembuktian sebagai wujud dari Skema. Dapat disimpulkan bahwa aktivitas yang dirancang dapat mendukung pembelajaran berbasis bukti, khususnya pada materi sistem bilangan real. Disarankan untuk mengulang aktivitas yang dapat mendukung terjadinya proses enkapsulasi, sehingga konstruksi mental berdasarkan teori APOS dapat terbentuk dengan baik.

Kata-kata kunci: *Analisis Real, lintasan belajar, pembelajaran berbasis bukti, teori APOS*

## ABSTRACT

This study aims to produce a series of activities based on APOS theory that can support proof-based learning in Real Analysis courses, especially the material of Absolute Value of Real Numbers and Completeness Properties of Real Numbers. The research method was Design Research type validation study and involved 22 4th semester students of Mathematics Education study program of Universitas PGRI Palembang. The research was conducted through 3 stages, namely preliminary design, design experiment and restropective analysis. Data collection was carried out using observation techniques, documentation, interviews and activity sheets. The research data were analyzed qualitatively, comparing the results of observations during the learning process with the HLT that had been designed. The series of activities based on APOS theory produced, namely understanding of definitions, theorems and basic concepts as a form of Action, the use of properties / theorems in conducting proofs as a form of Process, formal proof as a form of Object and problem solving in proof problems as a form of Scheme. It can be concluded that the designed activities can support proof-based learning, especially on real number system material. It is recommended to repeat activities that can support the encapsulation process, so that mental construction based on APOS theory can be formed properly.

*Key words: Real analysis, learning trajectories, proof-based learning, APOS theory*

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang

Pembelajaran matematika di perguruan tinggi membutuhkan kemampuan kognitif tingkat tinggi, seperti kemampuan analisis, sintesis, dan evaluasi. Mahasiswa dituntut mampu untuk bernalar dengan baik dan mengekspresikan hasil penerapannya secara tertulis, sistematis dan ketat (Qomariyah & Rosyidah, 2022). Salah satu matakuliah yang kental dengan muatan tersebut adalah Analisis Real. Menurut Kartika dan Yazidah (2019), Analisis Real merupakan dasar untuk berfikir secara formal dalam matematika, yaitu berfikir secara deduktif aksiomatik. Oleh karena itu, Analisis Real menjadi alat yang esensial, baik di dalam berbagai cabang dari matematika maupun bidang ilmu-ilmu lain, seperti fisika, kimia, dan ekonomi (Bartle & E.Sherbert, 2011).

Pada kenyataannya banyak mahasiswa mengalami kesulitan dalam mata kuliah Analisis Real (Ah, 2016). Mahasiswa menghadapi tantangan tersendiri dalam memahami definisi formal sampai pembuktian dan karakteristiknya (Darmadi, 2009). Beberapa penelitian telah dilakukan untuk mengetahui kesulitan yang dialami mahasiswa dalam perkuliahan Analisis Real, diantaranya yaitu penelitian yang dilakukan oleh Wahyuni (2017), Siregar (2018), Bhupal (2021) dan Isnani, S.B.Waluya, Rochmad, Dwijantoe, & Asihf (2021). Penelitian Mutaqin, Syamsuri, Hendrayana (2022) yang berfokus pada materi sistem bilangan real dan barisan bilangan real menemukan hasil bahwa ada delapan jenis kesulitan kognitif yang dialami mahasiswa ketika berhadapan dengan masalah pembuktian matematis, yaitu: a) Mahasiswa tidak mengetahui langkah awal dalam melakukan pembuktian; b) Mahasiswa tidak mengetahui makna definisi dan aksioma serta tidak mampu membedakan keduanya; c) Mahasiswa kurang memiliki kemampuan untuk melakukan manipulasi bentuk aljabar, d) Mahasiswa tidak mampu mengintegrasikan definisi dan/atau teorema/lemma dalam struktur pembuktian; e) Mahasiswa tidak memiliki gambaran tentang memilih cara pembuktian suatu pernyataan matematis; f)

Mahasiswa tidak mampu mengaitkan masalah yang akan dibuktikan dengan teorema yang diperlukan untuk pembuktian, g) Mahasiswa kurang memiliki naluri atau insting yang cukup untuk mengerjakan soal pembuktian, dan h) Mahasiswa tidak dapat membuat contoh dan contoh penyangkal (*counterexample*) sendiri.

Menurut Reid (2001) pembuktian pada dasarnya adalah bagaimana memperoleh hasil penting dari suatu persoalan matematika dengan menggunakan serangkaian deduksi dari asumsi (premis atau aksioma) dan hasil-hasil matematika yang sudah ada (lemma atau teorema). Dalam proses pembuktian ini, mahasiswa belajar berpikir kritis dan sistematis, menata nalar, dan berkreasi, yang termasuk salah satu kemampuan berpikir tingkat tinggi (Yohanes, 2022). Oleh karena itu, pembuktian adalah bagian penting dari kurikulum matematika untuk menunjukkan pemahaman matematis (Hanna, 2000). Pembuktian harus menjadi bagian dari pengalaman matematika calon guru dalam pendidikan guru, karena pengetahuan dan keyakinan guru tentang pembuktian membentuk kesiapan, kemauan dan kapasitas mereka untuk mendukung keterlibatan siswa dalam pembuktian (Laamena, Nusantara, Edy, & Muksar, 2018). Menurut Dickersen (2008), ada beberapa alasan mengapa perlu diberikan pengajaran pembuktian yaitu (1) bukti adalah bagian yang terintegrasi dalam matematika, (2) untuk verifikasi dan penemuan fakta, (3) untuk mengembangkan kemampuan berpikir logis dan kritis mahasiswa dan (4) mempercepat dan meningkatkan pemahaman matematik mahasiswa. Menurut Prinsip dan Standar Matematika Sekolah, salah satu dari lima kemampuan siswa adalah argumentasi dan pembuktian. Kemampuan lainnya adalah pemecahan masalah, penalaran, komunikasi, koneksi, dan representasi (NCTM, 2000).

Salah satu tantangan terbesar bagi guru matematika dalam konteks bukti adalah meningkatkan peran mereka di dalam kelas dengan menemukan cara yang lebih efisien untuk menggunakannya untuk meningkatkan pemahaman siswa tentang matematika (Hanna, 1995). Kesulitan dalam membuktikan matematika menunjukkan bahwa perlu mengembangkan urutan pembelajaran dalam pembuktian matematika. Urutan tersebut harus dikaitkan dengan tingkat kesulitan pembuktian dan karakteristik pernyataan yang dibuktikan. Urutan



sebagai lintasan belajar terdiri dari kegiatan dan konsep-konsep yang berkaitan dengan topik dalam matematika. Hasil penelitian menunjukkan bahwa terdapat dua tipe proses berpikir dalam kegiatan pembuktian matematika, yaitu: tipe proses berpikir deduktif-holistik dan induktif-parsial. Beberapa kegiatan pembelajaran yang sesuai harus dirancang untuk mendukung pembangunan kategori mental ini (Syamsuri & Marethi, 2018). Dengan melakukan aktivitas, siswa memiliki kesempatan untuk memahami konsep dan melihat bagaimana materi yang dipelajari berkaitan dengan kehidupan sehari-hari. Keterlibatan siswa secara aktif dalam proses pembelajaran akan berdampak pada peningkatan pertumbuhan kognitif alami mereka (Slavin, 2008). Salah satu teori yang dapat mengkonstruksi mental adalah teori APOS (*Action. Process. Object. Schema*).

Pengetahuan matematika, menurut Dubinsky & McDonald (2001), terdiri dari kecenderungan seseorang untuk menghadapi situasi masalah matematika yang dirasakan dengan membangun mental, proses, dan objek serta mengorganisasikannya dalam skema yang memungkinkan mereka memahami situasi dan memecahkan masalah. Teori APOS berfokus pada model-model tentang apa yang mungkin terjadi di pikiran orang ketika mereka mencoba mempelajari konsep matematika. Model-model ini digunakan untuk membuat materi instruksional dan/atau untuk mengevaluasi keberhasilan dan kegagalan siswa saat menghadapi situasi masalah matematika. Hasil penelitian menunjukkan bahwa penerapan teori APOS pada mata kuliah Analisis Real memberikan hasil belajar yang lebih baik (Erawati, 2018), tingkat motivasi belajar mahasiswa dan persepsi mahasiswa terhadap kualitas pengajaran dosen berada pada kategori sangat baik (Erawati, 2018). Namun, berdasarkan hasil penelitian Melhuish et al (2022), secara keseluruhan hanya ada sedikit penelitian yang mencoba menghubungkan aktivitas instruksi di kelas dan pembelajaran siswa.

Dengan demikian, perlu dilakukan rancangan terhadap aktivitas pembelajaran berdasarkan teori APOS yang dapat mendukung pembelajaran berbasis bukti, khususnya pada materi Analisis Real.

## **1.2. Rumusan Masalah**

Menilik apa yang telah diuraikan pada latar belakang, permasalahan yang dapat dirumuskan adalah: Apakah aktivitas berdasarkan teori APOS dapat mendukung pembelajaran berbasis bukti, khususnya pada materi sistem bilangan real?

## **1.3. Tujuan**

Tujuan penelitian ini adalah menghasilkan serangkaian aktivitas pembelajaran berdasarkan teori APOS yang dapat mendukung pembelajaran berbasis bukti pada mata kuliah Analisis Real materi sistem bilangan real.

## **1.4. Manfaat**

Adapun manfaat yang diharapkan melalui penelitian ini adalah:

1. Bagi pengampu mata kuliah Analisis Real, dapat menjadi referensi atau sumber acuan dalam menerapkan pembelajaran berbasis bukti, terutama pada perkuliahan Analisis Real.
2. Bagi para peneliti, menjadi referensi untuk penelitian selanjutnya.

## DAFTAR PUSTAKA

- Ah, N. I. (2016). Pengembangan bahan Ajar Mata Kuliah Analisis Real Berbasis Pembuktian Pada Semester V Unmuh Jember . *JurnalGammath, Volume I Nomor 2, 1(2)*, 26-32.
- Akker, J. v., Grevemeijer, K., McKenney, S., & Nieveen, N. (2006). *Educational Design Research*. London & Newyork: Routledge.
- Arnawa, I. M., Yerizon, & Nita, S. (2019). Improvement Students' Level of Proof Ability in Abstract Algebra Trough APOS Theory Approach. *International Journal of Scientific and Technology Research, 8(07)*, 128-131.
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Fuentes, S. R., & Weller, M. T. (2014). *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York Heidelberg Dordrecht London: Springer.
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer . doi:10.1007/978-1-4614-7966-6
- Bartle, R. G., & E.Sherbert, R. (2011). *Intriduction to Real Analysis*. Urbana-Champaign: John Wiley & Sons, Inc.
- Bhupal, R. S. (2021). Ability of Reasoning and Learning Real Analysis. *International Journal of Multidiciplinary Educational Research, 10(3(7))*, 1-5. Retrieved from www.ijmer.in
- Borji, V., Alamolhodaie, H., & Radmehr, F. (2018). Application of the APOS-ACE Theory to improve Students' Graphical Understanding of Derivative. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14(7)*, 2947-2967.
- Chamberlain, D., & Vidakovic, D. (2021). Cognitive trajectory of proof by contradiction for transition-to-proof students. *The Journal of Mathematical Behavior, 62(100849)*, 1-15. doi:https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100849
- Darmadi. (2009). Spektrum Hasil Belajar Analisis Real Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika IKIP PGRI Madiun. *Seminar Nasional Matematika*

- dan Pendidikan Matematika* (pp. 247-251). Yogyakarta: Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY.
- Dickerson, D. S. (2008). *High school mathematics teachers' understandings of the purposes of mathematical proof*. Teaching and Leadership - Dissertations . Retrieved from [https://surface.syr.edu/tl\\_etd/11/](https://surface.syr.edu/tl_etd/11/)
- Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (pp. 275–282). Springer.
- Eerde, D. v. (2013). Design Research: Looking into the Heart of Mathematis Education. *1st SEA-DR PROCEEDING* (pp. 1-11). Palembang: Sriwijaya University.
- Erawati, N. K. (2018). Kualitas Pengajaran Dosen dan Motivasi Belajar Mahasiswa dengan Siklus ACE APOS. *Emasains, VII* (2).
- Erawati, N. K. (2018). Penerapan Siklus ACE APOS pada Mata Kuliah Analisis Riil. *Emasains, VII*(1), 22-28.
- Gravemeijer, K. (2004). Local Instruction Theories as Means of Support for Teachers in Reform Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 105-128.
- Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of Proof. Retrieved from <https://flm-journal.org/Articles/7679867298F4CBEABE82D0ABEB5EC.pdf>
- Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 5-23.
- Hartati, S. J. (2014). Design of Learning Model of Logic and Algorithms Based on APOS Theory. *International Journal of Evaluation and Research in Education (IJERE), 3*(2), 109~118.
- Hernadi, J. (2008). Metode Pembuktian dalam Matematika. *Jurnal Pendidikan Matematika* , 2(1), 1-13.
- <http://www.edc.org/copyright.html>. (n.d.). Retrieved March 1, 2023, from <https://www2.edc.org/makingmath/handbook/Teacher/Proof/Proof.asp>
- Isnani, S.B.Waluya, Rochmad, Dwijantoe, & Asihf, T. (2021). Analisis Miskonsepsi Mahasiswa pada Matakuliah Analisis Real. *PRISMA* :

- Prosiding Seminar Nasional Matematika. 4*, pp. 235-238. Semarang: UNNES.
- J.Knuth, E. (2002). Secondary School Mathematics Teachers' Conceptions of Proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5).
- Juandi, D. (2008). Retrieved Maret 2023, from <https://adoc.pub/pembuktian-penalaran-dan-komunikasi-matematik-oleh-dadang-ju.html>
- Kartika, E. D., & Yazidah, N. I. (2019). Analisis Kemampuan Pembuktian Matematis pada Mata Kuliah Analisis Real Berdasarkan Adversity Quotient. *Prima: Jurnal Pendidikan Matematika*, 3(2), 152-157.
- Laamena, C. M., Nusantara, T., E. B., & Muksar, M. (2018). How do the Undergraduate Students Use an Example in Mathematical Proof Construction: A Study based on Argumentation and Proving Activity. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 13(3), 185-198. doi:<https://doi.org/10.12973/iejme/3836>
- Mutaqin, A., Syamsuri, & Hendrayana, A. (2022). Analisis kesulitan mahasiswa dalam pembuktian matematis pada mata kuliah analisis real. *TIRTAMATH: Jurnal Penelitian dan Pengajaran Matematika*, 4(1), 1-11. Retrieved from <https://jurnal.untirta.ac.id/index.php/Tirtamath/index>
- Narain, P., & Stylianides, A. J. (2020). Demystifying proofs through structured interaction: A case study of one. *The Journal of Educational Research in Mathematics*. doi:<https://doi.org/10.17863/CAM.54180>
- NCTM. (2000). Standards for school mathematics. Retrieved from [https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards\\_and\\_Positions/PSSM\\_ExecutiveSummary.pdf](https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/PSSM_ExecutiveSummary.pdf)
- Nisa, L., Waluya, S., Kartono, & Mariani, S. (2020). Implementation of APOS theory to encourage reflective. *6th International Conference on Mathematics, Science, and Education (ICMSE 2019)*, 1567, pp. 1-6. doi:10.1088/1742-6596/1567/3/032014
- Qomariyah, S., & Rosyidah, U. (2022). Kesulitan Belajar Mahasiswa Pendidikan Matematika Pada Mata Kuliah Analisis Real. *Jurnal Educatio*, 1(2), 396-400.
- Reid, D. (2001, July). Proof, Proofs, Proving and Probing: Research Related to Poof. *Psychology of Mathematics Education* . North America. Retrieved April 1, 2023, from <https://www.researchgate.net/publication/233413684>

- Reid, D. (2002). *Proof, Proofs, Proving and Probing: Research Related to Proof. Acadia University.*
- Reid, D., & Vargas, E. V. (2017). Proof-based teaching as a basis for understanding why. *proceedings of CERME 10*, (pp. 235-242).
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114-145.
- Siregar, N. f. (2018). Analisis Kesulitan Mahasiswa dalam Menyelesaikan Soal Bilangan Real. *Logaritma*, 6(1), 64-74.
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321.
- Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2022). Introducing students and prospective teachers to the notion of. *Journal of Mathematical Behavior*, 66(100957), 1-21. doi:<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100957>
- Subanji. (2017). Berpikir Matematis dalam Mengonstruksi Konsep Matematika: sebuah Analisis Secara Teori dan Praktis. *Seminar Nasional Pendidikan Matematika*. Malang: Pascasarjana Universitas Negeri Malang.
- Sukirwan, Fitri, P. R., Warsito, & Saleh, H. (2022). Desain Pembelajaran Himpunan Melalui Perancangan Hypothetical Learning Trajectory Menggunakan Pendekatan Matematika Realistik. *Journal of Authentic Research on Mathematics Education (JARME)*, 4(1), 79 - 97. doi:<https://doi.org/10.37058/jarme.v4i1.3675>
- Supriadi, A. (2021). Pemahaman Mahasiswa Tentang Integral Lipta Dua Berdasarkan Teori APOS. *Indiktika: Jurnal Inovasi Pendidikan Matematika*, 4(1), 55-63. doi:<https://doi.org/10.31851/indiktika.v4i1.6606>
- Syamsuri, & Marethi, I. (2018). APOS Anlysis on Cognitive Process in Mathematical Proving Activities. *International Journal on Teaching Learning mathematics*, 1(1), 1-12.
- Syamsuri, Purwanto, Subanji, & Irawati, S. (2017). Using APOS Theory Framework: Why Did Students Unable to Construct a Formal Proof? *International Journal on Emerging Mathematics Education (IJEME)*, 1(2), 135-146. doi:<http://dx.doi.org/10.12928/ijeme.v1i2.5659>
- Takaendengan, B. R., Anwar, A., Takaendengan, W., & Kobandaha, P. E. (2022). Identifikasi Kesalahan Jawaban Mahasiswa pada Mata Kuliah Analisis Real

Berdasarkan Newmann's Error Analysis. *EULER: Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi*, 10(2), 235-243.

Umam, K., & Susandi, A. D. (2022, March). Critical thinking skills: Error identifications on students' with APOS theory. *International Journal of Evaluation and Research in Education (IJERE)*, 11(1), 182~192. doi:10.11591/ijere.v11i1.21171

Wahyuni, M. (2017). Analisis Problematika Perkuliahan Analisis Real . *Journal Cendekia: Jurnal Pendidikan Matematika*, 1(1), 135-149.

Wijaya, A., Elmaini, & Doorman, M. (2021). A learning Trajectory for Probability: A Case of Game-Based Learning. *Journal on Mathematics Education*, 12(1), 1-16.

Yohanes, R. S. (2022). Proses Berpikir Mahasiswa dalam Mengkonstruksi Pembuktian Matematika. *PRISMA: Prosiding Seminar Nasional Matematika*, 5, 185-194.

Zhang D, Qi C. Reasoning and proof in eighth-grade mathematics textbooks in China. *International Journal of Educational Research*. 2019; 98: 77-90.