



# Relasi Rekursi dan Ortogonalitas Polinom Hermite pada Fungsi Gelombang Osilator Harmonik Kuantum dalam Studi Kasus Ketidakpastian Heisenberg

Yuli Setianingsih<sup>1</sup>, Hamdi Akhsan<sup>2</sup>, Nely Andriani<sup>3</sup>

Pendidikan Fisika, FKIP Universitas Sriwijaya alamat: Jl Palembang-Prabumulih Km.32  
Inderalaya OI 30622

E-mail: [yulisetianingsih@gmail.com](mailto:yulisetianingsih@gmail.com), [hamdiakhsan@yahoo.co.id](mailto:hamdiakhsan@yahoo.co.id), [nelyandriani@gmail.com](mailto:nelyandriani@gmail.com)

**Abstrak:** Osilator harmonik terjadi jika suatu sistem jenis tertentu bergetar di sekitar konfigurasi kesetimbangannya. Secara kuantum, penyelesaian fungsi gelombang osilator harmonik dilakukan dengan mentransformasikan persamaan Schrödinger tak bergantung waktu dalam satu dimensi ke dalam bentuk persamaan diferensial Hermite untuk batas asimtotik dengan memperhatikan syarat ternormalisasinya fungsi gelombang. Dengan mengganti fungsi Hermite menjadi polinomial Hermite maka fungsi gelombang yang menggambarkan keadaan sistem tersebut dapat diketahui sehingga dapat ditentukan sifat statistik seperti nilai ekspektasi yang merupakan prinsip dari ketidakpastian Heisenberg. Jika biasanya dalam penentuan nilai ekspektasi setiap orde pada fungsi Hermite langsung dimasukkan nilainya, maka kali ini tetap dalam fungsi Hermite tanpa harus memasukkan ordenya sehingga penyelesaiannya dapat menggunakan relasi rekursi dan ortogonalitas polinom Hermite. Nilai ekspektasi dan prinsip ketidakpastian Heisenberg yang dihasilkan dari kedua metode akan memiliki hasil akhir yang sama.

*Kata kunci : persamaan Schrödinger, osilator harmonik, polinomial Hermite, relasi rekursi, ortogonalitas polinom Hermite, ketidakpastian Heisenberg*

## 1. Pendahuluan

Ilmu pengetahuan khususnya fisika setiap waktunya dapat mengalami perubahan baik itu dengan adanya teori baru maupun revisi dari teori yang sudah ada. Adanya revisi tersebut menandakan teori yang sebelumnya memiliki beberapa kelemahan yang harus diperbaiki oleh teori selanjutnya. Salah satu contoh teori fisika yang memiliki kelemahan adalah mekanika klasik. Mekanika klasik tidak mampu menjelaskan banyaknya gejala-gejala fisika yang bersifat mikroskopis dan bergerak dengan kecepatan yang mendekati kecepatan cahaya. Oleh karena itu lahirlah suatu teori baru yaitu mekanika kuantum pada awal abad 20. Lahirnya mekanika kuantum bukan untuk menghapus teori dan hukum sebelumnya, melainkan untuk merevisi dan menambal pandangan khususnya dalam dunia mikroskopis. Mekanika kuantum sangat berguna untuk menjelaskan perilaku atom dan partikel subatomik seperti proton, neutron dan elektron yang tidak mematuhi hukum-hukum fisika klasik.

Keadaan sebuah sistem dapat dijelaskan dengan fungsi gelombang kompleks dalam mekanika kuantum. Fungsi gelombang dari suatu sistem partikel dapat diselesaikan oleh suatu persamaan diferensial orde dua yang disebut dengan Persamaan Schrödinger, mirip seperti hukum kedua Newton pada mekanika klasik. Persamaan Schrödinger merupakan fungsi gelombang yang digunakan untuk memberikan informasi tentang perilaku gelombang dari suatu partikel. Dengan mendefinisikan persamaan ini sesuai syarat batas yang diberikan,



maka fungsi gelombang yang menggambarkan keadaan sistem tersebut dapat diketahui sehingga dapat ditentukan beberapa sifat statistik dari sistem tersebut (Pandiangan, 2005: 26).

Salah satu materi mekanika kuantum yang dipelajari adalah osilator harmonik. Persoalan osilator harmonik sering dijadikan model pendekatan dalam banyak kasus fisika dan salah satu sistem penting untuk dipelajari secara rinci. Jika pada mekanika klasik, osilator harmonik dapat diselesaikan dengan menggunakan hubungan Hukum Hooke dan Hukum II Newton, tetapi secara kuantum suatu sistem partikel yang berosilasi harmonik dapat diselesaikan dengan mentransformasikan persamaan Schrödinger tak bergantung waktu dalam satu dimensi ke dalam bentuk persamaan diferensial Hermite untuk batas asimtotik dengan memperhatikan syarat ternormalisasinya fungsi gelombang. Untuk itu diperlukan polinomial Hermite (deret berhingga) sebagai ganti dari fungsi Hermite (deret tak hingga).

Sifat statistik dari sistem osilator harmonik kuantum yang dapat dicari dengan konsep nilai ekspektasi merupakan prinsip dari ketidakpastian Heisenberg. Biasanya dalam menentukan nilai ekspektasi dapat ditentukan dengan menggantikan nilai polinomial Hermite sesuai dengan orde gelombangnya. Namun, kelemahan dari metode ini adalah sebagian mahasiswa tidak mampu menghafal polinomial Hermite tersebut dan metode ini akan memberikan penyelesaian yang cukup panjang dan rumit jika orde gelombangnya semakin besar. Berdasarkan permasalahan ini, maka penulis akan memberikan inovasi baru dalam menentukan nilai ekspektasi yaitu dengan tetap mempertahankan polinom Hermite tersebut dan penyelesaiannya dapat menggunakan relasi rekursi dan ortogonalitas polinom Hermite. Sehingga dengan orde berapapun, nilai ekspektasi akan lebih cepat ditemukan dan penyelesaiannya pun akan lebih sederhana. Apabila kedua metode tersebut dibandingkan, maka nilai ekspektasi dan prinsip ketidakpastian Heisenberg yang dihasilkan dari kedua metode nantinya akan memiliki hasil akhir yang sama.

## 2. Persamaan Schrödinger Tak Bergantung Waktu

Kasus mekanika kuantum, persamaan utama yang harus diselesaikan adalah suatu persamaan diferensial orde dua yang dikenal sebagai persamaan Schrödinger. Persamaan Schrödinger dapat diterapkan dalam berbagai persoalan fisika kuantum dengan memberikan informasi terhadap fungsi gelombang dari suatu partikel.

Persamaan Schrödinger yang diterapkan pada sebuah partikel bermassa  $m$  yang bergerak di sepanjang sumbu  $x$  dan berinteraksi dengan lingkungannya melalui sebuah fungsi energi potensial  $V(x)$  (Serway, 2010: 342).

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + V\varphi = E\varphi. \quad (1)$$

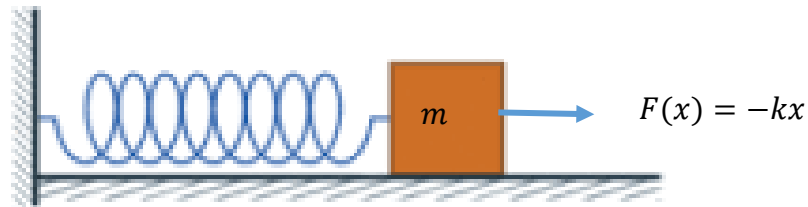
Oleh karena partikel hanya berubah terhadap kedudukan dan tidak bergantung waktu secara eksplisit maka persamaan (1) disebut persamaan Schrödinger tak bergantung waktu satu dimensi.

## 3. Osilator Harmonik

Osilator harmonik terjadi jika suatu sistem jenis tertentu bergetar di sekitar konfigurasi kesetimbangannya. Osilator harmonik terjadi apabila terdapat gaya pemulih yang bertindak untuk mengembalikan sistem ke konfigurasi kesetimbangannya ketika terganggu



dan inersia massa yang bersangkutan mengakibatkan benda melampaui kedudukan setimbangnya, sehingga sistem berosilasi terus-menerus jika tidak ada energi yang hilang (Beiser, 2003: 187). Pada mekanika klasik, salah satu bentuk osilator harmonik adalah sistem pegas massa, yaitu suatu beban bermassa  $m$  yang terikat pada salah satu ujung pegas dengan konstanta pegas  $k$  (Griffiths, 2005: 40).



Gambar 1. Osilator harmonik suatu partikel bermassa  $m$

Kasus khusus dari gerak harmonik pada Gambar 1, gaya pemulih  $F(x)$  pada partikel bermassa  $m$  sebanding dengan partikel perpindahan  $x$  dari posisi keseimbangan dan dalam arah yang berlawanan (Beiser, 2003: 187). Sehingga,

$$F(x) = -kx. \quad (2)$$

Hubungan ini disebut dengan Hukum Hooke. Berdasarkan Hukum II Newton,  $F = ma$ , maka diperoleh

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (3)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (4)$$

jika rasio dari  $\frac{k}{m} = \omega^2$  (frekuensi sudut osilasi), maka persamaan (4) berubah menjadi

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0. \quad (5)$$

Persamaan (5) adalah persamaan diferensial orde dua dengan akar-akar bilangan kompleks yang berlainan, maka solusinya dapat dituliskan (Griffiths, 2005: 40) dalam bentuk  $x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$  dan energi potensial sistem adalah  $V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ .

Tentunya, tak ada yang sesempurna seperti pada kasus osilator harmonik sederhana ini. Jika pegas dibentangkan terlalu panjang, bisa-bisa pegas tersebut akan berhenti bergetar karena sudah melewati titik elastisitasnya dan juga hukum Hooke tidak akan berlaku untuk kasus yang demikian. Tetapi praktisnya, potensial dapat didekati dengan fungsi parabola, itulah sebabnya syarat batas penyelesaian gelombang osilator harmonik nantinya adalah dari  $-\infty$  sampai  $\infty$ . Dalam mekanika kuantum, fungsi gelombang dari osilator harmonik diperoleh dengan memecahkan persamaan Schrödinger dengan potensial  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ .

Oleh karena  $V(x)$  hanya bergantung kedudukan dan tidak bergantung waktu, maka dapat menggunakan persamaan Schrödinger tak bergantung waktu bentuk satu dimensi (Serway, 2010: 342) yaitu

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + V\varphi = E\varphi \quad (6)$$

substitusi  $V$  ke persamaan (8), menghasilkan



$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \varphi = E\varphi. \quad (7)$$

Dengan mengalikan  $-\frac{2m}{\hbar^2}$  pada persamaan (9), maka persamaan menjadi

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \left( \frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m^2\omega^2 x^2}{\hbar^2} \right) \varphi = 0. \quad (8)$$

Jika dimisalkan  $y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$  dan  $\varepsilon = \frac{2E}{\hbar\omega}$ , maka diperoleh operator diferensial (perubahan fungsi bergantung x ke fungsi bergantung y) sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} &= \frac{dy}{dx} \frac{d}{dy} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{d}{dy} \\ \frac{d^2\varphi}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right) = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{d}{dy} \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{d\varphi}{dy} \right) = \frac{m\omega}{\hbar} \frac{d^2\varphi}{dy^2} \end{aligned} \quad (9)$$

apabila persamaan (9) disubstitusikan ke persamaan (8), maka persamaannya menjadi

$$\frac{m\omega}{\hbar} \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \left( \frac{m\omega}{\hbar} \varepsilon - \frac{m\omega}{\hbar} y^2 \right) \varphi = 0$$

setelah disederhanakan, persamaan Schrödingernya menjadi

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} + (\varepsilon - y^2)\varphi = 0. \quad (10)$$

Jika persamaan gelombangnya berbentuk  $\varphi = \varphi(y) = h(y)e^{-y^2/2}$  (Gasiorowicz, 2003: 86) maka diperoleh turunannya terhadap y adalah sebagai berikut

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d}{dy} (h \cdot e^{-y^2/2}) = \frac{dh}{dy} e^{-y^2/2} + h \frac{d}{dy} (e^{-y^2/2}) = \frac{dh}{dy} e^{-y^2/2} - h \cdot ye^{-y^2/2}$$

dan turunan keduanya

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} = \frac{d^2h}{dy^2} e^{-y^2/2} - 2 \frac{dh}{dy} ye^{-y^2/2} + (y^2 - 1)he^{-y^2/2} \quad (11)$$

Jika persamaan (11) disubstitusikan ke persamaan (10), sehingga persamaan Schrödinger menjadi

$$\frac{d^2h}{dy^2} e^{-y^2/2} - 2 \frac{dh}{dy} ye^{-y^2/2} + (\varepsilon - 1)he^{-y^2/2} = 0. \quad (12)$$

Setelah dikalikan dengan  $e^{y^2/2}$ , persamaan akhirnya adalah

$$\frac{d^2h}{dy^2} - 2y \frac{dh}{dy} + (\varepsilon - 1)h = 0. \quad (13)$$

Persamaan (13) dapat ditransformasikan dari persamaan Schrödinger osilator harmonik ke persamaan diferensial orde dua.

#### 4. Polinom Hermite

Polinom (suku banyak) Hermite pertama kali dipelajari oleh Charles Hermite, seorang matematikawan Prancis (Aravanis, 2010: 27). Polinom Hermite ini sangat bermanfaat pada perhitungan yang melibatkan gelombang, misalnya gelombang pada osilator harmonik.

Adapun bentuk dari polinom Hermite yang sering disebut dengan persamaan Rodrigues (Gasiorowicz, 2003: 88) adalah



$$H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2} \quad (14)$$

dengan fungsi generatornya (Boas, 1983: 531)

$$g(y, h) = e^{2yh-h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(y) \frac{h^n}{n!}. \quad (15)$$

## 5. Relasi Rekursi

Relasi rekursi diperoleh dari penurunan fungsi generator polinom Hermite baik terhadap  $h$  maupun terhadap  $y$ . Adapun relasi rekursi untuk polinom Hermite adalah

$$\begin{aligned} (a) H_{n+1}(y) &= 2yH_n(y) - 2nH_{n-1}(y) \\ (b) H'_n(y) &= 2nH_{n-1}(y) \end{aligned} \quad (16)$$

Polinom Hermite dapat dituliskan dalam bentuk hubungan differensial. Jika kedua relasi rekursi ini digabungkan maka dapat membentuk persamaan differensial untuk orde ke- $n$ .

$$H_n''(y) - 2yH_n'(y) + 2nH_n(y) = 0 \quad (17)$$

atau dapat ditulis juga dengan

$$\frac{d^2}{dy^2} H_n(y) - 2y \frac{dH_n(y)}{dy} + 2nH_n(y) = 0 \quad (18)$$

Persamaan (17) dan (18) disebut juga dengan persamaan differensial Hermite. Persamaan tersebut berperan penting dalam penyelesaian mekanika kuantum yaitu pada kasus Osilator Harmonik. Jika dilihat lagi persamaan (13) dan menyamakannya dengan persamaan (18), maka  $h(y) = H_n(y)$  dan  $\varepsilon - 1 = 2n$ , sehingga solusi untuk  $h(y)$  berupa polinomial Hermite  $H_n(y)$ .

## 6. Ortogonalitas Polinom Hermite

Dengan menggunakan persamaan differensial, kita bisa membuktikan bahwa polinom Hermite adalah ortogonal pada batas  $(-\infty, \infty)$  sehubungan dengan  $e^{-y^2}$  (Boas, 1983: 531). Adapun bentuk dari ortogonalitas polinom Hermite adalah

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_n(y) H_m(y) dy = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \sqrt{\pi} 2^n n! & n = m \end{cases} \quad (19)$$

Syarat kedua pada persamaan (23) dapat dibuktikan dengan mengalikan fungsi generator persamaan (15) dengan  $e^{-y^2}$ , sehingga

$$e^{-y^2} e^{-s^2+2sy} e^{-t^2+2ty} = \sum_{m,n=0}^{\infty} e^{-y^2} H_m(y) H_n(y) \frac{s^m t^n}{m! n!}$$

jika diintegrasikan terhadap  $y$  dengan batas  $-\infty$  sampai  $\infty$  dan substitusi  $n = m$ , maka menghasilkan persamaan

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(st)^n}{n! n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} [H_n(x)]^2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2-s^2+2sy-t^2+2ty} dy$$



$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y+s+t)^2} e^{2st} dy = \pi^{1/2} e^{2st} = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (st)^n}{n!}$$

dengan menyamakan koefisien  $st$  maka syarat kedua dari ortogonalitas polinom Hermite terbukti.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} [H_n(x)]^2 dy = \sqrt{\pi} 2^n n!$$

## 7. Fungsi Gelombang

Fungsi gelombang  $\varphi_n$  suatu sistem yang berosilator harmonik terdiri dari polinomial Hermite  $H_n(y)$ , faktor eksponensial  $e^{-\frac{y^2}{2}}$ , dan tetapan fungsi gelombang (Beiser, 2003: 190).  $\varphi_n$  harus memenuhi syarat ternormalisasi.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_n|^2 dy = 1 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Persamaan umum fungsi gelombang ternormalisasi dari osilator harmonik satu dimensi dapat ditulis

$$\varphi_n(x) = A_n \cdot H_n(y) e^{-\frac{y^2}{2}} \leftarrow y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \quad (20)$$

nilai  $H_n(y)$  berbeda bergantung pada harga  $n$  dan faktor ternormalisasi.

Karena tetapan normalisasi fungsi gelombang adalah:  $A_n = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} (2^n n!)^{-\frac{1}{2}}$ , maka fungsi gelombang ternormalisasi dari osilator harmonik dapat dituliskan dalam bentuk

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} (2^n n!)^{-\frac{1}{2}} \cdot H_n(y) e^{-\frac{y^2}{2}} \leftarrow y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \quad (21)$$

## 8. Ketidakpastian Heisenberg

Salah satu prinsip yang paling penting dalam mekanika kuantum adalah prinsip ketidakpastian Heisenberg. Secara fisis, setiap pengukuran dalam fisika itu selalu disertai dengan ketidakpastian. Hal ini dikarenakan sangat sulit untuk mendapatkan nilai sebenarnya suatu besaran melalui pengukuran. Beberapa penyebab adanya ketidakpastian antara lain adanya Nilai Skala Terkecil (NST), kesalahan kalibrasi, kesalahan titik nol, kesalahan pegas, kesalahan paralaks, fluktuasi parameter pengukuran dan lingkungan yang mempengaruhi hasil pengukuran. Sama halnya dalam mekanika kuantum, prinsip ketidakpastian Heisenberg ini menyatakan bahwa tidak mungkin mengukur posisi dan momentum sebuah partikel secara bersamaan. Dan hasil kali dari kedua ketidakpastian tersebut tidak boleh lebih kecil dari  $\hbar/2$  (Serway, 2010: 310).

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (22)$$

Persamaan (24) dapat membuktikan kebenaran dari ketidakpastian Heisenberg pada sistem osilator harmonik dengan menggunakan konsep nilai ekspektasi pengukuran posisi  $\langle x \rangle$  dan momentum  $\langle p \rangle$ .



Adapun untuk mencari nilai ekspektasi pada keadaan stasioner osilator harmonik adalah tanpa membongkar polinom Hermite melainkan dengan menggunakan relasi rekursi pada persamaan (16a) dan mengubah semua besaran yang mengandung  $x$  dan  $dx$  dalam bentuk  $y$  dan  $dy$  lalu digunakan ortogonalitas polinom Hermite pada persamaan (19).

Berikut ini merupakan persamaan untuk mendapatkan nilai ekspektasi posisi dan momentum

$$\langle x \rangle_n = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^* x \varphi_n dx \quad (23)$$

$$\langle x^2 \rangle_n = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^* x^2 \varphi_n dx \quad (24)$$

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad (25)$$

$$\langle p \rangle_n = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^* p \varphi_n dx \quad (26)$$

$$\langle p^2 \rangle_n = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^* p^2 \varphi_n dx \quad (27)$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} \quad (28)$$

## 9. Simpulan

Pembuktian kebenaran ketidakpastian Heisenberg pada Osilator Harmonik dapat dilakukan dengan berbagai cara diantaranya dengan membongkar fungsi Hermite dan memasukkan ordenya atau tanpa membongkar fungsi Hermite (tetap dalam bentuk  $H_n(y)$ ) dan penyelesaiannya menggunakan relasi rekursi dan ortogonalitas polinom Hermite. Kedua cara tersebut akan menghasilkan jawaban yang sama, namun akan lebih sederhana jika fungsi Hermite tetap dalam bentuk  $H_n(y)$ , karena dengan orde berapapun akan lebih cepat diketahui fungsi ekspektasi dan ketidakpastian Heisenbergnya.

Sebagai saran, ada baiknya metode ini diuji cobakan saat mempelajari osilator harmonik secara kuantum pada mata kuliah fisika modern dan fisika kuantum, sehingga secara pasti dapat terlihat bahwa metode ini jauh lebih praktis dari metode sebelumnya.

## DAFTAR RUJUKAN

- Aravanis, Christos T. 2010. *Hermite Polynomials in Quantum Harmonic Oscillator*. B.S. Undergraduate Mathematics Exchange, 7 (1) : 27 – 30.
- Beiser, Arthur. 2003. *Concepts of Modern Physics Sixth Edition*.
- Boas, L.M. 1983. *Mathematical Methods in the Physical Sciences Second Edition*. United States of America : John Wiley & Sons, Inc.
- Gasiorowicz, Stephen. 2003. *Quantum Physics Third Edition*. United States of America : John Wiley & Sons, Inc.
- Griffiths, J.D. 2005. *Introduction to Quantum Mechanics Second Edition*. United States of America : Pearson Prentice Hall.





- Pandiangan, Paken, dan Arkundato, A. 2005. *Solusi Persamaan Schrodinger Osilator Harmonik dalam Ruang Momentum*. Jurnal Matematika, Sains, dan Teknologi, 6 (1) : 20 – 30.
- Serway, R.A, and Jewett, J.W. 2010. *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics Sixth Edition*. Jakarta : Salemba Teknik.
- Wikipedia. Moto Armonico. [https://it.wikipedia.org/wiki/Moto\\_armonico](https://it.wikipedia.org/wiki/Moto_armonico). Diakses 08 Januari 2017.