33

 ISBN: 978-602-8355-39-1

MATEMATIKA-04

PERBANDINGAN FUNGSI UTILITAS *COBB-DOUGLASS* DAN *QUASI-LINEAR* DALAM MENENTUKAN SOLUSI OPTIMAL MASALAH PEMBIAYAAN LAYANAN INFORMASI

Indrawati[1], Irmeilyana[2], Fitri Maya Puspita[3], Meiza Putri Lestari[4]

[1,2,3,4] Universitas Sriwijaya
[1]indrawati10juni@gmail.com, [2]imel_unsri@yahoo.co.id, [3]pipitmac140201@gmail.com, [4]meizapl@yahoo.com

Abstrak

Semakin melonjaknya pengguna internet, semakin besar tantangan penyedia layanan untuk memberikan layanan terbaik serta memberikan keuntungan maksimum bagi penyedia layanan. Dengan memformulasikan fungsi utilitas *Cobb-Douglass* dan *Quasi-Linear* serta membandingkan model skema pembiayaan tersebut untuk konsumen homogen dan konsumen heterogen, diperoleh model skema pembiayaan yang optimal. Penelitian ini membahas fungsi utilitas *Cobb-Douglass* tanpa modifikasi dan *Quasi-Linear*. Langkah awal yang dilakukan dalam penelitian ini adalah memformulasikan fungsi Utilitas *Cobb-Douglass* dan *Quasi-Linear* untuk 2 jenis konsumen, kemudian membandingkan model-model tersebut untuk memperoleh model skema pembiayaan yang optimal. Model skema pembiayaan optimal diterapkan pada data *traffic* amatan server di Palembang. Hasil akhir, diperoleh keuntungan yang maksimum dengan harga optimal. Model skema pembiayaan yang lebih optimal diperoleh berdasarkan fungsi utilitas *Cobb-Douglass* dengan skema pembiayaan *usage-based* untuk masalah konsumen homogen dan konsumen heterogen berdasarkan kemauan untuk membayar, sedangkan untuk masalah konsumen heterogen berdasarkan tingkat pemakaian, skema pembiayaan yang lebih optimal juga berdasarkan fungsi utilitas *Cobb-Douglass*

Kata kunci: fungsi utilitas, *Cobb-Douglass, Quasi-Linear*, konsumen homogen, konsumen heterogen

PENDAHULUAN

Perkembangan internet yang semakin pesat mengakibatkan penyedia layanan internet atau *Internet Service Provider* (ISP) tertantang untuk memberikan kualitas layanan yang terbaik dengan harga yang optimal untuk konsumen. Menurut Wang dan Schulzrinne (2001), fungsi utilitas biasanya berhubungan dengan tingkat kepuasaan didapatkan pengguna atas konsumsi layanan informasi yang dapat memaksimumkan keuntungan untuk mencapai tujuan tertentu. Oleh karena itu, dibutuhkan fungsi utilitas terbaik yang tidak hanya bisa menguntungkan bagi ISP tetapi juga untuk konsumen dengan cara memberikan pelayanan terbaik kepada konsumen.

Banyak asumsi yang dipakai dalam fungsi utilitas diantaranya yang sering digunakan oleh para peneliti adalah sebagai fungsi *bandwidth* dengan nilai *loss* dan *delay* yang tetap dan mengikuti aturan bahwa utilitas marjinal sebagai fungsi *bandwidth* yang berkurang dengan *bandwidth* yang meningkat (Yang et al., 2003), (Yang, 2004), (Yang et al., 2004), (Yang et al., 2005), (Puspita et al., 2011a), (Puspita et al., 2011b), (Puspita et al., 2012), (Puspita et al.,2013a), (Puspita et al.,2013b), dan (Puspita et al.,2013c). Alasan lain sehubungan dengan pemilihan fungsi utilitas adalah fungsi tersebut haruslah mudah disederhanakan derivasinya dan mudah dianalisis homogenitas dan heterogenitas fungsi utilitas pengguna yang mempengaruhi pilihan struktur pembiayaan bagi perusahaan (Wu et al., 2010). Kelly (1997) juga menekankan bahwa fungsi utilitas dapat juga diasumsikan sebagai fungsi naik, *strictly* konkaf dan differensiabel secara kontinu.

 ISBN: 978-602-8355-39-1

Saat ini terdapat beberapa fungsi utilitas seperti fungsi utilitas *Cobb-Douglass*, *Quasi-Linear*, *Perfect-Subtitutes*, *Perfect Complements* dan lain-lain, tetapi dibutuhkan fungsi utilitas yang memenuhi tujuan penyedia layanan yaitu kepuasan pengguna. Sebelumnya, penelitian pada fungsi utilitas untuk memperoleh solusi optimal ini sudah digunakan oleh (Wu dan Banker, 2010).

Pada penelitian ini, dianalisis fungsi utilitas berdasarkan *Cobb-Douglass* dan *Quasi-Linear* dan hasil analisisnya dibandingkan berdasarkan tiga strategi skema pembiayaan internet yaitu *flat fee*, *usage-based* dan *two-part tariff* untuk masalah konsumen homogen dan konsumen heterogen dengan tujuan menghasilkan keuntungan yang maksimum dengan harga yang optimal.

PARAMETER DAN VARIABEL KEPUTUSAN

Untuk Masalah Konsumen (dalam Wu and Banker, 2010):
Pada model yang diteliti menggunakan parameter-parameter sebagai berikut :

- P : Biaya yang akan dikeluarkan konsumen untuk mengikuti layanan ini.
- P_y: Harga satuan yang ditetapkan oleh penyedia layanan dalam jam sibuk.
- P_x : Harga satuan yang ditetapkan oleh penyedia layanan menggunakan program pada saat bukan jam sibuk.

Variabel Keputusan yang digunakan dalam model tersebut adalah :

- X : Tingkat konsumsi konsumen layanan di jam sibuk.
- Y : Tingkat konsumsi konsumen dari layanan dalam jam tidak sibuk
- Z : Variabel keputusan yang bernilai 1 jika konsumen memilih untuk bergabung dengan program dan bernilai 0 jika tidak ingin bergabung

Untuk Masalah Produsen (dalam Wu and Banker, 2010): :
Pada model yang diteliti menggunakan parameter-parameter sebagai berikut :

- $X^* = X_{(P_x,P_y,P)}$: Tingkat konsumsi konsumen dari layanan pada jam sibuk.
- $Y^* = Y_{(P_x,P_y,P)}$: Tingkat konsumsi konsumen dari layanan pada jam tidak sibuk
- $Z^* = Z_{(P_x,P_y,P)}$: Variabel keputusan konsumen i tentang partisipasinya.

Variabel Keputusan yang digunakan dalam model tersebut adalah :

- $\bar{X}$: Tingkat konsumsi tertinggi konsumen i dalam menggunakan program pada saat jam sibuk.
- $\bar{Y}$: Tingkat konsumsi tertinggi konsumen i dalam
- P : Biaya langganan bagi konsumen untuk mengikuti program ini
- P_x: Harga satuan yang ditetapkan oleh penyedia layanan pada jam sibuk
- $_Y$: Harga satuan yang ditetapkan oleh penyedia layanan pada

FUNGSI UTILITAS BERDASARKAN *COBB-DOUGLASS*.

Bentuk umum fungsi utilitas berdasarkan *Cobb-Douglass* : $U(X,Y) = X^a Y^b$
Berikut ini analisis fungsi utilitas *Cobb-Douglass* untuk konsumen homogen dan konsumen heterogen berdasarkan 3 strategi pembiayaan.

Konsumen Homogen

Optimasi Masalah Konsumen :

$$maks_{X,Y,Z} X^a Y^b - P_X X - P_Y Y - PZ$$

dengan kendala :

$$X \leq \bar{X}Z\ ;\quad Y \leq \bar{Y}Z$$

$$X^a Y^b - P_X X - P_Y Y - PZ \geq 0\ ;\ Z = 0 \text{ atau } 1$$

Optimasi Masalah Penyedia Layanan :

$$maks_{P,P_X,P_Y} \sum_i (P_X X^* + P_Y Y^* + PZ^*)$$

dengan $(X^*,Y^*,Z^*) = argmaks\ X^a Y^b - P_X X - P_Y Y - PZ$

 ISBN: 978-602-8355-39-1

dengan kendala :

$X \leq \bar{X}Z$; $Y \leq \bar{Y}Z$

$X^aY^b - P_XX - P_YY - PZ \geq 0$; $Z_i = 0$ atau 1

Berikut ini dibahas penentuan keuntungan maksimum pada setiap skema pembiayaan yang digunakan penyedia layanan.

Lemma 1a :
Jika penyedia layanan menggunakan biaya *flat-fee*, maka harga yang dikenakan sebesar $\bar{X}^a\bar{Y}^b$ dan keuntungan maksimal yang dicapai akan menjadi $\sum_i[\bar{X}^a\bar{Y}^b]$; i menyatakan banyaknya konsumen.

Bukti Lemma 1a: Jika penyedia layanan menggunakan harga *flat-fee* dengan menetapkan $P_X = 0, P_Y = 0$ dan $P > 0$, maka optimasi masalah konsumen menjadi:

$$\underset{X,Y,Z}{maks}\ X^aY^b - P_XX - P_YY - PZ = \underset{X,Y,Z}{maks}\ X^aY^b - P$$

Masalah produsen menjadi :

$$maks_{P,P_X,P_Y}\ \sum_i(P_XX^* + P_YY^* + PZ^*) = \underset{P,P_X,P_Y}{maks}\ \sum_i[X^aY^b]$$

Karena fungsi tersebut memaksimumkan $X,Y,$ dan Z dan konsumen akan sepenuhnya memanfaatkan layanan dengan memilih tingkat konsumsi $X = \bar{X}$ dan $Y = \bar{Y}$, yaitu tingkat pemakaian maksimum, dengan utilitas maksimum, sehingga konsumen bisa mendapatkan harga $\bar{X}^a\bar{Y}^b$. *Flat-fee* maksimum penyedia layanan yang dikenakan adalah $\bar{X}^a\bar{Y}^b$ dengan keuntungan maksimum $\sum_i[\bar{X}^a\bar{Y}^b]$; i menyatakan banyaknya konsumen.

Lemma 2a :
Jika penyedia layanan menggunakan *usage-based*, maka harga yang optimal menjadi $P_X = a\bar{X}^{a-1}\bar{Y}^b$ dan $P_Y = b\bar{X}^a\bar{Y}^{b-1}$ dengan keuntungan maksimum $\sum_i(a+b)[\bar{X}^a\bar{Y}^b]$; i menyatakan banyaknya konsumen.

Bukti Lemma 2a: Jika penyedia layanan menggunakan harga *usage-based* murni dengan menetapkan $P_X > 0, P_Y > 0$ dan $P = 0$, maka : $a\,X^{a-1}Y^b = P_X \Leftrightarrow X^* = \left(\frac{P_X}{aY^b}\right)^{\frac{1}{a-1}}$

$$b\,X^aY^{b-1} = P_y \Leftrightarrow Y^* = \left(\frac{P_Y}{bX^a}\right)^{\frac{1}{b-1}}$$

Optimasi masalah produsen menjadi :

$$maks_{P,P_X,P_Y} \sum_i(P_XX^* + P_YY^*) = \underset{P,P_X,P_Y}{maks}\ \sum_i(a+b)[X^aY^b]$$

Artinya jika para penyedia layanan ingin memaksimalkan keuntungan, maka harus meminimalkan P_X dan P_Y. Karena $X \leq \bar{X}$ dan $Y \leq \bar{Y}$, maka $X^* = \bar{X}$ dan $Y^* = \bar{Y}$. P_X dan P_Y optimal akan menjadi $P_X = a\bar{X}^{a-1}\bar{Y}^b$ dan $P_Y = b\bar{X}^a\bar{Y}^{b-1}$ dengan keuntungan maksimum $\sum_i(a+b)[\bar{X}^a\bar{Y}^b]$; i menyatakan banyaknya konsumen.

Konsumen Heterogen *High-End* dan *Low-End*

Misalkan terdapat m konsumen *high-end* (i = 1) dan n konsumen *low-end* (i = 2). Untuk mempelajari bagaimana kesediaan untuk membayar mempengaruhi skema harga suatu perusahaan, diasumsikan setiap konsumen di kedua bagian memiliki batas atas X yang sama di jam sibuk dan Y di jam tidak sibuk, $a_1 > a_2$ dan $b_1 > b_2$.

Optimasi Masalah Konsumen :

$Maks\ (X_i, Y_i, Z_i)\ X_i^{a_i}Y_i^{b_i} - P_XX_i - P_YY_i - PZ_i$

dengan kendala :

$X_i \leq \bar{X}Z_i$; $Y_i \leq \bar{Y}Z_i$

 ISBN: 978-602-8355-39-1

$X_i^{a_i} Y_i^{b_i} - P_X X_i - P_Y Y_i - PZ_i \geq 0$; $Z_i = 0$ atau 1

Optimasi Masalah Produsen :

$$Maks_{P_X, P_Y, P}\ m(P_X X_1^* + P_Y Y_1^* + PZ_1^*) + n\,(P_X X_2^* + P_Y Y_2^* + PZ_2^*) \quad (4.14)$$

dengan $(X_i^*, Y_i^*, Z_i^*) = arg\ maks\ X_i^{a_i} Y_i^{b_i} - P_X X_i - P_Y Y_i - PZ_i$

dengan kendala :

$X_i \leq \bar{X} Z_i$; $Y_i \leq \bar{Y} Z_i$

$X_i^{a_i} Y_i^{b_i} - P_X X_i - P_Y Y_i - PZ_i \geq 0$; $Z_i = 0$ atau 1

Berikut ini dibahas penentuan keuntungan maksimum pada setiap skema pembiayaan yang digunakan penyedia layanan.

Lemma 3a:
Jika penyedia layanan menggunakan biaya *flat -fee*, maka harga yang dikenakan adalah $\bar{X}^{a_2} \bar{Y}^{b_2}$ dengan keuntungan maksimum yang dicapai adalah sebesar $(m+n)\,[\bar{X}^{a_2} \bar{Y}^{b_2}]$.

Bukti Lemma 3a: Jika penyedia layanan menggunakan harga *flat fee* dengan menetapkan $P_X = 0, P_Y = 0$ dan $P > 0$, maka konsumen akan memilih tingkat konsumsi maksimum $X_1 = \bar{X}$, $X_2 = \bar{X}$, $Y_1 = \bar{Y}$, dan $Y_2 = \bar{Y}$. Dengan demikian setiap konsumen *high-end* dikenakan biaya $P \leq \bar{X}^{a_1} \bar{Y}^{b_1}$ dan konsumen *low-end* $P \leq \bar{X}^{a_2} \bar{Y}^{b_2}$.

Jika $P = \bar{X}^{a_1} \bar{Y}^{b_1}$, maka hanya konsumen *high-end* yang dapat mengikuti layanan ini. Jika $P = \bar{X}^{a_2} \bar{Y}^{b_2}$, maka kedua jenis konsumen tersebut dapat mengikuti layanan ini, yaitu konsumen *high-end* dan konsumen *low-end*. Dengan demikian untuk memaksimumkan keuntungan, penyedia layanan akan mengenakan biaya $P = \bar{X}^{a_2} \bar{Y}^{b_2}$.

Dalam hal ini untuk optimasi masalah produsen :

$$Maks_P\ m(PZ_1^*) + n\,(PZ_2^*) = (m+n)\,(\bar{X}^{a_2} \bar{Y}^{b_2})$$

Jadi keuntungan maksimum yang diperoleh produsen adalah sebesar $(m+n)(\bar{X}^{a_2} \bar{Y}^{b_2})$; *m* adalah banyaknya konsumen *high-end* dan *n* adalah banyaknya konsumen *low-end*.

Lemma 4a:
Jika penyedia layanan menggunakan harga *usage-based*, maka harga optimal diberikan untuk jam sibuk adalah $P_X = a_2 \bar{X}^{(a_2-1)} \bar{Y}^{b_2}$ dan harga optimal di jam tidak sibuk adalah $P_Y = b_2 \bar{Y}^{(b_2-1)} \bar{X}^{a_2}$ dengan keuntungan maksimumnya adalah $(m+n)(a_2+b_2)(\bar{X}^{a_2} \bar{Y}^{b_2})$.

Bukti Lemma 4a: Jika penyedia layanan menggunakan harga *usage-based* dengan menetapkan $P_X > 0$, $P_Y > 0$ dan $P = 0$, maka :

Optimasi masalah konsumen heterogen *high-end* :

$$a_1 X_1^{a_1-1} Y_1^{b_1} = P_X \Leftrightarrow X_1^* = \left(\frac{P_X}{a_1 Y_1^{b_1}}\right)^{\frac{1}{a_1-1}}$$

$$b_1 X_1^{a_1} Y_1^{b_1-1} = P_Y \Leftrightarrow Y_1^* = \left(\frac{P_Y}{b_1 X_1^{a_1}}\right)^{\frac{1}{b_1-1}}$$

Optimasi masalah konsumen heterogen *low-end* :

$$a_2 X_2^{a_2-1} Y_2^{b_2} = P_X \Leftrightarrow X_2^* = \left(\frac{P_X}{a_2 Y_2^{b_2}}\right)^{\frac{1}{a_2-1}}$$

$$b_2 X_2^{a_2} Y_2^{b_2-1} = P_Y \Leftrightarrow Y_2^* = \left(\frac{P_Y}{b_2 X_2^{a_2}}\right)^{\frac{1}{b_2-1}}$$

Ketika harga di interval $a_2 X_2^{a_2-1} Y_2^{b_2} \leq P_X \leq a_1 X_1^{a_1-1} Y_1^{b_1}$ dan $b_2 X_2^{a_2} Y_2^{b_2-1} \leq P_Y \leq b_1 Y_1^{b_1-1} X_1^{a_1}$, permintaan dari konsumen *high-end* tetap pada $\bar{X}$ dan $\bar{Y}$, sementara permintaan dari konsumen *low-end* terus meningkat karena harga turun. Dengan demikian kedua konsumen (konsumen *high-end* dan *low-end*) dapat mengikuti layanan ini

 ISBN: 978-602-8355-39-1

dengan harga optimal diberikan untuk jam sibuk adalah $P_X = a_2 X_2^{a_2-1} Y_2^{b_2}$ dan harga optimal di jam tidak sibuk adalah $P_Y = b_2 X_2^{a_2} Y_2^{b_2-1}$.

Optimasi masalah produsen :

$$Maks_{P_X,P_Y}\ m(P_X X_1^* + P_Y Y_1^*) + n\,(P_X X_2^* + P_Y Y_2^*)$$
$$= Maks_{P_X,P_Y}\,(m+n)\,(a_2 + b_2)\left[X_2^{a_2} Y_2^{b_2}\right]$$

Harga optimal diberikan untuk jam sibuk adalah $P_X = a_2 \bar{X}^{(a_2-1)} \bar{Y}^{b_2}$ dan harga optimal di jam tidak sibuk adalah $P_Y = b_2 \bar{Y}^{(b_2-1)} \bar{X}^{a_2}$ dengan keuntungan maksimumnya adalah $(m+n)(a_2+b_2)\left(\bar{X}^{a_2}\bar{Y}^{b_2}\right)$.

FUNGSI UTILITAS BERDASARKAN *QUASI-LINEAR*.

Bentuk umum fungsi utilitas berdasarkan *Quasi-Linear* : $U(X, Y) = aX + f(y)$. Berikut ini analisis fungsi utilitas *Quasi-Linear* untuk konsumen homogen dan konsumen heterogen

Konsumen Homogen

Optimasi Masalah Konsumen :

$$max_{X,Y,Z}\ aX + f(y) - P_x X - P_y Y - PZ$$

dengan kendala : $X \le \bar{X}Z;\ Y \le \bar{Y}Z$

$$aX + f(y) - P_x X - P_y Y - PZ \ge 0\ ; \quad Z = 0 \text{ atau } 1$$

Optimasi Masalah Para Produsen :

$$max_{P,P_X,P_Y} \textstyle\sum_i (P_X X^* + P_Y Y^* + PZ^*)$$

dimana $(X^*, Y^*, Z^*) = argmaks\ aX + f(y) - P_x X - P_y Y - PZ$

dengan kendala:

$$X \le \bar{X}Z;\ \ Y \le \bar{Y}Z$$
$$aX + f(y) - PxX - PyY - PZ \ge 0; \quad Z_i = 0 \text{ atau } 1$$

Lemma 1b:

Jika penyedia layanan menggunakan biaya *flat fee*, harga yang dikenakan akan menjadi $a\bar{X} + f(\bar{Y})$ dan keuntungan maksimal dicapai akan menjadi : $\sum_i[a\bar{X} + f(\bar{Y})]$.

Bukti Lemma 1b: Jika penyedia layanan menggunakan harga *flat fee* dengan menetapkan $P_x = 0, P_y = 0$ dan $P > 0$. maka, ketika layanan ini diberikan harga, konsumen akan sepenuhnya memanfaatkan layanan dengan memilih tingkat konsumsi $X = \bar{X}$ dan $Y = \bar{Y}$ dengan utilitas maksimum, konsumen bisa mendapatkan $a\bar{X} + f(\bar{Y})$. Dengan demikian, biaya tetap maksimum penyedia layanan yang dikenakan adalah $a\bar{X} + f(\bar{Y})$ dengan keuntungan maksimumnya adalah $\sum_i[a\bar{X} + f(\bar{Y})]$.

Lemma 2b:

Jika penyedia layanan menggunakan *usage-based*, harga yang optimal akan menjadi $P_x = a$ dan $P_y = f'(\bar{Y})$, dengan keuntungan maksimumnya adalah $\sum_i[a\bar{X} + \bar{Y}f'(\bar{Y})]$.

Bukti Lemma 2b: Jika penyedia layanan menggunakan harga biaya tetap murni dengan menetapkan $P_x > 0, P_y > 0$ dan $P = 0$, maka diperoleh :

$$a = P_x \Leftrightarrow X^* = \bar{X} \text{ dan } f'(Y) = P_y \Leftrightarrow Y^* = \bar{Y}$$

Optimasi masalah produsen menjadi :

$$\underset{P,P_X,P_Y}{maks} \sum_i (P_X X^* + P_Y Y^*) = \sum_i [a\bar{X} + \bar{Y}\,f'(\bar{Y})]$$

Dalam hal ini, untuk memaksimalkan keuntunga, produsen harus meminimalkan P_x dan P_y. Dari kondisi pertama, diketahui bahwa P_x dan P_y menurun, maka X^* dan Y^* akan meningkat.

Namun, karena X dan Y dibatasi, $X^*=\bar{X}$ dan $Y^*=\bar{Y}$. Sehingga, P_x dan P_y yang optimal akan menjadi $P_x = a$ dan $P_y = f'(\bar{Y})$ dengan keuntungan maksimum: $\sum_i[a\bar{X} + \bar{Y}\, f'(\bar{Y})]$.

Konsumen Heterogen *High-End* dan *Low-End*

Optimasi Masalah Konsumen :

$$Maks\,(X_i,Y_i,Z_i)\; a_i X_i + f(Y_i) - P_x X_i - P_y Y_i - PZ_i$$

dengan kendala :

$$X_i \le \bar{X} Z_i \;;\; Y_i \le \bar{Y} Z_i$$

$$a_i X_i + f(Y_i) - P_x X_i - P_y Y_i - PZ_i \ge 0 \quad ; \qquad Z_i = 0 \text{ atau } 1$$

Optimasi Masalah Produsen :

$$Maks_{\,P_x,P_y,P}\; m\left(P_x X_1{}^* + P_y Y_1{}^* + PZ_1{}^*\right) + n\left(P_x X_2{}^* + P_y Y_2{}^* + PZ_2{}^*\right)$$

dengan $(X_i{}^*,\, Y_i{}^*, Z_i{}^*) = \text{argmaks}\; a_i X_i + f(Y_i) - P_x X_i - P_y Y_i - PZ_i$

dengan kendala :

$$X_i \le \bar{X} Z_i \quad ; \quad Y_i \le \bar{Y} Z_i$$

$$a_i X_i + f(Y_i) - P_x X_i - P_y Y_i - PZ_i \ge 0 \qquad ; \qquad Z_i = 0 \text{ atau } 1$$

Berikut ini dibahas penentuan keuntungan maksimum pada setiap skema pembiayaan yang digunakan penyedia layanan.

Lemma 3b :

Jika penyedia layanan menggunakan biaya *flat fee*, harga yang dikenakan akan $a_2\bar{X} + f(\bar{Y})$ dan
keuntungan maksimum dicapai akan $(m+n)\,[a_2\bar{X} + f(\bar{Y})\,]$.

Bukti Lemma 3b. Jika penyedia layanan menggunakan harga *flat fee* murni dengan menetapkan
$P_x = 0, P_y = 0$ dan $P > 0$, maka pengguna akan memilih tingkat konsumsi maksimum $X_1 = \bar{X}$,
$X_2 = \bar{X}$, $Y_1 = \bar{Y}$, dan $Y_2 = \bar{Y}$.

Diasumsikan bahwa $(m)a_1 < (m+n)a_2$ sehingga $a_1 < \frac{(m+n)}{m}a_2$. Artinya, jika pengguna dikenakan biaya sebesar $a_1\bar{X} + f(\bar{Y})$, maka hanya pengguna *high-end* yang dapat mengikuti layanan ini. Jika pengguna dikenakan biaya sebesar $a_2\bar{X} + f(\bar{Y})$, maka kedua jenis pengguna tersebut dapat mengikuti layanan ini, yaitu pengguna *high-end* dan pengguna *low-end*. Untuk memaksimumkan keuntungan, penyedia layanan akan mengenakan biaya $a_2\bar{X} + f(\bar{Y})$.

Sedemikian hingga untuk optimasi masalah produsen :

$$Maks_{\,P}\, m(PZ_1{}^*) + n\,(PZ_2{}^*) = (m+n)\,(a_2\bar{X} + f(\bar{Y}))$$

Jadi, keuntungan maksimum yang akan diperoleh produsen sebesar $(m+n)\big(a_2\bar{X} + f(\bar{Y})\big)$.

Lemma 4b :

Jika penyedia layanan menggunakan harga *usage based*, ketika $m\bar{X} > n$, harga yang optimal di jam sibuk adalah $P_x = a_1$ dan ketika $m\bar{Y} > n$, harga yang optimal di jam tidak sibuk adalah $P_y = f'(\bar{Y})$. Keuntungan maksimumnya adalah $m\big(a_1\bar{X} + \bar{Y}f'(\bar{Y})\big) + n\big(a_2\bar{X} + \bar{Y}f'(\bar{Y})\big)$. Jika tidak, harga optimal diberikan untuk jam sibuk adalah $P_x = a_2$ dan harga yang optimal di jam tidak sibuk adalah $P_y = f'(\bar{Y})$ dengan keuntungan maksimum $(m+n)\big(a_2\bar{X} + \bar{Y}f'(\bar{Y})\big)$.

Bukti Lemma 4b. Jika penyedia layanan menggunakan harga *usage-based* dengan menetapkan $P_x > 0, P_y > 0$ dan $P = 0$, maka diperoleh :

 ISBN: 978-602-8355-39-1

Optimasi konsumen *high-end* : $a = P_x \Leftrightarrow X_1{}^* = \bar{X}$ dan $f'(Y_1) = P_y \Leftrightarrow Y_1{}^* = \bar{Y}$
Optimasi konsumen *low-end* : $a = P_x \Leftrightarrow X_2{}^* = \bar{X}$ dan $f'(Y_2) = P_y \Leftrightarrow Y_2{}^* = \bar{Y}$
Optimasi masalah produsen menjadi :

$$Maks_{P_x,P_y}\ m\left(P_xX_1{}^* + P_yY_1{}^*\right) + n\left(P_xX_2{}^* + P_yY_2{}^*\right)$$
$$= m[a_1\bar{X} + \bar{Y}f'(\bar{Y})] + n\,[a_2\bar{X} + \bar{Y}f'(\bar{Y})]$$

Analisis ini diterapkan pada masalah saat jam sibuk. Untuk memaksimalkan fungsi ini, penyedia layanan harus meminimalkan P_x dan karenanya harga terbaik P_x tidak dapat lebih besar dari a_1. Di sisi lain, jika penyedia menetapkan harga di bawah a_2, Keuntungan tidak optimal ketika $X_1{}^* \le \bar{X}$ dan $X_2{}^* \le \bar{X}$.

Jika diterapkan pada masalah saat jam tidak sibuk, harga terbaik $P_y \le Y_1f'(Y_1)$. Di sisi lain, jika penyedia menetapkan harga $P_y < Y_2f'(Y_2)$, maka keuntungan tidak optimal ketika $Y_1{}^* \le \bar{Y}$ dan $Y_2{}^* \le \bar{Y}$. Oleh karena itu, harga P_y yang terbaik adalah $Y_2f'(Y_2) \le P_y \le Y_1f'(Y_1)$. Jika harga berada di interval ini, permintaan dari konsumen *high-end* tetap pada $\bar{X}$ dan $\bar{Y}$, sementara permintaan dari konsumen *low-end* terus meningkat karena harga turun. Dengan demikian, harga yang optimal di jam sibuk adalah $P_x = a_1$ dan ketika $m\bar{Y} > n$, harga yang optimal di jam tidak sibuk adalah $P_y = f'(\bar{Y})$. Keuntungan maksimumnya adalah $(m+n)(a_1\bar{X} + \bar{Y}f'(\bar{Y}))$. Jika tidak, harga optimal diberikan untuk jam sibuk adalah $P_x = a_2$ dan harga yang optimal di jam tidak sibuk adalah $P_y = f'(\bar{Y})$ dengan keuntungan maksimum $(m+n)(a_2\bar{X} + \bar{Y}f'(\bar{Y}))$.

PENGOLAHAN DATA TRAFFIC

Skema pembiayaan yang optimal diolah dengan menggunakan data *traffic* pada aplikasi *mail, web* dan *files* yang diperoleh dari amatan *server* lokal di Palembang dalam jangka waktu 1 bulan, yaitu dari tanggal 8 Agustus 2013 sampai dengan tanggal 7 September 2013.

Tabel 1 Nilai $\bar{X}$ dan nilai $\bar{Y}$ yang diperoleh dari amatan server lokal di Palembang

	Mail	*Web*	*Files*
$\bar{X}_1$ atau $\bar{X}$ (*kilobyte*)	247,15	345,51	59144,66
$\bar{X}_2$ (*kilobyte*)	242,80	331,01	39615,10
$\bar{Y}_1$ atau $\bar{Y}$ (*kilobyte*)	191,08	2279,99	14083,11
$\bar{Y}_2$(*kilobyte*)	169,71	1293,27	8784,34

Keterangan :

1. $\bar{X}_1$ atau $\bar{X}$ merupakan tingkat konsumsi yang paling maksimum pada saat jam sibuk dalam satuan *kilo byte*.
2. $\bar{X}_2$ merupakan tingkat konsumsi yang maksimum pada saat jam sibuk, tanpa mengambil data $\bar{X}_1$, sehingga $\bar{X}_1 > \bar{X}_2$, satuannya *kilo byte*.
3. $\bar{Y}_1$ atau $\bar{Y}$ merupakan tingkat konsumsi yang paling maksimum pada saat jam tidak sibuk dalam satuan *kilo byte*.
4. $\bar{Y}_2$ merupakan tingkat konsumsi yang maksimum pada saat jam tidak sibuk, tanpa mengambil data $\bar{Y}_1$, sehingga $\bar{Y}_1 > \bar{Y}_2$, satuannya *kilo byte*

Diketahui :

1. $a > 0, b > 0, a_1 > a_2\ dan\ b_1 > b_2$;
   Misalkan : $a = 2, b = 2, a_1 = 3, a_2 = 2, b_1 = 3, b_2 = 2$.
2. Fungsi utilitas *Cobb-Douglass* merupakan fungsi dengan 2 variabel bebas yang membentuk fungsi nonlinier. Bentuk fungsinya : $X^a + Y^b$.

 ISBN: 978-602-8355-39-1

3. Fungsi utilitas *Quasi-Linear* merupakan fungsi yang semi linier, gabungan antara fungsi linier dan fungsi nonlinear yang konkaf. Bentuk umum fungsinya : $aX + f(Y)$. Dalam perhitungan ini, fungsi utilitas *Quasi-Linear* yang digunakan adalah $aX + Y^b$.

Tabel 2 dan 3. merupakan perbandingan skema pembiayaan optimal untuk fungsi utilitas *Cobb-Douglass* dan *Quasi-Linear* yang diterapkan pada data amatan server lokal di Palembang. Pengolahan data dengan substitusi nilai $\overline{X}$ dan $\overline{Y}$ ke model skema pembiayaan yang optimal.

Tabel 2. Perbandingan skema pembiayaan optimal untuk fungsi utilitas *Cobb-Douglass*

Jenis Konsumen		*Cobb-Douglass*		
		Mail	*Web*	*Files*
Homogen	Harga	$P_x = 18.047.667$ dan $P_Y = 23.343.526$	$P_x = 3.592.166.858$ dan $P_Y = 544.357.463$	$P_x = 23.460.792.487.305$ dan $P_Y = 98.527.995.236.296$
	Keuntungan	$\sum_i 8.920.961.932$	$\sum_i (2.482.259.141.909)$	$\sum_i 2.775.161.189.984.460.000$
Heterogen *high-end* dan *low-end*	Harga	$P_x = 18.047.667{,}3$ dan $P_Y = 23343526{,}1$	$P_x = 3.592.166.858$ daan $P_Y = 544.357.463$	$P_x = 23.460.792.487.305$ dan $P_Y = 98.527.995.236.296$
	Keuntungan	$(m+n)$ (8.920.961.932)	$(m+n)$ (2.482.259.141.909)	$(m+n)$ 2.775.161.189.984.460.000

Tabel 3. Perbandingan skema pembiayaan optimal untuk fungsi utilitas Quasi-linier

Jenis Konsumen		*Quasi-Linear*		
		Mail	*Web*	*Files*
Homogen	Harga	$P_x = 2$ dan $P_y = 382{,}16$	$P_x = 2$ dan $P_y = 4.559{,}98$	$P_x = 2$ dan $P_y = 28.166{,}22$
	Keuntungan	$\sum_i (73.517)$	$\sum_i (10.397.400)$	$\sum_i (396.786.264)$
Heterogen *high-end* dan *low-end*	Harga	$P_x = 2$ dan $P_y = 382{,}16$	$P_x = 2$ dan $P_y = 4.559{,}98$	$P_x = 2$ dan $P_y = 28.166{,}22$
	Keuntungan	$(m+n)(73.517)$	$(m+n)$ (10.397.400)	$(m+n)$ (396.786.264)

KESIMPULAN

Dari pembahasan, dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. Hasil fungsi utilitas berdasarkan *Cobb-Douglass* dan *Quasi-Linear* menghasilkan model skema pembiayaan optimal yang sama.
2. Model skema pembiayaan optimal untuk masalah konsumen homogen dan konsumen heterogen berdasarkan kemauan untuk membayar didasarkan pada skema pembiayaan *usage-based.*
3. Berdasarkan aplikasi model pada setiap data *traffic*, didapat bahwa penggunaan fungsi utilitas *Cobb-Douglass* menghasilkan skema pembiayaan yang lebih optimal dibandingkan dengan fungsi utilitas *Quasi-Linear.*

DAFTAR PUSTAKA

Banker, W.2010. "Best Pricing Strategy for Information Services". *Journal of the Association for Information Systems, 11*(6), 339-366.

Fajri, S. N.2012. *Marginal Utility*. http://sidikaurora.wordpress.com/2012/01/26 /marginal-utility/.Diakses pada tanggal 2 September 2013

Fishburn, P. C., et al.,.1997. *Fixed fee versus unit pricing for information goods: competition, equilibria, and price wars*. Paper presented at the Siders Proceedings of the Conference on Internet Publishing and Beyond, Cambridge MA.

Hutchinson,E.2011.*Review of Utility Functions*. http://web.uvic.ca/-ehutchin/resources/313/ PROBLEM-SETS/TopicBll.pdf.Diakses tanggal 27 Agustus 2013

Ifdil.2008.*LayananInformasi*.http://konselingindonesia.com/index.php?option=com_alphacontent&section=19&cat=79&Itemid=144.Diakses pada tanggal 27 Agustus 2013

Kelly, F.1997. "Charging and rate control for elastic traffic". *European Transactions on Telecommunications, 8*, 33-37.

Puspita, F. M., et al.,. 2011. *Internet Charging Scheme Under Multiple QoS Networks*. Paper presented at the The International Conference on Numerical Analysis & Optimization (ICeMATH 2011) 6-8 June 2011, Yogyakarta, Indonesia.

Puspita, F. M., et al.,. 2011. *A Comparison of Optimization of Charging Scheme in Multiple QoS Networks*. Paper presented at the 1st AKEPT 1st Annual Young Reseachers International Conference and Exhibition (AYRC X3 2011) Beyond 2020: Today's Young Reseacher Tomorrow's Leader 19-20 DECEMBER 2011, PWTC, KUALA LUMPUR.

Puspita, F. M., et al.,.2012. *Models of Internet Charging Scheme under Multiple QoS Networks*. Paper presented at the International Conferences on Mathematical Sciences and Computer Engineering 29-30 November 2012, Kuala Lumpur, Malaysia.

Puspita, F. M., et al.,.2013. "Improved Models of Internet Charging Scheme of Single Bottleneck Link In Multi QoS Networks". *Journal of Applied Sciences, 13*(4), 572-579.

Puspita, F. M., et al.,.2013. "Improved Models of Internet Charging Scheme of Multi bottleneck Links in Multi QoS Networks". *Australian Journal of Basic and Applied Sciences, 7*(7), 928-937.

Puspita, F. M., et al.,.2013. *The Improved Formulation Models of Internet Pricing Scheme of Multiple Bottleneck Link QoS Networks with Various Link Capacity Cases*. Paper presented at the Paper presented at the Seminar Hasil Penyelidikan Kementerian Pengajian Tinggi 2013.

Sundararajan, A.2004."Nonlinear Pricing of Information Goods". *Management Science, 50*(12), 1660-1673.

Wang, X., & Schulzrinne, H.2001. *Pricing Network Resources for Adaptive Applications in a Differentiated Services Network*.

Wu,Y.,*etal*.,.2010.*QoS-Revenue Tradeoff with Time-Constrained ISP Pricing*. http://scenic.princeton .edu/paper/IWQoS_Draft.pdf.Diakses tanggal 3 Agustus 2013

Yang, W. 2004. "Pricing Network Resources in Differentiated Service Networks". *Phd Thesis*. Georgia Institute of Technology.

Yang, W., *et al*.,.2004. *A Comparison of Auction and Flat Pricing for Differentiated Service Networks*. Paper presented at the Proceedings of the IEEE International Conference on Communications.

Yang, W., et al.,.2003. *An Auction Pricing Strategy for Differentiated Service Network*. Paper presented at the Proceedings of the IEEE Global Telecommunications Conference