

Geometri Analitik Bidang Dan Ruang dan Strategi Langkah Kerja Polya

Oleh : Indaryanti

Dosen Prodi Pendidikan Matematika FKIP Unsri

iin_pasca@yahoo.com

ABSTRAK

Geometri Analitik Bidang dan Ruang dapat memberikan pemahaman tentang bidang dan ruang secara analitik. Dalam mempelajarinya dapat dimulai dengan memahami definisi maupun teorema yang terkait dengan bidang atau ruang secara analisis. Selain jalan seperti yang tersebut, dapat juga digunakan langkah kerja Polya yang meliputi: (1) memahami materi yang dibahas; (2) merencanakan penyelesaian; (3) melaksanakan penyelesaian dan (4) menguji kembali. Empat langkah kerja Polya ini, selanjutnya dikembangkan dengan menambahkan satu langkah lagi yaitu membuat sketsa setelah langkah ke-2 atau setelah merencanakan penyelesaian.

Kata kunci : geometri analitik bidang dan ruang, langkah kerja Polya.

Pendahuluan

Geometri merupakan bagian dari matematika yang mempelajari tentang bentuk pada bidang dan ruang. Dalam mempelajarinya, menurut van Hiele dapat melalui beberapa tahap, yaitu tahap visualisasi, tahap analisis, tahap deduksi informal, tahap deduksi dan tahap rigor. Tahapan-tahapan dalam pembelajaran geometri yang dikemukakan oleh van Hiele ini dimulai dari mengamati benda-benda yang dapat dilihat sampai pada tahap mempelajarinya dengan cara deduktif.

Geometri Analitik Datar dan Ruang (GADR) merupakan bagian dari Geometri yang menganalisis sifat-sifat benda-benda datar dan ruang. Dalam melakukan analisis seringkali mengalami kebingungan untuk memulai analisis. Terkadang siswa bingung harus memulai darimana untuk menganalisis ini.

Sebenarnya, dalam menganalisis suatu persoalan atau masalah, dimulai dari hal-hal yang diketahui yang ada pada masalah. Pada GADR dapat dimulai dari definisi yang diberikan. Tahap awal ini sama dengan langkah kerja Polya dalam menyelesaikan masalah.

Dalam menyelesaikan suatu masalah, Polya memberikan empat langkah yaitu: (1) langkah memahami, (2) langkah merencanakan penyelesaian masalah, (3) langkah menyelesaikan masalah, dan (4) langkah menguji kembali. Apakah empat langkah ini dapat digunakan untuk mempelajari GADR? Untuk itu akan dikaji geometri analitik datar dan ruang serta langkah-langkah kerja Polya yang biasa digunakan untuk memecahkan masalah.

Tahap Belajar Geometri

Belajar geometri, menurut van Hiele (lihat Karso, 2010) bergantung pada waktu, materi dan metode terpadu maka dapat meningkatkan kemampuan berpikir siswa terhadap tahapan berpikir yang lebih tinggi. Untuk itulah van Hiele mengenalkan beberapa tahapan mulai dari tahap visualisasi sampai pada tahap rigor.

Pada tahap visualisasi siswa mengenal bentuk geometri berdasarkan pada yang dilihatnya secara realistik. Tahap analisis merupakan tahap siswa mengenal konsep dan sifat-sifat dari bentuk geometri. Tahap deduksi informal adalah tahap seseorang mulai dapat menghubungkan sifat-sifat beberapa bangun ruang, membuat

definisi abstrak, menemukan sifat-sifat dari berbagai bangun dengan menggunakan deduksi informal dan dapat mengklasifikasikan bangun-bangun secara hirarki. Tahap deduksi formal terjadi bila seseorang dapat menyusun bukti secara formal berdasarkan pada teorema dan aksioma. Tahap Rigor adalah tahap seseorang telah dapat bernalar secara formal dalam sistem matematika dan dapat menganalisis konsekuensi dari manipulasi aksioma dan definisi (Abdussakir, 2009).

Berdasarkan tahapan yang dikemukakan van Hiele ini, maka tahap visualisasi atau tahap mengenal bentuk geometri berdasarkan pada yang dilihatnya secara realistis digunakan pada saat belajar geometri bagi siswa taman kanak-kanak dan siswa sekolah dasar kelas rendah. Pada masa ini mereka mengenal bentuk-bentuk benda nyata yang ada di sekitar mereka sebagai benda geometri, seperti selembar uang kertas berbentuk persegi panjang, uang logam yang berbentuk lingkaran, kaleng yang berbentuk tabung, kotak makanan yang berbentuk balok dan lainnya.

Tahap analisis dilakukan pada siswa sekolah dasar kelas tinggi. Pada masa ini siswa mengenal konsep dan sifat benda geometri, seperti mengenal konsep persegi dan sifat-sifat dari persegi, dan seterusnya. Tahap ini digunakan untuk mempelajari geometri sekolah.

Seiring dengan bertambahnya usia siswa dan jenjang pendidikannya, maka bertambah pula kemampuan belajar siswa. Kemampuan selanjutnya adalah kemampuan menghubungkan sifat-sifat beberapa bangun ruang, membuat definisi abstrak, menemukan sifat-sifat dari berbagai bangun dengan menggunakan deduksi informal dan dapat mengklasifikasikan bangun-bangun secara hirarki. Kegiatan ini dilakukan pada tahap deduksi informal. Tahap ini mulai dimiliki siswa SMP dan SMA bahkan perguruan tinggi. Oleh sebab itu kemampuan ini dapat digunakan untuk mempelajari geometri non Euclid.

Pada tahap rigor, dimana seseorang sudah dapat bernalar secara formal dalam sistem matematika dan dapat menganalisis konsekuensi dari manipulasi aksioma dan definisi digunakan untuk mempelajari geometri Euclid. Geometri ini sudah bersifat deduktif.

Dari tahapan pembelajaran Geometri yang dinyatakan oleh van Hiele maka tergambar hubungan antara materi geometri yang dipelajari dengan jenjang satuan pendidikan. Materi geometri yang realistik dipelajari di SD. Geometri Analitik Bidang dan Ruang dipelajari di jenjang perguruan tinggi. Materi Geometri Euclid yang sifatnya abstrak dipelajari oleh mereka yang telah mempunyai kemampuan berfikir abstrak pada tahap rigor.

Pembelajaran Geometri Analitik

Geometri analitik merupakan bagian dari materi geometri yang membahas bangun-bangun geometri dengan menggunakan prinsip-prinsip aljabar dan menggunakan bilangan riil (lihat Sukirman, 2009). Jika dikaitkan dengan tahap berpikir van Hiele, maka pembelajaran Geometri Analitik Bidang dan Ruang berada pada tahap deduksi informal. Seseorang dapat mempelajari materi GADR dengan menggunakan definisi abstrak. Misalnya dalam mempelajari materi parabola, dimulai dari definisi dan dilanjutkan dengan sifat-sifatnya.

Biasanya, untuk menyelesaikan konsep geometri analitik digunakan sistem koordinat Kartesius untuk menyelesaikan persamaan bidang, garis, dan bangun ruang yang sering berada dalam dimensi 2 atau kadang dalam dimensi 3. Untuk menjelaskan geometri analitik secara sederhana maka perlu memfokuskan bahasan pada pendefinisian bentuk bangun dalam bilangan dan menjadikan sebagai sebuah hasil perhitungan.

Dalam pembelajaran geometri analitik diawali dengan memahami definisi yang diberikan. Untuk memahami definisi ini perlu dibuatkan hal-hal yang diketahui dan yang ditanyakan, setelah itu dilakukan pelaksanaan penyelesaian untuk memahami konsep yang dimaksud.

Dari definisi menuju ke pemahaman konsep inilah sering terjadi kesalahan. Berdasarkan pengamatan terhadap hasil belajar mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Unsri tahun akademik 2009-2010, didapat bahwa mereka sulit menentukan langkah awal untuk menyelesaikan masalah GADR yang dihadapi. Artinya setelah mereka menggunakan definisi, mereka tidak tahu apa

yang harus dilakukan selanjutnya. Untuk itu perlu dicarikan jalan untuk menjembatani antara definisi dengan tujuan pemahaman materi.

Langkah Kerja POLYA

Strategi pemecahan masalah dilakukan dalam pembelajaran matematika untuk memecahkan masalah dalam Matematika yang dikenal dengan pemecahan masalah (*problem solving*). Walaupun Polya berfokus pada teknik pemecahan masalah dalam bidang matematika, tetapi prinsip-prinsip yang dikemukakannya dapat digunakan pada masalah-masalah umum. Penalaran Induktif merupakan dasar dari proses yang paling kreatif yang terjadi di "dunia nyata". Fisika membutuhkan laboratorium yang ideal untuk membangun kemampuan dalam penalaran induktif dan menemukan hal-hal baru.

Berikut ini gambaran umum dari langkah kerja Polya (lihat Polya, 2004):

1. Pemahaman pada masalah (Identifikasi dari tujuan)

Langkah pertama adalah membaca soalnya dan meyakinkan diri bahwa siswa memahaminya secara benar. Pertanyaan yang diajukan pada langkah ini adalah:

- Apa yang tidak diketahui?
- Kuantitas apa yang diberikan pada soal?
- Kondisinya bagaimana?
- Apakah ada kekecualian?

Untuk beberapa masalah akan sangat berguna untuk membuat diagramnya dan mengidentifikasi kuantitas-kuantitas yang diketahui dan dibutuhkan pada diagram tersebut. Biasanya dibutuhkan membuat beberapa notasi (x , a , b , c , V =volume, m =massa dsb).

2. Membuat Rencana Pemecahan Masalah

Mencari hubungan antara informasi yang diberikan dengan yang tidak diketahui yang memungkinkan untuk menghitung variabel yang tidak diketahui. Akan sangat berguna untuk membuat pertanyaan: "Bagaimana saya akan menghubungkan hal yang diketahui untuk mencari hal yang tidak diketahui?". Jika tidak terlihat hubungan secara langsung, gagasan berikut ini mungkin akan menolong dalam membagi masalah ke sub masalah.

Membuat sub masalah pada masalah yang kompleks, akan sangat berguna untuk membantu jika masalah dibagi ke dalam beberapa sub masalah, sehingga dapat dibangun untuk menyelesaikan masalah.

* Mencoba mengenali sesuatu yang sudah dikenal.

Menghubungkan masalah tersebut dengan hal yang sebelumnya sudah dikenali. Melihat pada hal yang tidak diketahui dan mencoba untuk mengingat masalah yang mirip atau memiliki prinsip yang sama.

* Mencoba untuk mengenali polanya.

Beberapa masalah dapat dipecahkan dengan cara mengenali polanya. Pola tersebut dapat berupa pola geometri atau pola aljabar. Jika terlihat keteraturan atau pengulangan dalam soal, maka dapat diduga hal-hal yang selanjutnya akan terjadi dari pola tersebut dan membuktikannya.

* Menggunakan analogi

Mencoba untuk memikirkan analogi dari masalah tersebut, yaitu, masalah yang mirip, masalah yang berhubungan, yang lebih sederhana sehingga memberikan petunjuk yang dibutuhkan dalam memecahkan masalah yang lebih sulit. Contoh, jika masalahnya ada pada ruang tiga dimensi, maka dapat dicoba untuk melihat masalah sejenis dalam bidang dua dimensi. Atau jika masalah terlalu umum, maka dapat mencobanya pada kasus khusus.

* Memasukkan sesuatu yang baru

Mungkin suatu saat perlu untuk memasukan sesuatu yang baru, peralatan tambahan, untuk membuat hubungan antara data dengan hal yang tidak diketahui. Contoh, diagram sangat bermanfaat dalam membuat suatu garis bantu.

* Membuat kasus

Kadang-kadang suatu masalah harus dipecahkan ke dalam beberapa kasus lalu setiap kasus terbut dipecahkan.

* Memulai dari akhir

(Mengasumsikan Jawabannya)

Sangatlah berguna apabila membuat pemisalan solusi masalah, tahap demi

tahap mulai dari jawaban masalah sampai ke data yang diberikan.

3. Melaksanakan Rencana

Dalam melaksanakan rencana yang tertuang pada langkah kedua, hendaknya diperiksa setiap langkah dalam rencana dan menuliskannya secara detail untuk memastikan bahwa tiap langkah sudah benar. Sebuah persamaan tidaklah cukup!

4. Melihat kembali

Setelah didapat hasilnya, maka hasil tersebut perlu dikritisi. Tujuannya adalah untuk melihat kelemahan dari solusi yang didapatkan (seperti: ketidak konsistenan atau ambiguitas atau langkah yang tidak benar).

Inilah langkah kerja Polya yang digunakan untuk memecahkan masalah yang ada dalam Matematika.

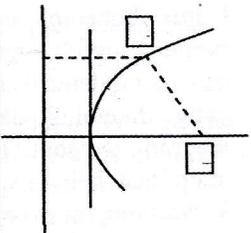
Langkah Kerja Polya dalam GADR

Bila ditinjau dari langkah-langkah Polya tersebut, maka hal ini dapat dilakukan untuk membantu menganalisis masalah yang ada pada GADR. Namun masih juga ada yang mengalami kesulitan dalam menterjemahkan permasalahan yang disajikan, untuk itu diperlukan langkah yang dapat menjembatani permasalahan yang abstrak dalam GADR ke dunia nyata atau semi nyata. Untuk menganalisis masalah GADR yang abstrak maka dapat dilakukan pengkajian dengan membuat sketsa dari hal-hal yang diketahui dalam masalah. Dengan demikian dapat membantu memecahkan masalah yang abstrak.

Langkah kerja Polya terdiri dari empat langkah yaitu memahami masalah, menyusun rencana, melaksanakan rencana dan memeriksa kembali. Dalam mengerjakan masalah GADR, langkah kerja Polya ini dapat dijadikan landasan untuk menyelesaikan masalah itu. Berikut diperlihatkan pengembangan langkah kerja Polya dalam menyelesaikan masalah GADR yang ditampilkan pada Tabel 1.

Tabel 1. Langkah Polya dalam Belajar Parabola pada GADR

Langkah Polya	Kegiatan GADR
1. Pemahaman masalah • Apa yang diketahui.	Diketahui: Andaikan ada titik A (a, b) sebagai titik tertentu dan garis k

<ul style="list-style-type: none"> • Kondisi • Kuantitas yang ada pada soal 	sebagai titik tertentu. Ambil sembarang titik B (x_0, y_0). Jarak dari titik A ke B = jarak B ke grs k
2. Membuat rencana pemecahan masalah <ul style="list-style-type: none"> • Hal yang tidak diketahui • Mengenali sesuatu yang sudah dikenali. 	Berapa banyak titiknya? Bagaimana mencari tempat kedudukan jika tidak diketahui banyak titik pada tempat kedudukan tersebut. Hal yang sudah dikenali yaitu jarak titik ke titik dan titik ke garis. Jarak titik A dan B: $ AB = \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2}$ Jarak titik ke g:
3. Membuat sketsa dari hal-hal yang diketahui	Berdasarkan keterangan tempat kedudukan titik yang mempunyai jarak yang sama terhadap satu titik dan satu garis tertentu maka dimulai dari menggambarkan satu titik dengan keterangan tersebut.  Kemudian disketsakan lagi titik-titik yang lain. Berdasarkan sketsa maka akan didapat parabola.
4. Melaksanakan rencana	Gambar telah didapat yaitu diperkirakan berbentuk parabola, maka berdasarkan

	keterangan akan dicari : $ AB = \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2}$
5. Melihat kembali:	Setelah direncanakan ternyata hasilnya berupa parabola.

Dari table 1 tergambar langkah kerja Polya dan kegiatan belajar GADR. Pada tahap pemahaman masalah, diungkapkan hal-hal yang diketahui, kondisi yang ada dari definisi atau masalah serta kuantitas yang ada pada masalah. Misalnya dalam mempelajari parabola, definisinya adalah tempat kedudukan titik yang mempunyai jarak yang sama terhadap titik tertentu dan garis tertentu (Sukirman, 2009). Untuk mengetahui parabola dan sifat-sifatnya maka dimulai dari hal-hal yang diketahui yang ada pada definisi, yaitu ada titik tertentu dan garis tertentu. Kemudian kondisinya, jarak titik sembarang dengan garis tertentu sama dengan jarak titik sembarang dengan titik tertentu. Ini langkah awal memahami parabola dari definisinya.

Selanjutnya dibuat rencana untuk mengetahui parabola dan sifat-sifatnya dengan mencatat hal-hal yang tidak diketahui dari definisi. Hal yang tidak diketahui antara lain, banyak titik yang menjadi tempat kedudukan. Kemudian hal yang sudah dikenal adalah ada jarak dari titik sembarang ke titik tertentu dan ada jarak dari titik sembarang ke garis tertentu. Dari sini diingat kembali tentang materi rumus jarak titik ke titik dan titik ke garis. Kemudian direncanakan penyelesaiannya dengan menggunakan situasi yang telah diketahui dan yang telah dikenal.

Setelah tahap kedua yaitu merencanakan penyelesaian dilakukan maka perlu dibuatkan sketsa untuk mendapatkan gambar berdasarkan definisi. Untuk membuat sketsa dimulai dari koordinat Kartesius. Pada koordinat ini ditentukan terlebih dahulu titik dan garis tertentu yang ada pada definisi. Selanjutnya diletakkan titik sembarang pada koordinat tersebut. Dengan menggunakan jangka dibuat jarak yang sama dari titik sembarang ke titik tertentu dan garis tertentu. Langkah ini dilakukan untuk titik-titik yang lain sehingga pada akhirnya dapat

dihubungkan titik-titik sembarang tersebut membentuk sebuah sketsa bidang datar. Ini langkah ketiga, yaitu membuat sketsa

Langkah keempat melaksanakan perhitungan yang telah direncanakan. Hasil pekerjaan dari tahap keempat ini menghasilkan persamaan parabola. Selanjutnya dapat ditentukan sifat-sifat yang ada pada parabola, seperti sumbu simetri, direktrix dan lainnya.

Tahap yang kelima adalah melihat kembali langkah-langkah yang telah ditempuh, dari langkah pertama sampai langkah keempat. Untuk mengecek kembali dapat dilakukan dengan memilih salah satu titik pada parabola, lalu dicari jarak titik tersebut ke garis tertentu atau direktriks dan titik tersebut ke titik tertentu atau focus. Jika jarak keduanya sama maka langkah yang ditempuh dan hasilnya sudah tepat namun jika jarak keduanya tidak sama maka terdapat kekeliruan dalam langkah yang ditempuh.

Selain mempelajari parabola, langkah kerja Polya ini dapat juga digunakan untuk mempelajari Ellips dan hiperbola serta tempat kedudukan. Langkah-langkah pembelajarannya analog dengan langkah mempelajari parabola.

Penambahan langkah membuat sketsa ini merupakan jembatan untuk mempelajari konsep geometri yang abstrak, seperti parabola yang dibahas tadi. Definisinya abstrak, namun dengan adanya sketsa dapat memvisualkan bentuk parabola yang dimaksud. Begitu pula jika ada permasalahan geometri yang berkaitan dengan tempat kedudukan, biasanya kata-kata yang tersusun dalam kalimat terbaca begitu abstrak. Dengan menggunakan langkah kerja Polya yang ditambah dengan membuat sketsa maka akan terdapat visual yang membantu pekerjaan menyelesaikan rencana permasalahan yang dihadapi.

Penutup

Langkah kerja Polya biasanya digunakan untuk memecahkan soal pemecahan masalah. Di samping itu, langkah kerja Polya dapat juga digunakan untuk mempelajari dan menyelesaikan soal GADR. Untuk mempelajari GADR perlu ditambahkan satu langkah lagi yaitu membuat sketsa. Jadi langkah kerja Polya dikembangkan menjadi:

1. Memahami masalah,

2. Menyusun rencana,
3. Membuat sketsa,
4. Melaksanakan rencana,
5. Memeriksa kembali.

Daftar Pustaka

Abussakir. 2009. *Pembelajaran Geometri dan Teori van Hiele*.
<http://abdussakir.wordpress.com/2009/01/25/pembelajaran-geometri-dan-teori-van-hiele/> diakses tanggal 2-3-2011.

Karso, dkk. 2010. *Pendidikan Matematika I*. Jakarta : Universitas Terbuka.

Polya, G. 2004. *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. One of Princeton University Press's Notable Centenary Titles.

Sudrajat. 2005. *Teknik Pemecahan Masalah Ala G Polya*.
<http://kangguru.wordpress.com/2007/02/01/teknik-pemecahan-masalah-ala-g-polya/>

Sukirman. 2009. *Modul Geometri Analitik Datar dan Ruang*. Jakarta: Universitas Terbuka.