

**PENGEMBANGAN PEMBELAJARAN BERBASIS BUKTI
DENGAN PENDEKATAN APOS PADA MATERI
EKSPONENSIAL UNTUK MELATIH KEMAMPUAN
PENALARAN**

TESIS

Oleh:

Leonardo Jonathan Shinariko

NIM : 06022682125029

Program Studi Pendidikan Matematika



**FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
PENDIDIKAN MATEMATIKA**

2022

**PENGEMBANGAN PEMBELAJARAN BERBASIS BUKTI
DENGAN PENDEKATAN APOS PADA MATERI
EKSPONENSIAL UNTUK MELATIH KEMAMPUAN
PENALARAN**

TESIS

oleh
Leonardo Jonathan Shinariko
NIM: 06022682125029
Program Studi Magister Pendidikan Matematika

Mengesahkan:

Pembimbing 1,



Dr. Yusuf Hartono, M.Sc
NIP 196411161990031002

Pembimbing 2,



Dr. Darmowijoyo, M.Si.
NIP 196508281991031003

Mengetahui:

Koordinator Program Studi Magister Pendidikan Matematika,



Cecil Hiltrimartin, M.Si., Ph.D.
NIP. 196403111988032001

**PENGEMBANGAN PEMBELAJARAN BERBASIS BUKTI
DENGAN PENDEKATAN APOS PADA MATERI
EKSPONENSIAL UNTUK MELATIH KEMAMPUAN
PENALARAN**

TESIS

oleh

Leonardo Jonathan Shinariko

NIM: 06022682125029

Telah diujikan dan lulus pada:

Hari : Selasa

Tanggal : 27 Desember 2022

TIM PENGUJI

1. Ketua : Dr. Yusuf Hartono, M.Sc.
2. Sekretaris : Dr. Darmawijoyo, M.Si.
3. Anggota : Prof. Dr. Ratu Ilma Indra Putri, M.Si.
4. Anggota : Dr. Ely Susanti, M.Pd.



Handwritten signatures of the examiners, including the names Yusuf Hartono, Darmawijoyo, and Ely Susanti, each on a separate line.

**Palembang, Desember 2022
Mengetahui,
Koordinator Program Studi,**



Handwritten signature of Cecel Hiltrimartin.

**Cecel Hiltrimartin, M.Si., Ph.D.
NIP 196403111988032001**

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Leonardo Jonathan Shinariko

NIM : 06022682125029

Program Studi : Magister Pendidikan Matematika

menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa tesis yang berjudul "*Pengembangan Pembelajaran Berbasis Bukti Dengan Pendekatan APOS Pada Materi Eksponensial Untuk Melatih Kemampuan Penalaran*" ini adalah benar-benar karya saya sendiri yang merupakan penelitian dari hibah PTM dengan nomor kontrak induk: 142/E5/PG.02.00.PT/2022, kontrak turunan: 0144.03/UN9.3.1/PL/2022 dan tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku sesuai dengan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Republik Indonesia Nomor 17 tahun 2010 tentang pencegahan Plagiat di Perguruan Tinggi. Apabila di kemudian hari ada pelanggaran yang ditemukan dalam tesis ini dan / atau ada pengaduan dari pihak lain terhadap keaslian karya saya ini, saya bersedia menanggung sanksi yang dijatuhkan kepada saya.

Demikianlah pernyataan ini dibuat dengan sungguh-sungguh tanpa paksaan dari pihak manapun.

Palembang, 27 Desember 2022

Yang membuat pernyataan,



Leonardo Jonathan Shinariko

NIM 06022682125029

PRAKATA

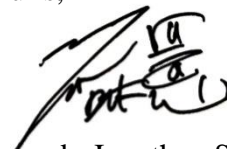
Tesis dengan judul “Pengembangan Pembelajaran Berbasis Bukti Dengan Pendekatan APOS Pada Materi Eksponensial Untuk Melatih Kemampuan Penalaran” disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Magister Pendidikan (M.Pd.) pada Program Studi Magister Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sriwijaya. Dalam mewujudkan tesis ini, penulis telah mendapatkan bantuan dari berbagai pihak.

Oleh sebab itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada Dr. Yusuf Hartono, M.Sc. dan Dr. Darmawijoyo., M.Si., sebagai pembimbing atas segala bimbingan yang telah diberikan dalam penulisan tesis ini. Penulis juga berterima kasih kepada Direktorat Riset, Teknologi, dan Pengabdian Kepada Masyarakat Direktorat Jendral Pendidikan Tinggi, Riset, dan Teknologi yang telah membiayai penelitian ini sesuai skema PTM dengan nomor kontrak induk: 142/E5/PG.02.00.PT/2022 tanggal 10 Mei 2022 dan nomor kontrak turunan: 0144.03/UN9.3.1/PL/2022 tanggal 17 Mei 2022. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Dr. Hartono, M.A., selaku Dekan FKIP Unsri. Dr. Ketang Wiyono, S.Pd., dan Drs. Kodri Madang, M.Si., Ph.D., selaku Ketua dan Sekertaris Jurusan Pendidikan MIPA FKIP Unsri. Cecil Hiltrimartin, M.Si., Ph.D., selaku Koordinator Program Studi Pendidikan Matematika S-2 yang telah memberikan kemudahan dalam pengurusan administrasi selama penulisan tesis ini. Ucapan terima kasih juga ditujukan kepada Prof. Dr. Ratu Ilma Indra Putri, M.Si. dan Dr. Ely Susanti, M.Pd. sebagai anggota penguji yang telah memberikan sejumlah saran untuk perbaikan tesis ini.

Akhir kata, semoga tesis ini dapat bermanfaat untuk pembelajaran bidang studi Pendidikan Matematika dan pengembangan ilmu pengetahuan, teknologi, dan seni.

Palembang, Desember 2022

Penulis,



Leonardo Jonathan Shinariko

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan rahmat Allah YME, tesis ini kupersembahkan kepada:

- ❖ *Tuhanku Yesus Kristus yang telah memberikan kemudahan dan Kelancaran sehingga tesis ini dapat diselesaikan dengan tepat waktu.*
- ❖ *Kedua orang tuaku yang tercinta dan tersayang **Papa Sulimin dan Mama Temy Linda** yang senantiasa mendoakan, mengharapkan keberhasilanku setiap saat. **Kakakku Gilbert Nathaniel Shinariko dan Adikku Joshua Manuel Shinariko** yang selalu dan senantiasa mengharapkan keberhasilanku, saya mengucapkan terima kasih atas segala do'a, nasehat, semangat, kasih sayang dan dukungan yang begitu besar.*
- ❖ *Keluarga besar, sahabat, dan teman seperjuangan angkatan 2021 Magister Pendidikan Matematika Universitas Sriwijaya.*
- ❖ *Dosen pembimbing tesisku **Bapak Dr. Yusuf Hartono, M.Sc.** dan **Bapak Dr. Darmawijoyo, M.Si.** yang telah sabar membimbingku dalam penyusunan tesis ini.*
- ❖ *Dosen Pendidikan Matematika Unsri: **Ibu Dra. Cecil Hiltri Martin, M.Si., Ibu Prof. Dr. Ratu Ilma Indra Putri, M.Si., Ibu Dr. Ely Susanti, M.Pd., Bapak Jeri Araiku, M.Pd., Ibu Elika Kurniadi, M.Sc., dan semua dosen-dosen** yang selalu memberikan semangat untuk menyelesaikan studi ini. Terimakasih juga kepada Seluruh Dosen Pendidikan Matematika untuk ilmu yang sudah diberikan.*
- ❖ *Guru Matematika SMA Negeri 1 Palembang: **Ibu Nety Wahyu Saputri, M.Pd.***
- ❖ *Almamaterku.*

*Motto: **Usia Muda Tetap Harus Cari Pengalaman dan Tambah Ilmu** Setinggi-tingginya, selagi waktu masih ada.*

RIWAYAT HIDUP



Leonardo Jonathan Shinariko. Lahir di Kota Palembang, 20 April 2000, anak kedua dari 3 bersaudara beralamat di Jl. KS Tubun GG. Rambe no.455/1157 RT. 07 Kel. Kepandean Baru, Kota Palembang, Sumatera Selatan. Anak dari pasangan Bapak Sulimin dan Ibu Temy Linda. Penulis menamatkan Sekolah Dasar di SD Xaverius 1 Palembang dan selesai pada tahun 2011. Lalu, penulis melanjutkan di sekolah Menengah Pertama

(SMP) di SMP Xaverius 6 Palembang dan selesai pada Tahun 2014. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan di Sekolah Menengah Atas (SMA) di Sekolah Palembang Harapan dan selesai pada tahun 2017. Kemudian penulis melanjutkan Pendidikan Tinggi Program Strata-1 di Universitas Sriwijaya Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Jurusan Pendidikan MIPA, Program Studi Pendidikan Matematika pada tahun 2017 dan selesai pada tahun 2020. Pada tahun berikutnya peneliti langsung melanjutkan pendidikan Strata dua (S2) di Program Magister Pendidikan Matematika Universitas Sriwijaya dan dapat menyelesaikannya selama 3 semester setelah melakukan ujian tesis pada tanggal 27 Desember 2022.

Kontak:

E-mail : yesjonathan2@gmail.com

WA : 0895636771230

DAFTAR ISI

HALAMAN PENGESAHAN TESIS	ii
HALAMAN PERSETUJUAN PENGUJI	iii
HALAMAN PERNYATAAN.....	iv
PRAKATA	v
HALAMAN PERSEMBAHAN	vi
RIWAYAT HIDUP	vii
DAFTAR ISI.....	viii
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR.....	xii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
ABSTRAK	xv
ABSTRACT	xvi
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian.....	3
1.4 Manfaat Penelitian.....	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....	4
2.1 Bukti dalam Matematika	4
2.2 Kemampuan Penalaran.....	6
2.3 Teori APOS	7
2.4 Pembelajaran Bukti dengan Pendekatan APOS	10
2.5 Eksponensial.....	12
BAB III METODE PENELITIAN	19
3.1 Jenis Penelitian	19
3.2 Fokus Penelitian	19
3.3 Subjek Penelitian.....	19
3.4 Waktu dan Tempat Penelitian	19
3.5 Metode Penelitian.....	19

3.6 Teknik Pengumpulan Data	22
3.6.1 Observasi	22
3.6.2 Hasil Kerja Siswa	22
3.6.3 Tes.....	23
3.7 Teknik Analisis Data.....	23
3.7.1 Analisis Data Observasi.....	23
3.7.2 Analisis Hasil Kerja Siswa	23
3.7.3 Analisis Tes	23
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	25
4.1 Hasil Penelitian	25
4.1.1 Deskripsi Persiapan Penelitian	25
4.1.2 Desain Pendahuluan.....	26
4.1.2.1 Pembelajaran 1: Bilangan Berpangkat (Eksponen)	30
4.1.2.2 Pembelajaran 2: Bentuk Akar	34
4.1.3 Desain Percobaan (<i>Experiment Design</i>)	38
4.1.3.1 Siklus 1 (Pilot experiment)	38
4.1.3.1.1 Analisis Hasil Pre-test Siswa	38
4.1.3.1.2 Pembelajaran 1.....	41
4.1.3.1.3 Pembelajaran 2.....	47
4.1.3.1.4 <i>Post-test</i>	51
4.1.3.2 Revisi Hypothetical Learning Trajectory.....	52
4.1.3.2.1 Revisi Tes	52
4.1.3.2.2 Revisi LKPD 1.....	53
4.1.3.2.3 Revisi LKPD 2.....	56
4.1.3.3 Siklus 2 (Teaching experiment).....	58
4.1.3.3.1 <i>Pre-test</i> pada <i>Teaching experiment</i>	58
4.1.3.3.2 Pembelajaran 1 pada <i>Teaching experiment</i>	59
4.1.3.3.3 <i>Retrospective Analysis</i> Pembelajaran 1	63
4.1.3.3.4 Pembelajaran 2 pada <i>Teaching experiment</i>	64
4.1.3.3.5 <i>Retrospective Analysis</i> Pembelajaran 2	68
4.1.3.3.6 <i>Post test</i>	69
4.2 Pembahasan.....	75

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN	77
5.1 Kesimpulan.....	77
5.2 Saran	77
DAFTAR PUSTAKA	78
LAMPIRAN.....	83

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Penilaian.....	24
Tabel 4.1 Agenda Kegiatan Penelitian.....	26
Tabel 4.2 Konjektur Berpikir Siswa Pertemuan 1	32
Tabel 4.3 Konjektur Berpikir Siswa Pertemuan 2	35
Tabel 4.4 Perbandingan HLT dan ALT pada Pembelajaran 1	63
Tabel 4.5 Perbandingan HLT dan ALT pada Pembelajaran 2.....	68

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Model Cara Berpikir Siswa tentang Pembuktian	4
Gambar 2.2 Deskripsi Kemampuan Pembuktian Siswa	5
Gambar 2.3 Struktur Mental dan Mekanisme APOS.....	8
Gambar 3.1 Proses Siklik dalam Design Research	20
Gambar 3.2 Struktur Mental dan Mekanisme Mental dalam Teori APOS (Arnon et al., 2014).....	21
Gambar 3.3 Prosedur Pelaksanaan Penelitian	22
Gambar 4.1 Two-column proof yang Digunakan Dalam LKPD	28
Gambar 4.2 HLT Pembelajaran Berbasis Bukti Menggunakan Teori APOS	29
Gambar 4.3 Desain Awal Soal <i>Pre-test</i>	31
Gambar 4.4 Jawaban <i>Pre-test</i> Siswa Pada Soal Nomor 1.....	39
Gambar 4.5 Jawaban <i>Pre-test</i> Siswa pada Soal Nomor 2.....	39
Gambar 4.6 Jawaban <i>Pre-test</i> Siswa pada Soal Nomor 3.....	39
Gambar 4.7 Soal <i>Pre-test</i> Nomor 4.....	40
Gambar 4.8 Jawaban <i>Pre-test</i> Siswa pada Soal Nomor 5.....	40
Gambar 4.9 Jawaban <i>Pre-test</i> Siswa pada Soal Nomor 6 dan 8	41
Gambar 4.10 Jawaban <i>Pre-test</i> Siswa pada Soal Nomor 7.....	41
Gambar 4.11 Pembelajaran yang Membahas LKPD 1	42
Gambar 4.12 Pembuktian Siswa KAA Dan NAF Pada LKPD 1 Bagian B.....	43
Gambar 4.13 Pembuktian Siswa MBCN dan RAG Pada LKPD 1 Bagian C.....	45
Gambar 4.14 Pembuktian Siswa KAA dan NAF pada LKPD 1 Bagian D.....	46
Gambar 4.15 Pembuktian Siswa NSM dan RKD pada <i>Two-column proof</i> pada Bagian D.....	47
Gambar 4.16 Pembelajaran yang Membahas LKPD 2	48
Gambar 4.17 Penjelasan yang Diberikan Untuk Materi Bagian A	49
Gambar 4.18 Pengerjaan Siswa Terhadap Pembuktian LKPD 2 Bagian A.....	50
Gambar 4.19 Alasan Siswa Dalam <i>Two-column proof</i> Pada LKPD 2 Bagian C..	50
Gambar 4.20 Soal <i>Post-test</i>	51
Gambar 4.21 Hasil Revisi <i>Post-test</i>	53
Gambar 4.22 Revisi Kata Perintah Soal.....	54

Gambar 4.23 Revisi Latihan Soal pada LKPD 1 Bagian B	55
Gambar 4.24 Revisi Latihan Soal pada LKPD 1 Bagian C	55
Gambar 4.25 Revisi Latihan Soal pada LKPD 1 Bagian D	56
Gambar 4.26 Revisi Latihan Soal pada LKPD 2 Bagian B	57
Gambar 4.27 Penambahan Latihan Soal pada LKPD 2 Bagian C	57
Gambar 4.28 Penambahan Bagian D pada LKPD 2	58
Gambar 4.29 <i>Pre-test</i> pada <i>Teaching experiment</i>	59
Gambar 4.30 Pengerjaan Soal Latihan oleh Siswa AS dan OE	61
Gambar 4.31 Pengerjaan Pembuktian bagian D oleh siswa DNF dan SKR	62
Gambar 4.32 Pengerjaan <i>Two-column proof</i> oleh KA dan VP.....	63
Gambar 4.33 Pengerjaan Siswa N dan AA pada Latihan Soal LKPD 2 pada <i>Teaching Experiment</i>	65
Gambar 4.34 Pengerjaan Siswa NA dan RA pada LKPD 2 Bagian B Nomor 1 dan 2.....	66
Gambar 4.35 Pengerjaan Siswa AGA dan AVA pada Soal 1 LKPD 2 Bagian C	67
Gambar 4.36 Pengerjaan Siswa AGA dan EVA pada Bagian D LKPD 2.....	68
Gambar 4.37 Siswa mengerjakan <i>Post-test</i>	70
Gambar 4.38 Jawaban Siswa AGA pada <i>Post-test</i> Nomor 1	70
Gambar 4.39 Jawaban Siswa DPP pada <i>Post-test</i> Nomor 2	71
Gambar 4.40 Jawaban Siswa MFA pada <i>Post-test</i> Nomor 3	71
Gambar 4.41 Jawaban Siswa ABAP pada <i>Post-test</i> Nomor 4.....	71
Gambar 4.42 Jawaban Siswa DNF pada <i>Post-test</i> Nomor 5.....	72
Gambar 4.43 Jawaban Siswa KA pada <i>Post-test</i> Nomor 6.....	73
Gambar 4.44 Jawaban Siswa VP pada <i>Post-test</i> Nomor 7.....	73
Gambar 4.45 Jawaban Siswa pada <i>Post-test</i> Nomor 8.....	74

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Usul Judul Tesis.....	84
Lampiran 2. Surat Keputusan Pembimbing Tesis.....	85
Lampiran 3. Surat Izin Penelitian FKIP UNSRI.....	87
Lampiran 4. Surat Izin Penelitian dari Dinas Pendidikan.....	88
Lampiran 5. Surat Keterangan Telah Melakukan Penelitian.....	89
Lampiran 6. <i>Letter Of Acceptance</i> (LOA).....	90
Lampiran 7. Artikel Publikasi.....	91
Lampiran 8. LKPD 1 untuk <i>Teaching Experiment</i>	103
Lampiran 9. LKPD 2 untuk <i>Teaching Experiment</i>	112
Lampiran 10. Kunci Jawaban LKPD 1.....	120
Lampiran 11. Kunci Jawaban LKPD 2.....	124
Lampiran 12. RPP Pertemuan 1.....	129
Lampiran 13. RPP Pertemuan 2.....	133
Lampiran 14. Konjektur Pikir Pertemuan 1.....	136
Lampiran 15. Konjektur Pikir Pertemuan 2.....	139
Lampiran 16. Soal <i>Pre-test</i>	142
Lampiran 17. Soal <i>Post-Test</i>	144
Lampiran 18. Kisi-kisi Soal.....	146
Lampiran 19. Dokumentasi Penelitian.....	148
Lampiran 20. Bukti Cek Plagiat.....	151

ABSTRAK

Pembelajaran berbasis bukti merupakan pembelajaran matematika melalui pembuktian agar memperkuat konsep siswa. Penggunaan teori APOS (Aksi, Proses, Objek, dan Skema) bertujuan untuk pendeskripsian struktur mental siswa dirangkum dalam HLT (*Hypothetical Learning Trajectory*). Berdasarkan dari kepentingan pembelajaran matematika yang menuntut siswa agar mempunyai kemampuan penalaran. Penelitian ini bertujuan untuk menghasilkan mini teori pada pembelajaran berbasis bukti dengan menggunakan pendekatan teori APOS tentang struktur mental dan mekanisme mental siswa. Peran pembelajaran untuk meningkatkan kemampuan penalaran siswa. Metode penelitian yang digunakan adalah design research tipe validasi. Subjek penelitian sebanyak 34 orang siswa SMA Negeri 1 Palembang. Untuk itu penelitian ini akan membahas konstruksi HLT yang akan menjadi mini theory. Dalam tulisan ini, peneliti akan berfokus kepada pembahasan HLT pembelajaran berbasis bukti dengan penggunaan pendekatan teori APOS pada pembelajaran pertama. Hasil dari penelitian ini adalah lintasan belajar yang dapat digunakan untuk 2 kali pembelajaran. Lintasan belajar yang dibuat dapat melatih kemampuan penalaran siswa dilihat dari hasil tes yang telah dilangsungkan.

Kata kunci: APOS; HLT; Kemampuan Penalaran; Pembelajaran Berbasis Bukti.

ABSTRACT

Proof-based learning is learning mathematics through proof and proving to strengthen students' concepts. The use of APOS theory (Action, Process, Object, and Schema) aims to describe students' mental structures summarized in Hypothetical Learning Trajectory (HLT). Their interest in learning mathematics requires students to have reasoning ability. This study aims to produce a mini theory of proof-based learning using the APOS theory approach about mental structure and mental mechanisms. The role of learning is to improve students' reasoning ability. The research method used is the design research validation type. The research subjects were 34 students from SMA Negeri 1 Palembang. For this reason, this study will discuss the construction of HLT which will become a mini theory. In this paper, the researcher will focus on the first lesson's HLT proof-based learning using APOS theory approach. The results of this study are learning trajectories that can be used for 2 lessons. The learning trajectory created can train students' reasoning abilities seen from the results of the tests that have been carried out.

Keywords: APOS; HLT; Reasoning Ability; Proof-based Learning.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar belakang

Pembelajaran matematika mempunyai tubuh yaitu perhitungannya dan jiwa yaitu analisis (Eriksson et al., 2004). Bukti berperan sebagai jiwa dalam matematika (Mañosa, 2022), karena itu bukti dapat menjadi salah satu sarana dalam pembelajaran matematika (Dubinsky & McDonald, 2001; Laamena et al., 2018; Pfeiffer & Quinlan, 2015a). Keindahan dalam pembuktian adalah saat menyelesaikan dan/atau mengerti tentang pembuktian (Pfeiffer & Quinlan, 2015a; Wolchover, 2017). Dalam analisis bukti diperlukan kemampuan memahami serta mengaitkan bukti satu dengan yang lain melalui argumentasi (Ahmadpour et al., 2019; Shinno et al., 2018). Pembuktian merupakan rangkaian unik dari argumentasi logis yang membuat suatu pernyataan itu benar (Hanna & Reid, 2019).

Menurut *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) mengungkapkan bahwa argumentasi dan pembuktian merupakan satu dari lima kemampuan yang harus dimiliki siswa, yaitu pemecahan masalah, penalaran, komunikasi, koneksi, dan representasi. Pembelajaran berbasis bukti dapat mengakomodasi pembelajaran untuk meningkatkan kemampuan argumentasi dan pembuktian. Pembelajaran mengenai bukti akan dapat meningkatkan kemampuan penalaran siswa (Mañosa, 2022; Modeste et al., 2017). Pembelajaran pembuktian menyediakan kemampuan matematis yang harus dimiliki oleh siswa (Kemendikbud, 2019). Pengalaman pembelajaran pembuktian merupakan hal penting yang ada dalam matematika karena sangat mendukung konstruksi berpikir matematis (Laamena et al., 2018).

Penelitian Ahmadpour et al. (2019) memodelkan cara siswa memahami bukti dengan membaca bukti dalam abstraksi dan formulasi pembuktian. Selanjutnya, Rocha (2019) memberi saran untuk melakukan penelitian yang mengajarkan *simple proof* yang banyak diabaikan oleh guru matematika. Di China, ada juga penelitian pengembangan tentang bahan ajar tentang pembuktian (Fan et al., 2018), juga pada Zhang & Qi (2019) untuk penelitian serupa tentang pengembangan buku teks (Fan et al., 2018). Pembelajaran yang berkaitan dengan pembuktian harus dikembangkan, salah satu cara pembelajaran yang efektif adalah

pembelajaran berbasis bukti (Hanna & Reid, 2019; Shinariko et al., 2020, 2022; Wittmann, 2021). Tetapi dalam pembelajaran pembuktian siswa sering kali menyerah karena pembelajaran pembuktian yang terlalu sulit (Selden & Selden, 2008). Salah satu cara yang efektif dan juga akan dipakai dalam pembelajaran nanti adalah penggunaan *two-column proof*.

Teori APOS (*Action, Procecss, Object, Schema*) merupakan teori yang berfokus pada sikap mental siswa selama pembelajaran dalam mengkonstruksi konsep matematika (Arnon et al., 2014; Saftari et al., 2020). Berikut penelitian tentang APOS, yaitu Saftari et al., (2020) melakukan penitilian pengembangan aktivitas siswa dengan menggunakan teori APOS untuk mengerti konsep penjumlahan Riemann. Penelitian Mulyono (2011) membahas tentang peran teori APOS, merinci indikator yang diperoleh dari implementasi dalam pembelajaran. Syamsuri & Marethi (2018) membahas tentang analisis proses kognitif siswa dalam aktivitas pembuktian. Penelitian Syamsuri et al. (2017) menjelaskan tentang mengapa siswa belum dapat mengkonstruksi pembuktian dengan menggunakan teori APOS dalam tahap analisa. Arnawa et al. (2007) membahas tentang penerapan teori APOS untuk meningkatkan kemampuan pembuktian siswa. Wijayanti et al. (2019) membahas tentang struktur mental siswa dalam pembelajaran pembuktian yang dideskripsikan menggunakan APOS. Chamberlain & Vidakovic (2021) menggunakan APOS untuk menganalisa kemampuan dan pengertian siswa terhadap pembuktian.

Dari penelitian yang telah disampaikan belum mengungkapkan dengan jelas bagaimana cara siswa untuk mengerti secara utuh tentang bukti pada pembelajaran. Perincian terhadap mental siswa dalam pelaksanaan pembuktian belum muncul yang akan dikaitkan dengan kemampuan penalaran. Pada penelitian Syamsuri & Marethi (2018) pembahas mengenai kurangnya kemampuan siswa dalam pembuktian dilihat dari struktur mental APOS dan memberi saran untuk melanjutkan penelitian lebih dalam. Berangkat dari permasalahan diatas, akan dibuat pengembangan terhadap pembelajaran berbasis bukti dengan pendekatan teori APOS yang bertujuan untuk meningkatkan kemampuan penalaran siswa.

Dari penjelasan di atas maka peneliti mengambil judul penelitian **“Pengembangan Pembelajaran Berbasis Bukti Dengan Pendekatan APOS Pada Materi Eksponensial Untuk Melatih Kemampuan Penalaran”**.

1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang didapatkan permasalahan dalam penelitian ini, yaitu

1. Bagaimana lintasan belajar dari pembelajaran pembuktian dengan pendekatan teori APOS pada SMA Negeri 1 Palembang?
2. Bagaimana peran pembelajaran pembuktian dengan pendekatan APOS dapat mendukung kemampuan penalaran siswa di SMA Negeri 1 Palembang?

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk

1. Menghasilkan lintasan belajar pada pembelajaran berbasis bukti dengan pendekatan APOS
2. Mengetahui peran pembelajaran berbasis bukti dengan pendekatan APOS yang dapat mendukung kemampuan penalaran siswa di SMA Negeri 1 Palembang

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian yang diharapkan adalah dapat:

1. Membantu siswa meningkatkan kemampuan penalaran
2. Digunakan oleh guru untuk pembelajaran dikelas
3. Digunakan sebagai bahan untuk penelitian selanjutnya mengenai pembelajaran

DAFTAR PUSTAKA

- Afgani, M. W., Suryadi, D., & Dahlan, J. A. (2019). The enhancement of pre-service mathematics teachers' mathematical understanding ability through ACE teaching cyclic. *Journal of Technology and Science Education*, 9(2), 153–167. <https://doi.org/10.3926/jotse.441>
- Ahmadpour, F., Reid, D., & Fadaee, M. R. (2019). Students' ways of understanding a proof. *Mathematical Thinking and Learning*, 21(2), 85–104. <https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1570833>
- Akker, J. J. H. van den (Jan J. H., Plomp, Tj. (Tjeerd), Bannan, B., Cobb, Paul., Folmer, Elvira., Gravemeijer, K. (Koeno P. E., Kelly, A. E., Nieveen, N. M., & SLO (2000-). (2013). *Educational design research / Part A: an introduction*.
- Arnawa, I. M., Sumarno, U., Kartasasmita, B., & Baskoro, E. T. (2007). Applying The APOS Theory To Improve Students Ability To Prove In Elementary Abstract Algebra. In *J. Indones. Math. Soc. (MIHMI)* (Vol. 13, Issue 1).
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). From Piaget's Theory to APOS Theory: Reflective Abstraction in Learning Mathematics and the Historical Development of APOS Theory. In *APOS Theory* (pp. 5–15). Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6_2
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Solange, ., Fuentes, R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. <http://avaxhome.ws/blogs/ChrisRedfield>
- Borji, V., Alamolhodaei, H., & Radmehr, F. (2018). Application of the APOS-ACE theory to improve students' graphical understanding of derivative. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(7), 2947–2967. <https://doi.org/10.29333/ejmste/91451>
- Chamberlain, D., & Vidakovic, D. (2021). Cognitive trajectory of proof by contradiction for transition-to-proof students. *Journal of Mathematical Behavior*, 62. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100849>
- Dimmel, J. K., & Pandiscio, E. A. (2020). When it's on zero, the lines become parallel: Preservice elementary teachers' diagrammatic encounters with division by zero. *Journal of Mathematical Behavior*, 58. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100760>
- Dubinsky, E. D., & McDonald, M. A. (2001). *APOS: A Constructivist Theory of Learning In Undergraduate Mathematics Education Research*.
- Ellis, A. B. (2007). Connections between Generalizing and Justifying: Students' Reasoning with Linear Relationships. In *Source: Journal for Research in*

Mathematics Education (Vol. 38, Issue 3).
<http://www.jstor.org>URL:<http://www.jstor.org/stable/30034866>

- Eriksson, K., Estep, D., & Johnson, C. (2004). *Applied Mathematics: Body and Soul*. In *Applied Mathematics: Body and Soul*. Springer Berlin Heidelberg.
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-05796-4>
- Fajriyah, L., Nugraha, Y., Akbar, P., Bernard, M., Siliwangi, I., Terusan, J., Sudirman, J., Tengah, C., Cimahi, K., & Barat, J. (2011). Pengaruh Kemandirian Belajar Siswa SMP Terhadap Kemampuan Penalaran Matematis. *Journal On Education*, 1(02), 288–296.
- Fan, L., Mailizar, M., Alafaleq, M., & Wang, Y. (2018). *A Comparative Study on the Presentation of Geometric Proof in Secondary Mathematics Textbooks in China, Indonesia, and Saudi Arabia* (pp. 53–65). https://doi.org/10.1007/978-3-319-73253-4_3
- Gemander, P., Chen, W. K., Weninger, D., Gottwald, L., Gleixner, A., & Martin, A. (2020). Two-row and two-column mixed-integer presolve using hashing-based pairing methods. *EURO Journal on Computational Optimization*, 8(3–4), 205–240. <https://doi.org/10.1007/s13675-020-00129-6>
- Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education* [Doctoral Thesis, CD-β Press / Freudenthal Institute]. <https://research.tue.nl/nl/publications/3b61ffbe-3693-4b4e-bd7d-a58b8be3aef5>
- Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). *Design research from a learning design perspective* (K. GRAVEMEIJER & P. COBB, Eds.; 1st Edition). Routledge.
- Gravemeijer, K., & Prediger, S. (2019). ICME-13 Monographs Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education. In *ICME 13* (ICME 13, pp. 33–57). <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7>
- Hanna, G. (2020). Mathematical Proof, Argumentation, and Reasoning. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 561–566). Springer.
- Hanna, G., & Reid, D. A. (2019). *Mathematics Education in the Digital Era Proof Technology in Mathematics Research and Teaching*. <http://www.springer.com/series/10170>
- Harel, G., & Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 11, 38.
- Kemendikbud. (2019, December 11). *Mendikbud Tetapkan Empat Pokok Kebijakan Pendidikan Merdeka Belajar*. SIARAN PERS Nomor: 408/Sipres/A5.3/XII/2019.
<https://www.kemdikbud.go.id/main/blog/2019/12/mendikbud-tetapkan-empat-pokok-kebijakan-pendidikan-merdeka-belajar>

- Kirsch, A. (1991). Preformal proof: Examples and reflections. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 183.
- Laamena, C. M., Nusantara, T., Irawan, E. B., & Muksar, M. (2018). How do the Undergraduate Students Use an Example in Mathematical Proof Construction: A Study based on Argumentation and Proving Activity. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 13(3). <https://doi.org/10.12973/iejme/3836>
- Mañosa, V. (2022). *THE INVISIBLE HEARTBEAT The beauty and soul of mathematics*. doi:10.1080/00332925.2020.1852839
- Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 277.
- Modeste, S., Beauvoir, S., Chappelon, J., Durand-Guerrier, V., León, N., & Meyer, A. (2017). *Proof, reasoning and logic at the interface between Mathematics and Computer Science : toward a framework for analyzing problem solving*. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02398483>
- Mulyono, M. (2011). Teori APOS dan Implementasinya Dalam Pembelajaran. *JMEE*, 1, 37–45.
- Mulyono, M. (2012). Pemahaman Mahasiswa Field Dependent dalam Merekonstruksi Konsep Grafik Fungsi. *Diterbitkan Oleh Jurusan Matematika FMIPA UNNES*, 3(1).
- NCTM. (2000). *Standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Pair, J., Strachota, S., & Singh, R. (2021). The Academic Community's Perceptions of the Two-Column Proof. *Mathematics Enthusiast*, 18(1–2), 1–30. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1521>
- Pfeiffer, K., & Quinlan, R. (2015a). *Faculty of Education; ERME*. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01281065>
- Pfeiffer, K., & Quinlan, R. (2015b). *Proof evaluation tasks as tools for teaching?* <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01281065>
- Reid, D. A., Vallejo, V., & Estela A. (2019). Evidence and argument in a proof based teaching theory. *ZDM - Mathematics Education*, 51(5), 807–823. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01027-x>
- Reid, D., Vallejo, V., & Estela, A. (2018). *Proof-based teaching as a basis for understanding why* (pp. 234–242). <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01865651>
- Rocha, H. (2019). Mathematical proof: From mathematics to school mathematics. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 377(2140). <https://doi.org/10.1098/rsta.2018.0045>

- Rosyidah, A. N. K., Umar, U., Nurmawanti, I., Hidayati, V. R., & Maulyda, M. A. (2021). INTERNALIZATION PROCESS OF REASONING AND PROOF STANDARDS FOR ELEMENTARY SCHOOL TEACHERS IN MATHEMATICS LEARNING. *AKSIOMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika*, *10*(1), 423. <https://doi.org/10.24127/ajpm.v10i1.3258>
- Saftari, M., Darmawijoyo, D., & Hartono, Y. (2020). Development of Student Activities Sheet Based on APOS Theory to Understand The Concept of Riemann Sum. *Math Didactic: Jurnal Pendidikan Matematika*, *6*(1), 110–123. <https://doi.org/10.33654/math.v6i1.914>
- Scristia, S., Meryansumayeka, M., Safitri, E., Araiku, J., & Aisyah, S. (2022). *Development of Teaching Materials Based on Two-Column Proof Strategy on Congruent Triangle Materials*.
- Selden, A., & Selden, J. (2008). *Overcoming Students' Difficulties in Learning to Understand and Construct Proofs*.
- Shinariko, L. J., Hartono, Y., & Darmawijoyo, D. (2022). Developing Proof-Based Learning Using APOS Theory Approach In Exponential For Enhancing Students' Reasoning Ability. *AKSIOMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika*, *11*(4), 2903. <https://doi.org/10.24127/ajpm.v11i4.6155>
- Shinariko, L. J., Hartono, Y., Yusup, M., Hiltrimartin, C., & Araiku, J. (2020). *Mathematical Representation Ability on Quadratic Function Through Proof Based Learning*.
- Shinno, Y., Miyakawa, T., Iwasaki, hideki, Kunimune, S., Mizoguchi, T., Ishii, T., & Abe, Y. (2018). Cultural Dimensions to Be Considered. *For the Learning of Mathematics*, *38*(1), 26–30. <https://www.jstor.org/stable/26548483>
- Sinclair, H. (1976). *Developmental Psycholinguistics*.
- Stylianou, D. A., Blanton, M. L., & Rotou, O. (2015). Undergraduate Students' Understanding of Proof: Relationships Between Proof Conceptions, Beliefs, and Classroom Experiences with Learning Proof. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *1*(1), 91–134. <https://doi.org/10.1007/s40753-015-0003-0>
- Sumartini, T. S. (2015). Peningkatan Kemampuan Penalaran Matematis Siswa Melalui Pembelajaran Berbasis Masalah. *Jurnal Pendidikan Matematika*, *5*(1).
- Syamsuri, S., & Marethi, I. (2018). APOS analysis on cognitive process in mathematical proving activities. *International Journal on Teaching and Learning Mathematics*, *1*(1), 1. <https://doi.org/10.18860/ijtlm.v1i1.5613>
- Syamsuri, S., Purwanto, P., Subanji, S., & Irawati, S. (2017). Using APOS Theory Framework: Why Did Students Unable To Construct a Formal Proof?

International Journal on Emerging Mathematics Education, 1(2), 135.
<https://doi.org/10.12928/ijeme.v1i2.5659>

- Weber, K. (2012). Mathematicians' perspectives on their pedagogical practice with respect to proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 43(4), 463–482.
<https://doi.org/10.1080/0020739X.2011.622803>
- Wijayanti, K., Waluya, S. B., Kartono, & Isnarto. (2019). Mental structure construction of field independent students based on initial proof ability in APOS-based learning. *Journal of Physics: Conference Series*, 1321(3).
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1321/3/032100>
- Wittmann, E. C. (2021). When Is a Proof a Proof? In *Connecting Mathematics and Mathematics Education: Collected Papers on Mathematics Education as a Design Science* (pp. 61–76). Springer International Publishing.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-61570-3_5
- Wolchover, N. (2017, March 28). A Long-Sought Proof, Found and Almost Lost. *Quanta Magazine*. *Quanta Magazine*.
<https://www.quantamagazine.org/statistician-proves-gaussian-correlation-inequality-20170328/>
- Zhang, D., & Qi, C. (2019). Reasoning and proof in eighth-grade mathematics textbooks in China. *International Journal of Educational Research*, 98, 77–90.
<https://doi.org/10.1016/J.IJER.2019.08.015>