IMPROVED MODEL PADA SKEMA PEMBIAYAAN LAYANAN INFORMASI DENGAN BIAYA PENGAWASAN (*MONITORING COST*) DAN BIAYA MARJINAL (*MARGINAL COST*) UNTUK FUNGSI UTILITAS *COBB-DOUGLAS*, FUNGSI UTILITAS *QUASI-LINIER*, FUNGSI UTILITAS *PERFECT SUBSTITUTE* DAN FUNGSI UTILITAS *BANDWITDH*

Drs. Robinson Sitepu, M.Si
Dr. Fitri Maya Puspita, M.Sc
Hadi Tanuji, M.Si
Anggi Nurul Pratiwi, S.Si
Icha Puspita Novyasti, S.Si

IMPROVED* MODEL PADA SKEMA PEMBIAYAAN LAYANAN INFORMASI DENGAN BIAYA PENGAWASAN *(MONITORING COST)* DAN BIAYA MARJINAL *(MARGINAL COST)* UNTUK FUNGSI UTILITAS *COBB-DOUGLAS*, FUNGSI UTILITAS *QUASI-LINIER*, FUNGSI UTILITAS *PERFECT SUBSTITUTE* DAN FUNGSI UTILITAS *BANDWITDH

Oleh :
Drs. Robinson Sitepu, M.Si
Dr. Fitri Maya Puspita, M.Sc
Hadi Tanuji, M.Si
Anggi Nurul Pratiwi, S.Si
Icha Puspita Novyasti, S.Si

UPT. Penerbit dan Percetakan
Universitas Sriwijaya 2017
Kampus Unsri Palembang
Jalan Srijaya Negara, Bukit Besar Palembang 30139
Telp. 0711-360969
email : unsri.press@yahoo.com, penerbitunsri@gmail.com
website : www.unsri.unsripress.ac.id

Anggota APPTI No. 026/KTA/APPTI/X/2015
Anggota IKAPI No. 001/SMS/2009

Setting & layout isi : Devi
Cetakan pertama, Oktober 2017
vii + 79 hal : 23 x 15 cm

ISBN : 979 - 587 - 687 - 2

IMPROVED MODEL PADA SKEMA PEMBIAYAAN LAYANAN INFORMASI DENGAN BIAYA PENGAWASAN (*MONITORING COST*) DAN BIAYA MARJINAL (*MARGINAL COST*) UNTUK FUNGSI UTILITAS COBB-DOUGLAS, FUNGSI UTILITAS QUASI-LINIER, FUNGSI UTILITAS *PERFECT SUBSTITUTE* DAN FUNGSI UTILITAS *BANDWITDH*

Oleh

Drs. Robinson Sitepu, M.Si
Dr. Fitri Maya Puspita, M.Sc
Hadi Tanuji, M.Si
Anggi Nurul Pratiwi, S.Si
Icha Puspita Novyasti, S.Si

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SRIWIJAYA

PRAKATA

Assalamualaikum Wr Wb,

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT, yang telah memberikan rahmat dan karuniaNya sehingga Bahan Ajar *Monitoring Cost* dan *Marginal Cost* ini dapat diselesaikan dengan baik. Pembahasan materi pada bahan ajar ini dilakukan dengan cara memaparkan landasan teori *Monitoring Cost* dan *Marginal Cost* dengan skema pembiayaan internet yaitu flat fee, usage based, dan two-part tariff berdasarkan Fungsi utilitas cobb-douglas, quasi-linier, perfect substitute dan bandwidth.

Isi buku ajar ini mencakup materi mixed integer non linier programming yakni: *monitoring cost*, *marginal cost*, jaringan internet dan fungsi utilitas cob-douglas, fungsi utilitas quasi-linier, fungsi utilitas perfect substitute dan fungsi utilitas bandwidth yang bersesuaian dengan salah satu topik dalam mata kuliah Integer Programming yang merupakan salah satu mata kuliah pilihan Bidang Optimasi di Jurusan Matematika FMIPA Unsri.

Pada kesempatan ini penyusun menyampaikan terima kasih kepada pihak yang telah membantu penyusunan dalam menyelesaikan buku ajar. Mudah-mudahan buku ajar ini dapat memberikan sedikit manfaat bagi para pembaca pada umumnya.

Wassalamualaikum wr wb.

Hormat Kami

Tim Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR ISTILAH

Flat Fee	:	*Pembiayaan internet yang setiap bulannya tetap, dan pengguna bebas mengakses internet dalam jangka waktu sebulan.*
Uasge Based	:	*Pembiayaan internet dengan sistem seberapa banyak akses internet yang dipakai sebanyak itulah yang harus dibayarkan*
Two-Part Tariff	:	*Pembiayaan Internet yang setiap bulannya tetap namun harga dan akses internet dibatasi sesuai keinginan pengguna*
Traffic	:	*Jumlah banyaknya kunjungan pada suatu website*
Traffic Sisfo	:	*Jumlah banyaknya kunjungan pada suatu website sistem informasi*
TCP	:	*TCP atau Transmission Control adalah standar komunikasi data yang digunakan oleh komunitas internet dalam proses tukar-menukar data dari satu computer ke computer lain di dalam jaringan internet.*
IP	:	*IP atau Internet Protocol adalah standar komunikasi data yang digunakan oleh komunitas internet dalam proses tukar-menukar data dari satu computer ke computer lain di dalam jaringan internet*
ISP	:	*ISP atau Internet Service Provider adalah penyedia jasa layanan internet*
QoS	:	*QoS atau Quality of Service adalah kualitas layanan internet*
Bit	:	*Satuan ukuran dalam jaringan komputer yang merupakan bilangan biner 0 dan 1*
Byte	:	*Satuan ukuran dalam jaringan komputer yang terbentuk dari 8 bit*
Kilobyte	:	*Satuan ukuran dalam jaringan komputer yang terbentuk dari 1024 byte*
Infeasibility	:	*Besar kelayakan suatu model berdasarkan keselurhan kendalanya.*
GMU (Generated Memory Used)	:	*Besar memori yang digunakan Program Lingo dalam menyelesaikan model pada kapasitas yang disediakan perangkat.*
Elapsed Runtime (ER)	:	*Jumlah waktu yang digunakan dalam menghasilkan dan menyelesaikan model. Jumlah ER dapat dipengaruhi oleh banyaknya aplikasi yang sedang dijalankan pada sistem perangkat.*

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perkembangan internet saat ini semakin pesat sehingga penyedia layanan internet atau *Internet Service Provider* (ISP) termotivasi untuk memberikan layanan yang terbaik dengan harga yang terjangkau oleh konsumen. Menurut Wang dan Schulzrinne (2001), fungsi utilitas biasanya berhubungan dengan tingkat kepuasaan yang pengguna dapatkan atas konsumsi layanan informasi yang dapat memaksimumkan keuntungan. Oleh karena itu, dibutuhkan fungsi utilitas yang terbaik yang tidak hanya bisa menguntungkan bagi ISP tetapi juga untuk konsumen dengan cara memberikan pelayanan terbaik kepada konsumen.

Fungsi utilitas biasanya berhubungan dengan tingkat kepuasaan yang pengguna dapatkan atas pemakaian layanan informasi yang digunakan khususnya yang berhubungan dengan memaksimalkan keuntungan dalam mencapai tujuan tertentu dan dapat ditulis dengan $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ yang artinya bahwa $x_1, x_2, \dots, x_n$ mengkontribusikan utilitas pengguna yang mengindikasikan kepuasaan-tujuan (Curescu, 2005; Wang and Schulzrinne, 2001).
Banyak asumsi yang digunakan dalam fungsi utilitas diantaranya fungsi *bandwidth* dengan nilai *loss* dan *delay* yang tetap. Menurut Wu, Hande *et al* (2010), alasan lain sehubungan dengan pemilihan fungsi utilitas adalah fungsi tersebut harus mudah disederhanakan dan mudah dianalisis homogenitas dan heterogenitasnya.

Beberapa fungsi utilitas yang sering digunakan antara lain, fungsi utilitas *Cobb-Douglas, Quasi-Linear, Perfect-Subtitutes, Perfect Complement.* Sebelumnya, penelitian untuk memperoleh solusi yang optimum dengan menggunakan fungsi utilitas telah dilakukan Wu dan Banker (2010). Dalam penelitiannya, hasil analisis yang diperoleh adalah pembiayaan dengan *flat fee* dan *two-part tariff* lebih optimal dibandingkan dengan *usage-based*, dan hanya membandingkan ketiga strategi pembiayaan untuk fungsi utilitas *Cobb-Douglas* dengan memaksimumkan keuntungan bagi ISP dengan syarat, memperhatikan kepuasan konsumen, dan fungsi utilitas yang digunakan adalah fungsi utilitas yang telah di modifikasi.

Secara umum, biaya marginal adalah biaya yang penetapannya disesuaikan dengan banyaknya produksi suatu barang sehingga timbul perbedaan biaya tetap karena adanya penambahan atau pengurangan dalam jumlah unit produksi, sedangkan biaya pengawasan adalah biaya yang dikeluarkan untuk mengontrol aktivitas yang dilakukan agen dalam mengelola perusahaan. Penelitian (Indrawati et al, 2015) dan (Wu dan Banker, 2010) pada pemilihan fungsi utilitas yang dapat memaksimumkan keuntungan bagi penyedia layanan mengabaikan biaya pengawasan dan biaya marginal. Kenyataannya biaya pengawasan dan biaya marginal menjadi penting dalam perkembangan layanan informasi untuk tiga skema pembiayaan (*flat-fee, usage-based,* dan *two-part-tariff*). Biaya marginal dan biaya pengawasan dapat mempengaruhi harga skema pembiayaan yang optimal. Untuk itu, perlu dikaji mengenai biaya pengawasan dan biaya marginal dalam model skema pembiayaan layanan informasi yang melibatkan empat fungsi utilitas (*Cobb-Douglas, Quasi-Linear, Perfect-Subtitutes, Perfect Complements*).

Oleh karena itu, dalam penelitian ini diteliti tiga skema pembiayaan internet (*flat fee, usage-based*, dan *two-part tariff*) pada jam sibuk (09.00 – 16.59 WIB) dan jam tidak sibuk (17.00 – 08.59 WIB) untuk konsumen heterogen dan konsumen homogen berdasarkan fungsi utilitas *Cobb-Douglas, Quasi-Linier, Perfect substitute* dan *Fungsi Bandwidth* dengan memperhatikan biaya pengawasan dan biaya marginal.

1.2 Data Pemakaian Internet

Untuk analisa fungsi utilitas yang lebih optimal diperlukan data untuk membandingkan hasil. Pada penelitian ini terdapat tiga aplikasi dalam pengamatan data, yaitu data untuk pemakaian *Mail, Files,* dan *Digilib*. Data-data tersebut dibagi menjadi dua bagian, yaitu data pada jam sibuk yang diamati dari pukul 9.00 WIB sampai pukul 16.59 WIB dan data pada jam tidak sibuk yang diamati mulai pukul 17.00 WIB sampai dengan pukul 08.59 WIB. Data ini diambil dari server local yang ada di Palembang. Data ini diamati dari tanggal 27 Februari 2016 pukul 9.00 sampai dengan 27 Maret 2016 pukul 07.00 atau 30 hari.

1.2.1 Data Pemakaian Internet untuk *Mail*

Data pemakaian internet untuk *Mails* adalah data yang digunakan untuk mengirimkan ataupun menerima *email*. Salah satu contoh pemakaian internet untuk *mails* ini adalah membuka *inbox email* dalam *Yahoo, Gmail, dll*. Tabel 1.1. menjelaskan data pemakaian *mail* pada jam sibuk sedangkan data jam tidak sibuk ditampilkan di Tabel 1.2.

Tabel 1.1 Pemakaian untuk *Mail* pada jam sibuk

No.	Tanggal	Jam Sibuk (9.00 - 16.59)		Total Pemakaian per Hari
		Inbound	Outbound	
1.	27 - 2 - 2016	79.400	43.000	122.400
2.	28 - 2 - 2016	91.400	49.400	140.800
3.	29 - 2 - 2016	77.100	74.400	151.500
4.	1 - 3 - 2016	72.700	98.300	171.000
5.	2 - 3 - 2016	67.000	84.100	151.100
6.	3 - 3 - 2016	92.400	88.200	180.600
7.	4 - 3 - 2016	110.000	76.000	186.000
8.	5 - 3 - 2016	84.900	69.400	154.300
9.	6 - 3 - 2016	94.600	57.000	151.600
10.	7 - 3 - 2016	88.200	90.400	178.600
11.	8 - 3 - 2016	96.000	132.000	228.000
12.	9 - 3 - 2016	95.800	84.900	180.700
13.	10 - 3 - 2016	77.900	90.400	168.300
14.	11 - 3 - 2016	57.600	81.900	139.500
15.	12 - 3 - 2016	73.500	63.000	136.500
16.	13 - 3 - 2016	97.900	63.600	161.500
17.	14 - 3 - 2016	111.000	123.000	234.000
18.	15 - 3 - 2016	78.300	89.400	167.700
19.	16 - 3 - 2016	81.100	72.800	153.900

20.	17 - 3 - 2016	1.050.000	128.000	**1.178.000**
21.	18 - 3 - 2016	89.100	96.200	185.300
22.	19 - 3 - 2016	83.500	59.600	143.100
23.	20 - 3 - 2016	81.600	41.600	123.200
24.	21 - 3 - 2016	68.900	101.000	169.900
25.	22 - 3 - 2016	75.100	141.000	216.100
26.	23 - 3 - 2016	81.300	120.000	201.300
27.	24 - 3 - 2016	84.600	97.600	182.200
28.	25 - 3 - 2016	110.000	68.100	178.100
29.	26 - 3 - 2016	75.500	80.400	155.900
30.	27 - 3 - 2016	0	0	**0**
Total (*byte*)		**3.430.000**	**2.460.000**	**5.891.100**
Rata-rata per hari (*byte*)		**114.213,333**	**82.156,667**	**196.370**
Rata-rata per hari (*kilobyte*)		**111,536**	**80,231**	**191,767**

Sumber : Data dari Server Lokal di Palembang

Tabel 1.2 Pemakaian untuk *Mail* pada jam tidak sibuk

No.	**Tanggal**	**Jam Tidak Sibuk (17.00 - 8.59)**		**Total Pemakaian per Hari**
		Inbound	**Outbound**	
1.	27 - 2 - 2016	61.000	76.300	**137.300**
2.	28 - 2 - 2016	174.000	92.600	266.600
3.	29 - 2 - 2016	167.000	109.000	276.000
4.	1 - 3 - 2016	162.000	89.200	251.200
5.	2 - 3 - 2016	174.000	116.000	290.000
6.	3 - 3 - 2016	209.000	135.000	344.000
7.	4 - 3 - 2016	180.000	110.000	290.000
8.	5 - 3 - 2016	178.000	100.000	278.000
9.	6 - 3 - 2016	186.000	129.000	315.000
10.	7 - 3 - 2016	203.000	140.000	343.000
11.	8 - 3 - 2016	209.000	143.000	352.000
12.	9 - 3 - 2016	201.000	117.000	318.000

13.	10 - 3 - 2016	156.000	144.000	300.000
14.	11 - 3 - 2016	135.000	118.000	253.000
15.	12 - 3 - 2016	138.000	87.000	225.000
16.	13 - 3 - 2016	188.000	138.000	326.000
17.	14 - 3 - 2016	189.000	116.000	305.000
18.	15 - 3 - 2016	499.000	534.000	**1.033.000**
19.	16 - 3 - 2016	151.000	109.000	260.000
20.	17 - 3 - 2016	167.000	115.000	282.000
21.	18 - 3 - 2016	185.000	140.000	325.000
22.	19 - 3 - 2016	163.000	107.000	270.000
23.	20 - 3 - 2016	180.000	110.000	290.000
24.	21 - 3 - 2016	151.000	107.000	258.000
25.	22 - 3 - 2016	137.000	120.000	257.000
26.	23 - 3 - 2016	161.000	93.400	254.400
27.	24 - 3 - 2016	163.000	95.800	258.800
28.	25 - 3 - 2016	208.000	99.100	307.100
29.	26 - 3 - 2016	183.000	106.000	289.000
30.	27 - 3 - 2016	92.600	55.500	148.100
Total (*byte*)		**5.350.600**	**3.751.900**	**9.102.500**
Rata-rata per hari (*byte*)		**178.353,333**	**125.063,333**	**303.416,667**
Rata-rata per hari (*kilobyte*)		**174,173**	**122,132**	**296,305**

Sumber : Data dari Server Lokal di Palembang

1.2.2 Data Pemakaian Internet untuk *Files*

Data pemakaian internet untuk *Files* adalah data yang digunakan untuk meng-*upload* dan men-*download* sesuatu. Contoh yang paling sering dilakukan adalah meng-*upload* foto di *Facebook* atau mungkin men-*download* gambar, video, mp3, dll ataupun data tertentu dari internet Data di jam sibuk dan di jam tidak sibuk untuk pemakaian files dinyatakan di Tabel 1.3 dan Tabel 1.4.

Tabel 1.3 Pemakaian Internet untuk *Files* pada jam sibuk

No.	Tanggal	Jam Sibuk (9.00 - 16.59)		Total Pemakaian per Hari
		Inbound	Outbound	
1.	27 - 2 - 2016	381.000	30.400.000	30.781.000
2.	28 - 2 - 2016	997.000	53.300.000	54.297.000
3.	29 - 2 - 2016	2.490.000	160.000.000	162.490.000
4.	1 - 3 - 2016	1.360.000	58.400.000	59.760.000
5.	2 - 3 - 2016	2.010.000	209.000.000	211.010.000
6.	3 - 3 - 2016	5.940.000	444.000.000	449.940.000
7.	4 - 3 - 2016	982.000	41.300.000	42.282.000
8.	5 - 3 - 2016	411.000	14.200.000	14.611.000
9.	6 - 3 - 2016	58.800	1.960.000	2.018.800
10.	7 - 3 - 2016	3.050.000	207.000.000	210.050.000
11.	8 - 3 - 2016	2.060.000	165.000.000	167.060.000
12.	9 - 3 - 2016	777.000	33.500.000	34.277.000
13.	10 - 3 - 2016	3.400.000	181.000.000	184.400.000
14.	11 - 3 - 2016	1.510.000	73.600.000	75.110.000
15.	12 - 3 - 2016	219.000	9.300.000	9.519.000
16.	13 - 3 - 2016	449.000	22.600.000	23.049.000
17.	14 - 3 - 2016	2.970.000	184.000.000	186.970.000
18.	15 - 3 - 2016	1.620.000	86.600.000	88.220.000
19.	16 - 3 - 2016	2.230.000	108.000.000	110.230.000
20.	17 - 3 - 2016	2.480.000	128.000.000	130.480.000
21.	18 - 3 - 2016	1.210.000	106.000.000	107.210.000
22.	19 - 3 - 2016	643.000	26.900.000	27.543.000
23.	20 - 3 - 2016	450.000	19.600.000	20.050.000
24.	21 - 3 - 2016	7.350.000	318.000.000	**325.350.000**
25.	22 - 3 - 2016	1.840.000	143.000.000	144.840.000
26.	23 - 3 - 2016	2.890.000	149.000.000	151.890.000
27.	24 - 3 - 2016	485.000	25.400.000	25.885.000
28.	25 - 3 - 2016	902.000	37.200.000	38.102.000
29.	26 - 3 - 2016	399.000	16.400.000	16.799.000

30.	27 - 3 - 2016	0	0	**0**
Total (*byte*)		**51.563.800**	**3.052.660.000**	**3.104.223.800**
Rata-rata per hari (*byte*)		**1.718.793,333**	**101.755.333,3**	**103.474.126,7**
Rata-rata per hari (*kilobyte*)		**1.678,509**	**99.370,443**	**101.048,952**

Sumber : Data dari Server Lokal di Palembang

Tabel 1.4 Pemakaian Internet untuk *Files* pada jam tidak sibuk

No.	**Tanggal**	**Jam Tidak Sibuk (17.00 - 8.59)**		**Total Pemakaian per Hari**
		Inbound	**Outbound**	
1.	27 - 2 - 2016	21.800	755.000	**776.800**
2.	28 - 2 - 2016	10.100.000	104.000.000	114.100.000
3.	29 - 2 - 2016	9.830.000	52.400.000	62.230.000
4.	1 - 3 - 2016	7.280.000	56.700.000	63.980.000
5.	2 - 3 - 2016	12.100.000	160.000.000	172.100.000
6.	3 - 3 - 2016	18.500.000	272.000.000	**290.500.000**
7.	4 - 3 - 2016	7.540.000	82.700.000	90.240.000
8.	5 - 3 - 2016	12.500.000	81.400.000	93.900.000
9.	6 - 3 - 2016	6.760.000	15.200.000	21.960.000
10.	7 - 3 - 2016	12.800.000	68.100.000	80.900.000
11.	8 - 3 - 2016	8.180.000	124.000.000	132.180.000
12.	9 - 3 - 2016	120.000.000	153.000.000	273.000.000
13.	10 - 3 - 2016	18.700.000	137.000.000	155.700.000
14.	11 - 3 - 2016	23.400.000	78.100.000	101.500.000
15.	12 - 3 - 2016	18.600.000	23.500.000	42.100.000
16.	13 - 3 - 2016	29.100.000	45.900.000	75.000.000
17.	14 - 3 - 2016	24.500.000	94.500.000	119.000.000
18.	15 - 3 - 2016	27.500.000	64.300.000	91.800.000
19.	16 - 3 - 2016	13.100.000	60.500.000	73.600.000
20.	17 - 3 - 2016	21.600.000	74.900.000	96.500.000
21.	18 - 3 - 2016	17.100.000	44.400.000	61.500.000
22.	19 - 3 - 2016	10.600.000	70.500.000	81.100.000
23.	20 - 3 - 2016	31.800.000	29.600.000	61.400.000

24.	21 - 3 - 2016	22.600.000	122.000.000	144.600.000
25.	22 - 3 - 2016	19.300.000	123.000.000	142.300.000
26.	23 - 3 - 2016	22.500.000	99.400.000	121.900.000
27.	24 - 3 - 2016	18.700.000	66.000.000	84.700.000
28.	25 - 3 - 2016	12.200.000	28.300.000	40.500.000
29.	26 - 3 - 2016	19.200.000	35.900.000	55.100.000
30.	27 - 3 - 2016	25.800.000	5.920.000	31.720.000
Total (*byte*)		**601.911.800**	**2.373.975.000**	**2.975.886.800**
Rata-rata per hari (*byte*)		**20.063.726,67**	**79.132.500**	**99.196.226,7**
Rata-rata per hari (*kilobyte*)		**19.593,483**	**77.277,832**	**96.871,315**

Sumber : Data dari Server Lokal di Palembang

1.2.3 Data Pemakaian Internet untuk *digilib*

Data pemakaian internet untuk *Digilib* adalah data yang digunakan untuk *digital library* atau perpustakaan online. Data pemakaian digilib pada jam sibuk dan tidak sibuk ditampilkann di Tabel 1.5 dan Tabel 1.6.

Tabel 1.5 Pemakaian Internet untuk *digilib* pada jam sibuk

No.	**Tanggal**	**Jam Sibuk (9.00 - 16.59)**		**Total Pemakaian per Hari**
		Inbound	**Outbound**	
1.	27 - 2 - 2016	49.695,03	1.090.755	1.140.450
2.	28 - 2 - 2016	71.428,03	1.356.511	1.427.939
3.	29 - 2 - 2016	49.700	764.000	813.700
4.	1 - 3 - 2016	64.900	925.000	989.900
5.	2 - 3 - 2016	32.900	619.000	651.900
6.	3 - 3 - 2016	48.600	714.000	762.600
7.	4 - 3 - 2016	56.200	995.000	1.051.200
8.	5 - 3 - 2016	52.700	805.000	857.700
9.	6 - 3 - 2016	53.300	1.070.000	1.123.300
10.	7 - 3 - 2016	59.100	937.000	996.100
11.	8 - 3 - 2016	54.100	804.000	858.100
12.	9 - 3 - 2016	62.200	946.000	1.008.200
13.	10 - 3 - 2016	77.300	1.730.000	1.807.300
14.	11 - 3 - 2016	60.200	897.000	957.200

15.	12 - 3 - 2016	38.700	853.000	891.700
16.	13 - 3 - 2016	52.500	835.000	887.500
17.	14 - 3 - 2016	98.400	2.080.000	**2.178.400**
18.	15 - 3 - 2016	69.300	1.200.000	1.269.300
19.	16 - 3 - 2016	72.300	1.550.000	1.622.300
20.	17 - 3 - 2016	74.400	1.300.000	1.374.400
21.	18 - 3 - 2016	76.700	1.420.000	1.496.700
22.	19 - 3 - 2016	62.000	968.000	1.030.000
23.	20 - 3 - 2016	53.800	824.000	877.800
24.	21 - 3 - 2016	76.500	1.330.000	1.406.500
25.	22 - 3 - 2016	57.900	817.000	874.900
26.	23 - 3 - 2016	74.600	1.570.000	1.644.600
27.	24 - 3 - 2016	61.700	804.000	865.700
28.	25 - 3 - 2016	63.200	63.200	126.400
29.	26 - 3 - 2016	68.400	1.000.000	1.068.400
30.	27 - 3 - 2016	0	0	**0**
Total (*byte*)		**1.792.723,06**	**30.267.466,5**	**32.060.189,56**
Rata-rata per hari (*byte*)		**59.757,435**	**1.008.915,55**	**1.068.672,985**
Rata-rata per hari (*kilobyte*)		**58,357**	**985,269**	**1.043,626**

Sumber : Data dari Server Lokal di Palembang

Tabel 1.6 Pemakaian Internet untuk *digilib* pada jam tidak sibuk

No.	**Tanggal**	**Jam Tidak Sibuk (17.00 - 8.59)**		**Total Pemakaian per Hari**
		Inbound	**Outbound**	
1.	27 - 2 - 2016	44.770,12	580.526,32	**625.296,44**
2.	28 - 2 - 2016	120.000	1.880.000	2.000.000
3.	29 - 2 - 2016	109.000	1.580.000	1.689.000
4.	1 - 3 - 2016	113.000	1.680.000	1.793.000
5.	2 - 3 - 2016	84.900	1.230.000	1.314.900
6.	3 - 3 - 2016	95.700	1.550.000	1.645.700
7.	4 - 3 - 2016	109.000	2.090.000	2.199.000
8.	5 - 3 - 2016	84.800	1.300.000	1.384.800

9.	6 - 3 - 2016	91.900	1.300.000	1.391.900
10.	7 - 3 - 2016	143.000	1.300.000	1.443.000
11.	8 - 3 - 2016	108.000	1.870.000	1.978.000
12.	9 - 3 - 2016	117.000	1.700.000	1.817.000
13.	10 - 3 - 2016	131.000	2.200.000	2.331.000
14.	11 - 3 - 2016	107.000	1.510.000	1.617.000
15.	12 - 3 - 2016	73.900	1.040.000	1.113.900
16.	13 - 3 - 2016	83.400	1.240.000	1.323.400
17.	14 - 3 - 2016	93.700	1.400.000	1.493.700
18.	15 - 3 - 2016	226.000	1.580.000	1.806.000
19.	16 - 3 - 2016	127.000	1.910.000	2.037.000
20.	17 - 3 - 2016	109.000	1.680.000	1.789.000
21.	18 - 3 - 2016	650.000	1.810.000	**2.460.000**
22.	19 - 3 - 2016	129.000	1.800.000	1929.000
23.	20 - 3 - 2016	129.000	1.650.000	1.779.000
24.	21 - 3 - 2016	125.000	1.820.000	1.945.000
25.	22 - 3 - 2016	111.000	1.560.000	1.671.000
26.	23 - 3 - 2016	121.000	1.740.000	1.861.000
27.	24 - 3 - 2016	124.000	1.680.000	1.804.000
28.	25 - 3 - 2016	115.000	1.690.000	1.805.000
29.	26 - 3 - 2016	130.000	1.880.000	2.010.000
30.	27 - 3 - 2016	61.400	822.000	883.400
Total (*byte*)		**3.867.470,12**	**46.250.526,32**	**50.939.996,44**
Rata-rata per hari (*byte*)		**126.869,004**	**1.541.684,211**	**1.697.999,881**
Rata-rata per hari (*kilobyte*)		**123.895**	**1505.551**	**1.658,203**

Sumber : Data dari Server Lokal di Palembang

Data diatas dibagi menjadi dua kelompok, yaitu data pengiriman dan data penerimaan dengan waktu amatan yang dibagi menjadi 2 yaitu pada saat jam sibuk dan jam tidak sibuk. Waktu amatan ini dilihat dari jam aktif penggunaan suatu instansi, sehingga untuk jam sibuk dimulai pukul 09.00-16.59 WIB sedangkan untuk jam tidak sibuk pukul 17.00-08.59 WIB. Tabel 1.7 berikut ini merupakan rekapitulasi pemakaian (dalam *kilobyte*) selama 30 hari.

Tabel 1.7 Rekapitulasi pemakaian (dalam *kilobyte*) selama 30 hari

Data *Traffic*	Keterangan	Jumlah Pemakaian	
		Jam Sibuk	Jam Tidak Sibuk
1. *Mail*	Jumlah dari total pemakaian per hari selama 30 hari	5.753,027	8.889,160
	Rata-rata dari total pemakaian per hari selama 30 hari	191,767	296,305
	Tingkat konsumsi yang maksimum ($\overline{X}_1$ atau $\overline{Y}_1$)	1.150,391	1.008,789
	Tingkat konsumsi yang minimum (X_m atau Y_m)	0	134,0820313
	Tingkat konsumsi yang maksimum tanpa menggunakan data $\overline{X}_1$ atau $\overline{Y}_1$ ($\overline{X}_2$ atau $\overline{Y}_2$)	228,516	343,75
2. *Web*	Jumlah dari total pemakaian per hari selama 30 hari	31.308,779	49.746,090
	Rata-rata dari total pemakaian per hari selama 30 hari	1.043,626	1.658,203
	Tingkat konsumsi yang maksimum ($\overline{X}_1$ atau $\overline{Y}_1$)	2.127,344	2.402,344
	Tingkat konsumsi yang minimum (X_m atau Y_m)	0	862,6953125
	Tingkat konsumsi yang maksimum tanpa menggunakan data $\overline{X}_1$ atau $\overline{Y}_1$ ($\overline{X}_2$ atau $\overline{Y}_2$)	1.764,941	2.276,367
3. *Files*	Jumlah dari total pemakaian per hari selama 30 hari	3031468.555	2.906.139,453
	Rata-rata dari total pemakaian per hari selama 30 hari	101.048,952	96.871,315
	Tingkat konsumsi yang maksimum ($\overline{X}_1$ atau $\overline{Y}_1$)	439.394,531	283.691,406
	Tingkat konsumsi yang minimum (X_m atau Y_m)	0	758,59375
	Tingkat konsumsi yang maksimum tanpa menggunakan data $\overline{X}_1$ atau $\overline{Y}_1$ ($\overline{X}_2$ atau $\overline{Y}_2$)	317.724,609	266.601,563

1.3 Pengolahan Data *Traffic*

Data *traffic* digunakan dalam model yang optimal untuk membandingkan fungsi utilitas berdasarkan *Cobb-Douglas* dan *Fungsi Bandwidth*. Tabel 4.7 adalah rekapitulasi model yang optimal dari fungsi utilitas berdasarkan *Cobb-Douglas* dan *Fungsi Bandwidth*. Model yang optimal tersebut diolah dengan menggunakan data *traffic* dari aplikasi *mail, files,* dan *digilib* untuk memperoleh solusi optimal dari model skema pembiayaan internet.

Dengan menggunakan data pada Tabel 4.14, substitusi nilai $\bar{X}$, $\bar{X}_2, X_m$ dan nilai $\bar{Y}$, $\bar{Y}_2, Y_m$ dari data aplikasi *mail, files,* dan *digilib* ke model yang optimal pada Tabel 4.7. Hal ini dapat dilihat pada Tabel 1.8.

Tabel 1.8 Nilai $\bar{X}$, $\bar{X}_2, X_m$ dan $\bar{Y}$, $\bar{Y}_2, Y_m$ yang diterapkan pada skema pembiayaan optimal

	Mail	*Digilib*	*Files*
$\bar{X}_1$ atau $\bar{X}$ (*kilobyte*)	1.150,391	2.127,344	439.394,531
$\bar{X}_2$ (*kilobyte*)	228,516	1.764,941	317.724,609
X_m *(kilobyte)*	0	0	0
$\bar{Y}_1$ atau $\bar{Y}$ (*kilobyte*)	1.008,789	2.402,344	283.691,406
$\bar{Y}_2$(*kilobyte*)	343,75	2.276,367	266.601,563
Y_m(*kilobyte*)	134,0820313	862,6953125	758,59375

Keterangan :

1. $\bar{X}_1$ atau $\bar{X}$ merupakan tingkat konsumsi maksimum saat jam sibuk dalam satuan *kilobyte*.
2. X_m merupakan tingkat konsumsi minimum saat jam sibuk dalam satuan *kilobyte.*
3. $\bar{X}_2$ merupakan tingkat konsumsi maksimum saat jam sibuk, tanpa mengambil data $\bar{X}_1$, sehingga $\bar{X}_1 > \bar{X}_2$, satuannya *kilobyte*.
4. $\bar{Y}_1$ atau $\bar{Y}$ merupakan tingkat konsumsi maksimum saat jam tidak sibuk dalam satuan *kilobyte*.
5. Y_m merupakan tingkat konsumsi minimum saat jam tidak sibuk dalam satuan *kilobyte.*
6. $\bar{Y}_2$ merupakan tingkat konsumsi maksimum saat jam tidak sibuk, tanpa mengambil data $\bar{Y}_1$, sehingga $\bar{Y}_1 > \bar{Y}_2$, satuannya *kilobyte.*

BAB II

MODEL ORIGINAL

Menurut Ratung (2014), biaya marginal didefinisikan sebagai biaya yang berbeda-beda penetapannya akibat adanya tingkat produksi yang berbeda sehingga mengakibatkan perbedaan biaya tetap yang terjadi akibat adanya keputusan tertentu yang disebabkan karena adanya penambahan jumlah unit produksi.

Biaya pengawasan merupakan biaya yang dikeluarkan oleh perusahaan untuk mengawasi aktivitas-aktivitas yang dilakukan oleh agen dalam mengelola perusahaan (Pratama, 2013). Fungsi utama daripada pengawasan adalah ditujukan pada perbaikan dan peningkatan kualitas untuk mencapai tujuan, atau dengan kata lain adalah menilai, memperbaiki dan memastikan apakah kegiatan produksi dapat mencapai hasil yang memuaskan sesuai dengan tujuan.

Wu and Banker (2010), diasumsikan bahwa biaya marjinal dinotasikan dengan c dan biaya pengawasan dinotasikan dengan t. Dengan biaya marginal dan biaya pengawasan bernilai positif, keuntungan dari setiap konsumen (dilambangkan dengan π), untuk skema harga yang diberikan oleh perusahaan.

Skema pembiayaan *flat fee*: $\pi = P - c\bar{X}$, untuk memaksimumkan keuntungan ditetapkan $P = a\log(\bar{X}+1)$, sehingga: $\pi = a\log(\bar{X}+1) - c\bar{X}$

Skema pembiayaan *usage-based*: $\pi = (P_x - c - t)X(P_x)$, dimana $X(P_x)$ adalah turunan pertama dari optimasi masalah konsumen.

Skema pembiayaan *two-part tariff*: $\pi = (P_x - c - t)X(P_x) + P$

2.1 Model Pasar untuk Penyedia Layanan Internet

Pada sub bab ini menjelaskan model yang digunakan untuk optimasi masalah konsumen dan optimasi masalah produsen yang diperlukan untuk mencari keuntungan bagi ISP.

2.1.1 Optimasi Masalah Konsumen

Wu and Banker (2010), menjelaskan skema pembiayaan *flat-fee*, *usage-based*, dan *two-part tariff* serta harga yang ditentukan oleh ISP dengan i menunjukkan konsumen yang memilih layanan yang disediakan oleh ISP dan penentuan tingkat penggunaan layanan oleh konsumen tersebut pada saat jam sibuk atau saat jam tidak sibuk untuk memaksimalkan tingkat kepuasaannya.

Berikut ini merupakan optimasi masalah konsumen (Wu and Banker, 2010)

$$\text{Maks}_{X_i,Y_i,Z_i}\, U_i(X_i,Y_i) - P_xX_i - P_yY_i - PZ_i \tag{2.1}$$

dengan kendala:

$$X_i \le \bar{X}_i Z_i \tag{2.2}$$

$$Y_i \le \bar{Y}_i Z_i \tag{2.3}$$

$$U_i(X_i,Y_i) - P_xX_i - P_yY_i - PZ_i \ge 0 \tag{2.4}$$

$$Z_i = 0 \text{ atau } 1 \tag{2.5}$$

Parameter-parameter yang diberikan adalah sebagai berikut :

P : Biaya yang dikeluarkan jika mengikuti layanan yang diberikan.

P_x : Harga yang diberikan ISP saat jam sibuk (jam 09.00-16.59 WIB).

P_y : Harga yang diberikan ISP saat jam tidak sibuk (jam 17.00-08.59 WIB).

$U_i(X_i,Y_i)$: Fungsi utilitas dari konsumen i dengan X_i adalah tingkat penggunaan layanan saat jam sibuk dan Y_i adalah tingkat penggunaan layanan saat jam tidak sibuk.

Dengan variabel tetapnya adalah sebagai berikut :

X_i : Tingkat penggunaan layanan saat jam sibuk.

Y_i : Tingkat penggunaan layanan saat jam tidak sibuk.
Z_i : Variabel tujuan konsumen *i* sehubungan dengan keikutsertaannya.
$\overline{X}_i$: Tingkat tertinggi konsumen *i* dalam menggunakan layanan saat jam sibuk.
$\overline{Y}_i$: Tingkat tertinggi konsumen *i* dalam menggunakan layanan saat jam tidak sibuk.

Fungsi Tujuan (2.1) ditujukan untuk memaksimumkan penggunaan layanan oleh konsumen berdasarkan harga yang disediakan oleh ISP. Untuk mempertahankan hubungan dengan jangka waktu yang lama antara konsumen dan ISP biaya yang digunakan tidak boleh biaya untuk jangka waktu pendek atau jangka waktu tertentu.

Skema pembiayaan yang dipilih disesuaikan dengan variabel P, P_x dan P_y. Untuk skema pembiayaan *flat-fee* ditetapkan ketentuan P_x, P_y bernilai 0 dan P bernilai positif, untuk skema pembiayaan *usage-based* ditetapkan ketentuan P_x, P_y bernilai positif dan P bernilai 0 dan untuk skema pembiayaan *two-part tariff* ditetapkan ketentuan P_x, P_y, dan P bernilai positif.

Persamaan (2.5) ditentukan oleh konsumen i, jika konsumen i memilih untuk tidak bergabung dengan program ini maka Z_i bernilai 0, Kendala (2.2) dan Kendala (2.3) bernilai nol, tingkat konsumsinya X_i dan Y_i dan utilitas total serta biaya keduanya juga bernilai nol. Jika konsumen *i* memilih untuk bergabung dengan program maka Z_i bernilai 1 dan konsumen tersebut harus memutuskan tingkat konsumsi optimal X_i dan Y_i, yang tidak bisa melebihi batas atasnya $\overline{X}_i$ dan $\overline{Y}_i$.

Skema pembiayaan yang dipilih disesuaikan dengan variabel P, P_x, dan P_y dengan tiga strategi skema pembiayaan yaitu :

1. Skema pembiayaan *flat-fee*, jika P_x dan P_y keduanya bernilai nol dan P adalah positif.
2. Skema pembiayaan *usage-based*, jika P_x dan P_y positif dan P bernilai nol.
3. Skema pembiayaan *two-part tariff*, jika P_x , P_y dan P semuanya bernilai positif.

2.1.2 Optimasi Masalah Produsen

Menurut Wu and Banker (2010), mengingat masalah optimasi yang dihadapi oleh konsumen, ISP memutuskan skema pembiayaan mana yang dapat digunakan untuk memaksimumkan total keuntungan. Diasumsikan bahwa biaya produksi marginal untuk menyediakan satu unit tambahan layanan untuk konsumen dan biaya pengawasan untuk satu unit layanan dalam harga *usage-based* (pada harga *flat-fee* tidak ada kebutuhan untuk biaya pengawasan pada tingkat penggunaan konsumen, sehingga pada skema *flat-fee* tidak dikenakan biaya pengawasan) dan keduanya bernilai 0 atau diabaikan.

Adapun optimasi masalah produsen (Wu and Banker, 2010) sebagai berikut:

$$\underset{P,P_X,P_Y}{\text{Maks}} \sum_i \left(P_x X_i^* + P_y Y_i^* + P Z_i^*\right) \tag{2.6}$$

dimana $(X_i^*, Y_i^*, Z_i^*) = \text{argmaks } U_i\,(X_i, Y_i) - P_x X_i - P_y Y_i - P Z_i$

dengan kendala:

$$X_i \leq \overline{X}_i Z_i$$
$$Y_i \leq \overline{Y}_i Z_i$$
$$U_i(X_i, Y_i) - P_x X_i - P_y Y_i - P Z_i \geq 0$$
$$Z_i = 0 \text{ atau } 1$$

dan parameter-parameternya sebagai berikut :

$X_i^* = X_{i(P_x,P_y,P)}$: Tingkat konsumsi layanan konsumen *i* pada jam sibuk.
$Y_i^* = Y_{i(P_x,P_y,P)}$: Tingkat konsumsi layanan konsumen *i* pada jam tidak sibuk.
$Z_i^* = Z_{i(P_x,P_y,P)}$: Variabel tujuan konsumen *i* sehubungan dengan keikutsertaannya.
$U_{i(X_i,Y_i)}$: Fungsi utilitas dari konsumen i dengan X_i adalah tingkat penggunaan layanan saat jam sibuk dan Y_i adalah tingkat penggunaan layanan saat jam tidak sibuk.

$\overline{X_\iota}$: Tingkat tertinggi konsumen *i* dalam menggunakan layanan saat jam sibuk.

$\overline{Y_\iota}$: Tingkat tertinggi konsumen *i* dalam menggunakan layanan saat jam tidak sibuk.

dengan variabel tetapnya adalah sebagai berikut :

P : Biaya yang diperlukan untuk mengikuti program layanan.

P_x : Harga dari layanan yang ditentukan oleh ISP saat jam sibuk.

P_y : Harga dari layanan yang ditentukan oleh ISP saat jam tidak sibuk.

Fungsi Tujuan (2.6) ditujukan untuk memaksimumkan keuntungan yang didapat oleh ISP dari banyaknya tingkat penggunaan layanan konsumen *i* pada saat jam sibuk ataupun saat jam tidak sibuk.

2.2 Fungsi Utilitas

Fungsi utilitas biasanya berhubungan dengan tingkat kepuasaan yang pengguna dapatkan atas pemakaian layanan informasi yang digunakan khususnya yang berhubungan dengan memaksimalkan keuntungan dalam mencapai tujuan tertentu dan dapat ditulis dengan $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ yang artinya bahwa $x_1, x_2, \dots, x_n$ mengkontribusikan utilitas pengguna yang mengindikasikan kepuasaan-tujuan (Curescu, 2005; Xezan Wang & Hau Schulzrinne, 2001).

Selain itu juga terdapat garis yang membentuk fungsi utilitas yang disebut dengan kurva indiferensi (*indifference curve*) atau kurva yang menggambarkan hubungan antara dua jenis barang yang dikonsumsi oleh konsumen di mana konsumen mendapatkan kepuasan yang sama pada tiap-tiap titik kombinasi kuantitas kedua jenis barang tersebut (Chugh, 2012), kurva indiferensi memiliki *slope* negatif, bentuk kurva indiferensi berslope negatif yaitu jika konsumen mengurangi konsumsi satu barang, maka konsumsi barang yang lain perlu ditambah dalam rangka mempertahankan kepuasan konsumen. Slope negatif dari kurva indiferensi sama dengan MRS, *MRS* (*Marginal Rate of Substitution*) (Floyd, 2013) merupakan tingkat di mana konsumen bersedia memberikan sejumlah barang untuk memperoleh barang lainnya dengan tingkat kepuasan yang diperoleh adalah sama atau sama dengan kemiringan pada kurva indiferensi.

2.2.1 Fungsi Utilitas Quasi-Linier

Menurut Hutchinson (2011), bentuk umum fungsi utilitas berdasarkan quasi-linier : $U = ax + f(y)$ atau $U = f(x) + ay$ dengan $f(y)$ atau $f(x)$ merupakan fungsi non-linier dan a merupakan konstanta. Fungsi non-linier yang digunakan dalam penelitian ini adalah Y^b; *b* merupakan konstanta.

2.2.2 Fungsi Utilitas Perfect Substitute

Bentuk umum : $U(x, y) = ax + by$ (2.7)

dengan *a* dan *b* merupakan konstanta (Hutchinson, 2011).

$$U = F(x, y)$$

$$du = \frac{\partial U}{\partial x}.dx + \frac{\partial U}{\partial y}.dy$$

$$MUx.dx + MUy.dy = 0$$

$$MUx.dx = -MUy.dy \qquad \text{atau}$$

$$MRS = -\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b} \tag{2.8}$$

Kurva indiferensi dari fungsi utilitas ini memiliki kemiringan $-\frac{a}{b}$.

2.2.3 Fungsi Utilitas *Bandwidth*

Beberapa asumsi umum tentang fungsi utilitas sebagai fungsi dari *bandwidth* menurut (Wang dan Schulzrinne, 2004), dengan menetapkan nilai kehilangan (*lost*) dan keterlambatan

(*delay*). Penyedia layanan ini memiliki *bandwidth* transmisi minimum dan utilitas adalah nol untuk *bandwidth* awal. Selain itu, hasil dari kepuasan konsumen dilaporkan bahwa fungsi utilitas biasanya mengikuti model yang menurun kembali ke skala, yaitu utilitas marjinal sebagai Fungsi *Bandwidth* yang berkurang dengan meningkatkan *bandwidth* dan akhirnya bernilai nol. Hal tersebut mendefinisikan persyaratan *QoS* yang maksimal.
Bentuk umum (Wang dan Schulsrinne, 2004):

$$U(x) = U_0 + w \ln \frac{x}{x_m} \tag{2.9}$$

dengan : x_m : Minimum *bandwidth* yang diharapkan konsumen
w : Sensitifitas tingkat kepuasan pada *bandwidth*;
U_0 : Peluang keuangan bagi produsen yang diharapkan pada konsumen

Dari Persamaan (2.9) tersebut diperoleh bentuk umum fungsi utilitas sebagai Fungsi *Bandwidth* (Yang, 2004) :

$$U_{kj} = U_{0j} + W_j \ln \frac{X_{kj}}{L_{mj}} \tag{2.10}$$

dengan :
U_{kj} : Penghasilan yang diperoleh dari konsumen *k* pada kelas *j*;
W_j : Sensitifitas harga untuk *bandwidth* pada kelas *j*;
U_{0j} : Peluang keuangan bagi kelas *j* ketika konsumen telah mempersiapkan saat tingkat *QoS* terendah
L_{mj} : Tingkat terendah (minimum) *bandwidth* pada kelas *j*;
X_{kj} : *Bandwidth* yang didapat oleh konsumen *k* pada kelas *j*

2.2.4 Fungsi Utilitas *Cobb-Douglas*

Menurut Hutchison (2011) bentuk umum fungsi utilitas berdasarkan Cobb-Douglas*:*

$$U(X,Y) = X^a Y^b;\ a,b > 0 \tag{2.11}$$

Keterangan : *X* merupakan tingkat penggunaan layanan saat jam sibuk dan *Y* merupakan tingkat penggunaan layanan saat jam tidak sibuk; dengan *a* dan *b* merupakan konstanta

BAB III
FUNGSI UTILITAS QUASI-LINIER

Bentuk umum fungsi utilitas quasi-linier :

$$U(X\,,Y) = \;a\,X + f(Y);\text{ dimana } f(Y) = Y^b$$

Berikut ini dianalisis fungsi utilitas quasi-linier untuk konsumen homogen dan konsumen heterogen (*high-end* dan *low-end*) serta konsumen heterogen (*high-demand* dan *low-demand)* berdasarkan 3 strategi skema pembiayaan yaitu skema pembiayaan *flat-fee*, skema pembiayaan *usage-based*, skema pembiayaan *two-part tariff*.

3.1 Fungsi Utilitas Quasi-Linier pada Konsumen Homogen

Untuk skema pembiayaan *flat fee* :

Optimasi Masalah Konsumen :

$$\text{Maks}_{X,Y,Z}\; Zk = a\,X + f(Y) - P_x X - P_y Y - PZ - (X+Y)c \tag{3.1}$$

dengan kendala :

$$X \le \bar{X}Z$$
$$Y \le \bar{Y}Z$$
$$a\,X + f(Y) - P_x X - P_y Y - PZ - (X+Y)c \ge 0 \tag{3.2}$$
$$Z = 0 \text{ atau } 1$$

Optimasi Masalah Produsen :

$$\underset{P,P_x,P_y}{\text{Maks}} \sum_i \left(P_x X^* + P_y Y^* + PZ^*\right)$$

dengan (X*,Y*,Z*) = argmaks $a\,X + f(Y) – P_x X – P_y Y – PZ – (X+Y)c$

dengan kendala:

$$X \le \bar{X}Z$$
$$Y \le \bar{Y}Z$$
$$a\,X + f(Y) - PxX - PyY - PZ - (X+Y)c \ge 0$$
$$Z = 0 \text{ atau } 1$$

Untuk skema pembiayaan *usage-based* dan *two-part tariff* :

Optimasi Masalah Konsumen :

$$\text{Maks}_{X,Y,Z}\; Zk = a\,X + f(Y) - P_x X - P_y Y - PZ - (c+t)X - (c+t)Y \tag{3.3}$$

dengan kendala :

$$X \le \bar{X}Z$$
$$Y \le \bar{Y}Z$$
$$a\,X + f(Y) - P_x X - P_y Y - PZ - (c+t)X - (c+t)Y \ge 0 \tag{3.4}$$
$$Z = 0 \text{ atau } 1$$

Optimasi Masalah Produsen :

$$\underset{P,P_x,P_y}{\text{Maks}} \sum_i \left(P_x X^* + P_y Y^* + PZ^*\right)$$

dengan (X*,Y*,Z*) = argmaks $a\,X + f(Y) – P_x X – P_y Y – PZ – (c+t)X - (c+t)Y$

dengan kendala:

$$X \le \bar{X}Z$$
$$Y \le \bar{Y}Z$$
$$a\,X + f(Y) - PxX - PyY - PZ - (c+t)X - (c+t)Y \ge 0$$
$$Z = 0 \text{ atau } 1$$

Kasus 1b. Jika ISP menggunakan skema pembiayaan *flat-fee* maka ditetapkan $P_x = 0, P_y = 0$ dan $P > 0$.

Optimasi masalah konsumen untuk skema pembiayaan *flat-fee* menjadi :

$$\underset{P,P_x,P_y}{\text{Maks}}\; Zk = aX + f(Y) - (0)X - (0)Y - P(1) - (X+Y)c$$
$$= \underset{P,P_x,P_y}{\text{Maks}}\; Zk = aX + f(Y) - P - (X+Y)c$$

Dengan menggunakan Kendala (4.28), diperoleh :

$$aX + f(Y) - P_xX - P_yY - PZ - (X+Y)c \geq 0$$
$$\Leftrightarrow aX + f(Y) - (0)X - (0)Y - P(1) - (X+Y)c \geq 0$$
$$\Leftrightarrow aX + f(Y) - P - (X+Y)c \geq 0$$
$$\Leftrightarrow P \leq aX + f(Y) - (X+Y)c$$

Optimasi masalah produsen menjadi :

$$\underset{P,P_x,P_y}{\text{Maks}} \sum_i \left(P_xX^* + P_yY^* + PZ^*\right) = \underset{P,P_x,P_y}{\text{Maks}} \sum_i \left((0)X^* + (0)Y^* + P(1)\right)$$
$$= \underset{P,P_x,P_y}{\text{Maks}} \sum_i \left((0)X^* + (0)Y^* + aX + f(Y) - (X+Y)c\right)$$
$$= \underset{P,P_x,P_y}{\text{Maks}} \sum_i aX + f(Y) - (X+Y)c$$

Artinya jika ISP memberikan harga ini, maka tingkat konsumsi konsumen menjadi $X = \bar{X}$ dan $Y = \bar{Y}$ dengan utilitas maksimum, konsumen bisa mendapatkan $a\bar{X} + f(\bar{Y}) - (\bar{X} + \bar{Y})c$. Harga optimal ISP yang dikenakan adalah $a\bar{X} + f(\bar{Y}) - (\bar{X} + \bar{Y})c$ dengan keuntungan maksimumnya adalah:

$$\sum_i [a\bar{X} + f(\bar{Y}) - (\bar{X} + \bar{Y})c]$$

Berdasarkan kasus ini diperoleh lemma berikut:

Lemma 1b :

Jika ISP menggunakan skema pembiayaan *flat-fee*, harga optimalnya menjadi $a\bar{X} + f(\bar{Y}) - (\bar{X} + \bar{Y})c$ dan keuntungan maksimum menjadi:

$$\sum_i [a\bar{X} + f(\bar{Y}) - (\bar{X} + \bar{Y})c]$$

Kasus 2b. Jika ISP menggunakan skema pembiayaan *usage-based* maka ditetapkan $P_x > 0, P_y > 0$ dan $P = 0$. Optimasi masalah konsumen pada skema pembiayaan *usage-based* menjadi :

$$\underset{X,Y,Z}{\text{Maks}}\ Zk = a\,X + f(Y) - P_xX - P_yY - (c+t)X - (c+t)Y \qquad (3.5)$$

Untuk memaksimumkan Persamaan (3.5), dilakukan pendiferensialan terhadap X dan Y; dengan syarat

$$\frac{\partial Zk}{\partial X} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial Zk}{\partial X} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial(a\,X + f(Y) - P_xX - P_yY - (c+t)X - (c+t)Y)}{\partial X} = 0$$
$$\Leftrightarrow a - (c+t) = P_x \Leftrightarrow X^* = \bar{X} \qquad (3.6)$$

dan

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(a\,X + f(Y) - P_xX - P_yY - (c+t)X - (c+t)Y)}{\partial \bar{Y}} = 0$$
$$\Leftrightarrow f'(\bar{Y}) - (c+t) = P_y \Leftrightarrow Y^* = \bar{Y} \qquad (3.7)$$

Optimasi masalah produsen menjadi :

$$\underset{P,P_x,P_y}{\text{Maks}} \sum_i \left(P_xX^* + P_yY^*\right) = \sum_i \left[P_x(\bar{X}) + P_y(\bar{Y})\right]$$
$$= \sum_i \left[(a - (c+t))\bar{X} + \left(f'(\bar{Y}) - (c+t)\right)\bar{Y}\right]$$

$$= \sum_i [a\bar{X} - (c+t)\bar{X} + \bar{Y}f'(\bar{Y}) - (c+t)\bar{Y}]$$

$$= \sum_i [a\bar{X} + \bar{Y}f'(\bar{Y}) - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y}]$$

Untuk memaksimumkan fungsi optimasi masalah produsen, ISP harus meminimumkan P_x dan P_y. Jika diketahui P_x dan P_y menurun, maka X^* dan Y^* meningkat, apabila X dan Y dibatasi, maka $X^*=\bar{X}$ dan $Y^*=\bar{Y}$. P_x dan P_y yang optimal menjadi $P_x = a - (c+t)$ dan $P_y = f'(\bar{Y}) - (c+t)$ dengan keuntungan maksimum:

$$\sum_i [a\bar{X} + \bar{Y}\, f'(\bar{Y}) - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y}]$$

Berdasarkan kasus ini diperoleh lemma berikut:

Lemma 2b :

Jika ISP menggunakan skema pembiayaan *usage-based*, maka harga optimalnya adalah $P_x = a - (c+t)$ dan $P_y = f'(\bar{Y}) - (c+t)$, dengan keuntungan maksimumnya adalah:

$$\sum_i [a\bar{X} + \bar{Y}f'(\bar{Y}) - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y}]$$

Kasus 3b. Jika ISP menggunakan skema pembiayaan *two-part tariff* maka ditetapkan $P_x > 0$, $P_y > 0$ dan $P > 0$, dengan menggunakan Persamaan (3.6) dan (3.7). Untuk memaksimumkan Fungsi Tujuan (3.3), Persamaan (3.6) dan (3.7) disubstitusikan ke Pertidaksamaan (3.4), sehingga diperoleh:

$$aX + f(Y) - P_xX - P_yY - PZ - (c+t)X - (c+t)Y \geq 0$$
$$\Leftrightarrow aX + f(Y) - (a - (c+t))\bar{X} - \big(f'(\bar{Y}) - (c+t)\big)\bar{Y} - P - (c+t)X - (c+t)Y \geq 0$$
$$\Leftrightarrow aX + f(Y) - a\bar{X} + (c+t)\bar{X} - \bar{Y}f'(\bar{Y}) + (c+t)\bar{Y} - P - (c+t)X - (c+t)Y \geq 0$$
$$\Leftrightarrow aX - a\bar{X} + f(Y) - \bar{Y}f'(\bar{Y}) + (c+t)\bar{X} + (c+t)\bar{Y} - (c+t)X - (c+t)Y - P \geq 0$$

$$P \leq aX - a\bar{X} + f(Y) - \bar{Y}f'(\bar{Y}) + (c+t)\bar{X} + (c+t)\bar{Y} - (c+t)X - (c+t)Y$$

Dengan mensubstitusikan nilai P ke Fungsi Tujuan (3.3), optimasi masalah produsen menjadi:

$$\underset{P,P_x,P_y}{\text{Maks}} \sum_i \left(P_xX^* + P_yY^*\right) = \sum_i \left[P_x(\bar{X}) + P_y(\bar{Y}) + P\right]$$

$$= \sum_i [(a - (c+t))\bar{X} + (f'(\bar{Y}) - (c+t))\bar{Y} + (aX - a\bar{X} + f(\bar{Y}) - \bar{Y}f'(\bar{Y}) + (c+t)\bar{X} + (c+t)\bar{Y} - (c+t)X - (c+t)Y)]$$

$$= \sum_i [a\bar{X} - (c+t)\bar{X} + \bar{Y}f'(\bar{Y}) - (c+t)\bar{Y} + aX - a\bar{X} + f(\bar{Y}) - \bar{Y}f'(\bar{Y}) + (c+t)\bar{X} + (c+t)\bar{Y} - (c+t)X - (c+t)Y]$$

$$= \sum_i [a\bar{X} + f(\bar{Y}) - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y}]$$

Untuk memaksimalkan fungsi optimasi masalah produsen, ISP harus meminimalkan P_x dan P_y. Jika diketahui P_x dan P_y menurun, maka X^* dan Y^* meningkat, apabila X dan Y dibatasi, maka $X^* \leq \bar{X}$ dan $Y^* \leq \bar{Y}$. Dengan kata lain, P_x dan P_y yang optimal menjadi $P_x = a - (c+t)$ dan $P_y = f'(\bar{Y}) - (c+t)$. Keuntungan maksimum dicapai oleh ISP adalah:

$\sum_i [a\bar{X} + f(\bar{Y}) - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y}]$; i menyatakan konsumen.. Berdasarkan kasus ini diperoleh lemma berikut.

Lemma 3b :
Jika ISP menggunakan harga *two-part tariff*, maka P_X dan P_Y yang terbaik menjadi $P_x = a$ dan $P_y = f'(\bar{Y})$. Keuntungan maksimum yang dicapai oleh ISP adalah $\sum_i [a\bar{X} + f(\bar{Y}) - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y}]$; i menyatakan konsumen. Hasil analisis dari Lemma 1b, 2b dan 3b tersebut disajikan dalam Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Perbandingan Skema Pembiayaan untuk Konsumen Homogen Berdasarkan Fungsi Utilitas Quasi-Linier dengan Biaya Marjinal dan Biaya Pengawasan

Yang Dioptimalkan	Lemma 1.b (*Flat-Fee*)	Lemma 2.b (*Usage-Based*)	Lemma 3.b (*Two-Part Tariff*)
Harga yang Dikenakan oleh Konsumen	$\boldsymbol{a\bar{X} + f(\bar{Y}) - (\bar{X}+\bar{Y})c}$	$\boldsymbol{P_x = a - (c+t)}$ dan $\boldsymbol{P_y = f'\bar{Y} - (c+t)}$	$\boldsymbol{P_x = a - (c+t)}$ dan $\boldsymbol{P_y = f'(\bar{Y}) - (c+t)}$
Keuntungan maksimum	$\boldsymbol{\sum_i [a\bar{X} + f(\bar{Y}) - (\bar{X}+\bar{Y})c]}$	$\boldsymbol{\sum_i [a\bar{X} + \bar{Y}f'(\bar{Y}) - c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y}]}$	$\boldsymbol{\sum_i [a\bar{X} + f(\bar{Y}) - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y}]}$

Berdasarkan Tabel 3.1, jika diasumsikan $\bar{Y} f'(\bar{Y}) > f(\bar{Y})$; $\bar{Y} > 0$ dan fungsi $f(\bar{Y})$= Y^b merupakan fungsi non linear, maka $a\bar{X} + \bar{Y} f'(\bar{Y}) - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y} > a\bar{X} + f(\bar{Y}) - (\bar{X}+\bar{Y})c > a\bar{X} + f(\bar{Y}) - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y}$ artinya, skema pembiayaan *usage-based* menghasilkan keuntungan yang lebih besar dibandingkan dengan skema pembiayaan *flat-fee* dan skema pembiayaan *two-part tariff* untuk masalah konsumen homogen.

3.2 Fungsi Utilitas Quasi-Linier pada Konsumen Heterogen *High-End* dan *Low-End*

Misalkan terdapat *m* konsumen *high-end* (golongan atas) (*i* = 1) dan *n* konsumen *low-end* (golongan bawah) (*i* = 2). Untuk mengetahui kesediaan konsumen heterogen untuk membayar mempengaruhi skema harga yang diberikan penyedia layanan, diasumsikan setiap konsumen di kedua segmen memiliki batas atas yang sama *X* pada jam sibuk dan *Y* pada jam tidak sibuk, $a_1 > a_2$ dan $b_1 > b_2$.

- Untuk skema pembiayaan *flat-fee*

Optimasi Masalah Konsumen :

$$\underset{X_i,Y_i,Z_i}{\text{Maks}}\ Zk = a_i X_i + f(Y_i) - P_X X_i - P_Y Y_i - PZ_i - (X_i + Y_i)c \tag{3.8}$$

dengan kendala :

$$X_i \leq \bar{X} Z_i$$
$$Y_i \leq \bar{Y} Z_i$$
$$a_i X_i + f(Y_i) - P_x X_i - P_y Y_i - PZ_i - (X_i + Y_i)c \geq 0 \tag{3.9}$$
$$Z_i = 0 \text{ atau } 1$$

Optimasi Masalah Produsen :

$$\underset{P,P_x,P_y}{\text{Maks}}\ m\left(P_x \text{X}_1{}^* + P_y \text{Y}_1{}^* + P\text{Z}_1{}^*\right) + n\left(P_x \text{X}_2{}^* + P_y \text{Y}_2{}^* + P\text{Z}_2{}^*\right)$$

dengan $(X_i{}^*, Y_i{}^*, Z_i{}^*) =$ argmaks $a_i X_i + f(Y_i) - P_x X_i - P_y Y_i - PZ_i$

dengan kendala :

$$X_i \leq \bar{X} Z_i$$
$$Y_i \leq \bar{Y} Z_i$$
$$a_i X_i + f(Y_i) - P_x X_i - P_y Y_i - PZ_i \geq 0$$
$$Z_i = 0 \text{ atau } 1$$

- Untuk skema pembiayaan *usage-based* dan *two-part tariff*

Optimasi Masalah Konsumen :

$$\underset{X_i,Y_i,Z_i}{\text{Maks}}\ Zk = a_i X_i + f(Y_i) - P_x X_i - P_y Y_i - PZ_i - (c+t)X_i - (c+t)Y_i \tag{3.10}$$

dengan kendala :

$X_i \leq \bar{X} Z_i$
$Y_i \leq \bar{Y} Z_i$
$a_i X_i + f(Y_i) - P_x X_i - P_y Y_i - PZ_i - (X_i + Y_i)c \geq 0$ (3.11)
$Z_i = 0$ atau 1

Optimasi Masalah Produsen :

$$\underset{P,P_x,P_y}{\text{Maks}}\ m\left(P_x X_1^* + P_y Y_1^* + PZ_1^*\right) + n\left(P_x X_2^* + P_y Y_2^* + PZ_2^*\right)$$

dengan $(X_i^*,\ Y_i^*, Z_i^*) =$ argmaks $a_i X_i + f(Y_i) - P_x X_i - P_y Y_i - PZ_i$

dengan kendala :

$X_i \leq \bar{X} Z_i$
$Y_i \leq \bar{Y} Z_i$
$a_i X_i + f(Y_i) - P_x X_i - P_y Y_i - PZ_i \geq 0$
$Z_i = 0$ atau 1

Langkah-langkah untuk mendapatkan keuntungan maksimum pada setiap skema pembiayaan yang digunakan ISP.

Kasus 4b**.** Jika ISP menggunakan skema pembiayaan *flat-fee* maka $P_x = 0, P_y = 0$ dan $P > 0$, dimana harga yang digunakan oleh ISP tidak berpengaruh pada waktu penggunaan jam sibuk atau jam tidak sibuk, maka konsumen memilih tingkat konsumsi maksimum $X_1 = \bar{X}$, $X_2 = \bar{X}$, $Y_1 = \bar{Y}$, dan $Y_2 = \bar{Y}$. Dengan demikian, setiap konsumen *high-end* dikenakan biaya tidak lebih dari $a_1\bar{X} + f(\bar{Y}) - (\bar{X} + \bar{Y})c$ dan konsumen *low-end* tidak lebih dari $a_2\bar{X} + f(\bar{Y}) - (\bar{X} + \bar{Y})c$. Kasus 4b merupakan skema pembiayaan *flat-fee* sehingga P disetarakan untuk kedua jenis konsumen heterogen. Jika ditetapkan $a_1 > a_2$ maka untuk ketetapan biaya konsumen *high-end* akan mengikuti harga bagi biaya konsumen *low-end* sehingga $a_1\,(m) < a_2\,(m+n) \Leftrightarrow a_1 < \frac{a_2\,(m+n)}{m}$.

Artinya jika konsumen dikenakan biaya sebesar $a_1\bar{X} + f(\bar{Y}) - (\bar{X} + \bar{Y})c$, maka hanya konsumen *high-end* yang dapat mengikuti layanan. Jika konsumen dikenakan biaya sebesar $a_2\bar{X} + f(\bar{Y}) - (\bar{X} + \bar{Y})c$, maka kedua jenis konsumen tersebut dapat mengikuti layanan, yaitu konsumen *high-end* dan konsumen *low-end*. Untuk memaksimumkan keuntungan, ISP mengenakan biaya $a_2\bar{X} + f(\bar{Y}) - (\bar{X} + \bar{Y})c$. Dalam hal ini untuk optimasi masalah produsen :

$$\underset{P}{\text{Maks}}\ m(PZ_1^*) + n\,(PZ_2^*) = m\{a_2\bar{X} + f(\bar{Y}) - (\bar{X} + \bar{Y})c\} + n\,\{a_2\bar{X} + f(\bar{Y}) - (\bar{X} + \bar{Y})c\}$$
$$= (m+n)\ [a_2\bar{X} + f(\bar{Y}) - (\bar{X} + \bar{Y})c]$$

Keuntungan maksimum yang diperoleh produsen adalah:

$$(m+n)\ [a_2\bar{X} + f(\bar{Y}) - (\bar{X} + \bar{Y})c]$$

Berdasarkan kasus ini diperoleh lemma berikut.

Lemma 4b :

Jika ISP menggunakan skema pembiayaan *flat-fee*, maka harga yang dikenakan adalah $a_2\bar{X} + f(\bar{Y}) - (\bar{X} + \bar{Y})c$ dengan keuntungan maksimum yang diperoleh adalah:

$$(m+n)\ [a_2\bar{X} + f(\bar{Y}) - (\bar{X} + \bar{Y})c]$$

Kasus 5b. Jika ISP menggunakan skema pembiayaan *usage-based* maka ditetapkan $P_x > 0, P_y > 0$ dan $P = 0$ maka :

Optimasi masalah untuk konsumen heterogen *high-end*:

Fungsi pada optimasi masalah konsumen menjadi :

$$\underset{X,Y,Z}{\text{Maks}}\ Zk = a_1 X_1 + f(Y_1) - P_x X_1 - P_y Y_1 - (c+t)X_1 - (c+t)Y_1 \quad (3.12)$$

Untuk memaksimumkan fungsi tujuan (3.12) untuk konsumen heterogen *high-end*, dilakukan pendiferensialan terhadap X_1 dan Y_1; dengan syarat

$$\frac{\partial Zk}{\partial X_1} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial Zk}{\partial Y_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(a_1 X_1 + f(Y_1) - P_x X_1 - P_y Y_1 - (c+t)X_1 - (c+t)Y_1)}{\partial X_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1 - (c+t) = P_x$$

(3.13)

$$\Leftrightarrow\ X_1^{\,*} = \bar{X}$$

dan

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(a_1X_1 + f(Y_1)\ -\ P_xX_1 -\ P_yY_1 - (c+t)X_1 - (c+t)Y_1)}{\partial Y_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(Y_1) - (c+t) = P_y \tag{3.14}$$

$$\Leftrightarrow\ Y_1^{\,*} = \bar{Y}$$

Optimasi masalah untuk konsumen heterogen *low-end*:
Fungsi pada optimasi masalah konsumen:

$$\text{Maks}_{\,X,Y,Z}\ Zk = a_2X_2 + f(Y_2)\ -\ P_xX_2 -\ P_yY_2 - (c+t)X_2 - (c+t)Y_2 \tag{3.15}$$

Untuk memaksimumkan fungsi tujuan (3.15) untuk konsumen heterogen *low-end*, dilakukan pendiferensialan terhadap X_2 dan Y_2; dengan syarat

$$\frac{\partial Zk}{\partial X_2} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial Zk}{\partial Y_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(\ a_2X_2 + f(Y_2)\ -\ P_xX_2 -\ P_yY_2 - (c+t)X_2 - (c+t))}{\partial X_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow a_2 - (c+t)\ =\ P_x \tag{3.16}$$

$$\Leftrightarrow\ X_2^{\,*} = \bar{X}$$

dan

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(\ a_2X_2 + f(Y_2)\ -\ P_xX_2 -\ P_yY_2\ - (c+t)X_2 - (c+t)Y_2)}{\partial Y_2}$$

$$\Leftrightarrow f'(Y_2) - (c+t) = P_y \tag{3.17}$$

$$\Leftrightarrow\ Y_2^{\,*} = \bar{Y}$$

Optimasi masalah produsen menjadi :

$$\underset{P_x,P_y}{\text{Maks}}\ m\left(P_x\mathrm{X}_1^{\,*} +\ P_y\mathrm{Y}_1^{\,*}\right) +\ n\left(P_x\mathrm{X}_2^{\,*} +\ P_y\mathrm{Y}_2^{\,*}\right)$$

$$= m[P_X(\bar{X}) +\ P_Y(\bar{Y})] +\ n\,[P_X(\ \bar{X}) +\ P_Y(\bar{Y}\ )]$$

$$=\ m[(a_1 - (c+t))\bar{X} + (f'(\bar{Y}) - (c+t))\bar{Y}\ ] +\ n\,[(a_2 - (c+t))\bar{X} + (f'(\bar{Y}) - (c+t))\bar{Y}]$$

$$=\ m[a_1\bar{X} - (c+t)\bar{X} + \bar{Y}f'(\bar{Y}) - (c+t)\bar{Y}\ ] +\ n\,[a_2\bar{X} - (c+t)\bar{X} + \bar{Y}f'(\bar{Y}) - (c+t)\bar{Y}]$$

$$=\ m[a_1\bar{X} + \bar{Y}f'(\bar{Y}) - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y}\ ] +\ n\,[a_2\bar{X} + \bar{Y}f'(\bar{Y}) - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y}]$$

Jika diterapkan pada masalah di jam sibuk, untuk memaksimalkan fungsi, ISP harus meminimumkan P_x dan karenanya harga terbaik P_x tidak dapat lebih besar dari $a_1 - (c+t)$. Di sisi lain, jika ISP menetapkan harga di bawah $a_2 - (c+t)$, keuntungan tidak optimal. Jika diterapkan pada masalah di jam tidak sibuk, harga terbaik $P_y \le \bar{Y}f'(\mathrm{Y}_1) - (c+t)$. Di sisi lain, jika ISP menetapkan harga di bawah $\bar{Y}f'(\mathrm{Y}_2) - (c+t)$, maka keuntungan tidak optimal ketika Y_1*$\le \bar{Y}$ dan Y_2*$\le \bar{Y}$. Oleh karena itu, harga P_y yang terbaik adalah $f'(\mathrm{Y}_2) - (c+t) \le P_y \le f'(\mathrm{Y}_1) - (c+t)$. Jika harga berada di interval ini, permintaan dari konsumen *high-end* tetap pada $\bar{X}$ dan $\bar{Y}$, sementara permintaan dari konsumen *low-end* terus meningkat karena harga turun. Dengan demikian harga optimal diberikan untuk jam sibuk adalah $P_x =\ a_2\ - (c+t)$ dan harga optimal di jam tidak sibuk adalah $P_y =\ f'(\bar{Y}) - (c+t)$ sehingga keuntungan maksimumnya adalah:

$$(m+n)(a_2\,\bar{X} + \bar{Y}f'(\bar{Y}) - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y})$$

Berdasarkan kasus ini diperoleh lemma berikut.

Lemma 5b :

Jika ISP menggunakan harga *usage-based*, maka harga optimal diberikan untuk jam sibuk adalah $P_x = a_2 - (c+t)$ dan harga optimal di jam tidak sibuk adalah $P_y = f'(\bar{Y}) - (c+t)$ dengan keuntungan maksimumnya adalah:

$$(m+n)(a_2\bar{X} + \bar{Y}f'(\bar{Y}) - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y}).$$

Kasus 6b. Jika ISP menggunakan skema pembiayaan *two-part tariff*, maka $P_x > 0$, $P_y > 0$, dan $P > 0$. dimana terdapat biaya yang dikeluarkan jika konsumen memilih untuk bergabung dengan layanan serta harga yang dikenakan saat jam sibuk dan jam tidak sibuk, kondisi orde pertama untuk persamaan optimasi masalah konsumen *high-end* dan konsumen *low-end*.

Persamaan (3.13) dan (3.16) adalah kurva permintaan *high-end* dan *low-end* di jam sibuk, Persamaan (3.14) dan (3.17) adalah kurva permintaan konsumen *high-end* dan *low-end* di jam tidak sibuk. Jika ditetapkan $a_1 > a_2$ maka dapat diasumsikan bahwa $a_1\,(m) < a_2\,(m+n) \Leftrightarrow a_1 < \frac{a_2\,(m+n)}{m}$.

Artinya jika konsumen dikenakan biaya sebesar $P_x = a_1 - (c+t)$dan $P_y = f'(Y_1) - (c+t)$ dan $P = a_1X - a_1\bar{X} + f(Y) - \bar{Y}f'(\bar{Y}) + (c+t)\bar{X} + (c+t)\bar{Y} - (c+t)X - (c+t)Y$ maka hanya konsumen *high-end* yang dapat mengikuti layanan ini. Jika konsumen dikenakan biaya sebesar $P_x = a_2 - (c+t)$ dan $P_y = f'(\bar{Y}) - (c+t)$ maka dua jenis konsumen tersebut dapat mengikuti layanan, yaitu konsumen *high-end* dan konsumen *low-end*. ISP dapat memilih untuk menurunkan biaya dikarenakan banyak konsumen menjadikan biaya berlangganan sebagai kendala sehingga dapat menarik lebih banyak konsumen, ISP dapat memberikan harga $P_x = a_2 - (c+t)$, $P_Y = f'(Y_2) - (c+t)$, dan meminimumkan biaya berlangganan.

Optimasi masalah produsen menjadi :

$$\underset{P_x,P_y}{\text{Maks}}\; m\left(P_xX_1{}^* + P_yY_1{}^* + PZ_1{}^*\right) + n\left(P_xX_2{}^* + P_yY_2{}^* + PZ_2{}^*\right)$$

$$= m[a_2\bar{X} + f(\bar{Y}) - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y})]$$
$$+ n\,[(a_2 + f(\bar{Y}) - (c+t))\bar{X} - (c+t)\bar{Y})]$$
$$= (m+n)[a_2\bar{X} + f(\bar{Y}) - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y})]$$

Dengan demikian keuntungan maksimum yang dicapai adalah:

$$(m+n)(a_2\bar{X} + f(\bar{Y}) - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y})$$

Berdasarkan kasus ini diperoleh lemma berikut.

Lemma 6b :

Jika ISP menggunakan harga *two-part tariff*, P_X dan P_Y optimal masing-masing menjadi $P_x = a_2 - (c+t)$ dan $P_y = f'(\bar{Y}) - (c+t)$, dengan keuntungan maksimum yang diperoleh adalah:

$$(m+n)[a_2\,\bar{X} + f(\bar{Y}) - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y}]$$

Hasil analisis dari Lemma 4b, 5b, dan 6b disajikan dalam Tabel 3.2

Tabel 3.2 Perbandingan Skema Pembiayaan Internet untuk Masalah Konsumen Heterogen (*High-End* dan *Low-End*) Berdasarkan Fungsi Utilitas Quasi-Linier dengan Biaya Marjinal dan Biaya Pengawasan

Yang Dioptimalkan	Lemma 4b (*Flat-Fee*)	Lemma 5b (*Usage-Based*)	Lemma 6b (*Two-Part Tariff*)
Harga yang Dikenakan pada Konsumen	$\boldsymbol{a_2\bar{X} + f(\bar{Y}) - (\bar{X}+\bar{Y})c}$	$\boldsymbol{P_x = a_2 - (c+t)}$ dan $\boldsymbol{P_y = f'(\bar{Y}) - (c+t)}$	$\boldsymbol{P_x = a_2 - (c+t)}$ dan $\boldsymbol{P_y = f'(\bar{Y}) - (c+t)}$
Keuntungan maksimum	$\boldsymbol{(m+n)(a_2\bar{X} + f(\bar{Y}) - (\bar{X}+\bar{Y})c)}$	$\boldsymbol{(m+n)(a_2\bar{X} + \bar{Y}f'(\bar{Y}) - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y})}$	$\boldsymbol{(m+n)(a_2\bar{X} + f(\bar{Y}) - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y})}$

Berdasarkan Tabel 3.2, jika diasumsikan $\bar{Y}\, f'(\bar{Y}) > f(\bar{Y})$, dengan $\bar{Y} > 0$ dan fungsi $f(\bar{Y})$ merupakan fungsi non linear, $f(\bar{Y})= Y^b$, $X \geq 0$ dan $Y \geq 0$, maka $(m+n)\big(a_2\bar{X} + \bar{Y}f'(\bar{Y})\big) > (m+n)(a_2\bar{X} + f(\bar{Y}))$. Oleh karena itu, skema pembiayaan *usage-based* lebih baik dibandingkan skema pembiayaan *flat-fee* dan *two-part tariff* untuk masalah konsumen heterogen *high-end* dan *low-end*.

3.3 Fungsi Utilitas Quasi-Linier pada Konsumen Heterogen *High-Demand* dan Konsumen Heterogen *Low-Demand*

Misal diasumsikan dua jenis konsumen, konsumen tingkat pemakaian tinggi (tipe 1) dengan tingkat konsumsi maksimum $\bar{X}_1$ dan $\bar{Y}_1$ dan konsumen tingkat pemakaian rendah (tipe 2) dengan tingkat konsumsi maksimum $\bar{X}_2$ dan $\bar{Y}_2$. Terdapat *m* konsumen (tipe 1) dan *n* konsumen (tipe 2) konsumen dengan $a_1 = a_2 = a$ dan $b_1 = b_2 = b$. Penentuan keuntungan maksimum pada setiap skema pembiayaan yang digunakan ISP.

Kasus 7b. Jika ISP menggunakan skema pembiayaan *flat-fee* maka ditetapkan $P_x = 0$, $P_y = 0$ dan $P > 0$. Artinya, jika konsumen (konsumen *high-demand* atau *low-demand*) memilih untuk bergabung dengan layanan, maka konsumen tersebut sepenuhnya memanfaatkan layanan dengan memilih tingkat konsumsi $X_1 = \bar{X}_1$, $Y_1 = \bar{Y}_1$ atau $X_2 = \bar{X}_2$, $Y_2 = \bar{Y}_2$ dengan tingkat maksimum $a\bar{X}_1 + f(\bar{Y}_1) - (\bar{X}_1 + \bar{Y}_1)c$ atau $a\bar{X}_2 + f(\bar{Y}_2) - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)c$ (untuk konsumen *high-demand* dan *low-demand*), sehingga ISP dapat memberikan harga untuk setiap konsumen *high-demand* tidak lebih dari $a\bar{X}_1 + f(\bar{Y}_1) - (\bar{X}_1 + \bar{Y}_1)c$ dan konsumen *low-demand* tidak lebih dari $a\bar{X}_2 + f(\bar{Y}_2) - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)c$. Jika ISP tidak dapat membedakan konsumen *high-demand* dan konsumen *low-demand* maka ISP harus memberikan harga yang sama untuk kedua konsumen, ISP dapat menetapkan harga $a\bar{X}_1 + f(\bar{Y}_1) - (\bar{X}_1 + \bar{Y}_1)c$ dengan hanya melayani konsumen tingkat pemakaian tinggi atau menetapkan harga $a\bar{X}_2 + f(\bar{Y}_2) - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)c$ dengan melayani kedua jenis konsumen yaitu konsumen tingkat *high-demand* dan *low-demand*.

Jika diasumsikan bahwa $m[a\bar{X}_1 + f(\bar{Y}_1) - (\bar{X}_1 + \bar{Y}_1)c] < (m+n)[a\bar{X}_2 + f(\bar{Y}_2) - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)c]$, harga terbaik yang ditetapkan ISP untuk layanan adalah sebesar $a\bar{X}_2 + f(\bar{Y}_2) - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)c$ dan melayani kedua jenis konsumen tersebut dengan keuntungan maksimum diperoleh adalah:

$$(m+n)[a\bar{X}_2 + f(\bar{Y}_2) - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)c]$$

Berdasarkan kasus ini diperoleh lemma berikut.

Lemma 7b :

Jika ISP menggunakan skema pembiayaan *flat-fee*, maka harga yang dikenakan $P = a\bar{X}_2 + f(\bar{Y}_2) - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)c$ dengan keuntungan maksimum yang dicapai adalah:

$$(m+n)[a\bar{X}_2 + f(\bar{Y}_2) - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)c].$$

Kasus 8b. Jika ISP menggunakan skema pembiayaan *usage-based* maka ditetapkan $P_x > 0$, $P_y > 0$, dan $P = 0$, artinya ISP memberikan harga yang dibedakan, yaitu harga pada saat jam sibuk dan tidak sibuk. Untuk optimasi masalah konsumen tingkat pemakaian tinggi dan rendah menghasilkan:
Optimasi masalah konsumen heterogen *high-demand*:

$$\underset{X,Y,Z}{\text{Maks}}\ Zk = aX_1 + f(Y_1) - P_x X_1 - P_y Y_1 - (c+t)X_1 - (c+t)Y_1 \tag{3.18}$$

Untuk memaksimumkan fungsi tujuan (3.18) heterogen *high-demand*, dilakukan pendiferensialan terhadap X_1 dan Y_1; dengan syarat

$$\frac{\partial Zk}{\partial X_1} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial Zk}{\partial Y_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(aX_1 + f(Y_1) - P_x X_1 - P_y Y_1 - (c+t)X_1 - (c+t)Y_1)}{\partial X_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow a - (c+t) = P_x \tag{3.19}$$

$$\Leftrightarrow X_1{}^* = \bar{X}_1$$

dan

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(aX_1 + f(Y_1) - P_x X_1 - P_y Y_1 - (c+t)X_1 - (c+t)Y_1)}{\partial Y_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(Y_1) - (c+t) = P_y \tag{3.20}$$

$$\Leftrightarrow Y_1{}^* = \overline{Y_1}$$

Untuk konsumen heterogen *low-demand*:

$$\underset{X,Y,Z}{\text{Maks}}\ Zk = aX_2 + f(Y_2) - P_x X_2 - P_y Y_2 - (c+t)X_2 - (c+t)Y_2 \tag{3.21}$$

Untuk memaksimumkan fungsi pada optimasi masalah konsumen heterogen *low-demand*, dilakukan pendiferensialan terhadap X_2 dan Y_2; dengan syarat

$$\frac{\partial Zk}{\partial X_2} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial Zk}{\partial Y_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(aX_2 + f(Y_2) - P_x X_2 - P_y Y_2 - (c+t)X_2 - (c+t)Y_2)}{\partial X_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow a - (c+t) = P_x \tag{3.22}$$

$$\Leftrightarrow X_2{}^* = \bar{X}_2$$

dan

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(aX_2 + f(Y_2) - P_x X_2 - P_y Y_2 - (c+t)X_2 - (c+t)Y_2)}{\partial Y_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(Y_2) - (c+t) = P_y$$

$$\Leftrightarrow Y_2{}^* = \overline{Y_2} \tag{3.23}$$

Optimasi masalah ISP menjadi :

$$\text{Maks}_{P_x,P_y}\ m\left(P_x X_1{}^* + P_y Y_1{}^*\right) + n\left(P_x X_2{}^* + P_y Y_2{}^*\right)$$

$$= m\left[P_x(\bar{X}_1) + P_y(\overline{Y_1})\right] + n\left[P_x(\bar{X}_2) + P_y(\overline{Y_2})\right]$$

Dari persamaan (3.20), (3.21), (3.23) dan (3.24), diketahui bahwa selama P_x dan P_y menurun, $X_1{}^*$, $X_2{}^*$, $Y_1{}^*$ dan $Y_2{}^*$ meningkat. Karena X_1, X_2, Y_1 dan Y_2 dibatasi pada $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$, $\overline{Y_1}$, dan $\overline{Y_2}$, untuk memaksimumkan persamaan ini, ISP harus meminimumkan P_x dan P_y sehingga harga P_x yang terbaik adalah $P_x \le a - (c+t)$ dan $f'(\overline{Y_2}) - (c+t) \le P_y \le f'(\overline{Y_1}) - (c+t)$.

Di sisi lain, jika ISP menetapkan harga $P_x < a - (c+t)$, keuntungan tidak optimal karena $X_1{}^* \le \bar{X}_1$ dan $X_2{}^* \le \bar{X}_2$. Oleh karena itu, harga $P_x = a - (c+t)$ dan $P_y = f'(\overline{Y_2}) - (c+t)$. Saat harga berada di interval ini, permintaan konsumen *low-demand* tersebut tetap pada $\bar{X}_2$ sementara permintaan dari konsumen *high-demand* terus meningkat selama harga turun, sehingga keuntungan maksimum yang dicapai :

$$m\left[P_x(\bar{X}_1) + P_y(\overline{Y_1})\right] + n\left[P_x(\bar{X}_2) + P_y(\overline{Y_2})\right]$$

$$= m[(a-(c+t))\bar{X}_1 + (f'(\overline{Y_2}) - (c+t))\overline{Y_1}] + n[(a-(c+t))\bar{X}_2 + (f'(\overline{Y_2}) - (c+t))\overline{Y_2}]$$

$$= m[a\bar{X}_1 - (c+t)\bar{X}_1 + \overline{Y_1}f'(\overline{Y_1}) - (c+t)\overline{Y_1}] + n[a\bar{X}_2 - (c+t)\bar{X}_2 + \overline{Y_2}\,f'(\overline{Y_2}) - (c+t)\overline{Y_2}]$$

$$= m[a\bar{X}_1 + \overline{Y_1}f'(\overline{Y_1}) - (c+t)\bar{X}_1 - (c+t)\overline{Y_1}] + n[a\bar{X}_2 + \overline{Y_2}\,f'(\overline{Y_2}) - (c+t)\bar{X}_2 - (c+t)\overline{Y_2}]$$

Berdasarkan kasus ini diperoleh lemma berikut.

Lemma 8b :
Jika ISP menggunakan skema pembiayaan *usage-based*, maka harga yang optimal di jam sibuk adalah $P_x = a - (c+t)$ dan harga optimal di jam tidak sibuk adalah $P_y = f'(\bar{Y}_2) - (c+t)$ dengan keuntungan maksimum adalah:

$$(m+n)\,[a\bar{X}_2 + \bar{Y}_2\, f'(\bar{Y}_2) - (c+t)\bar{X}_2 - (c+t)\bar{Y}_2\,]$$

Kasus 9b. Jika ISP menggunakan skema pembiayaan *two-part tariff* maka $P_x > 0$, $P_y > 0$, dan $P > 0$, artinya terdapat biaya berlangganan jika konsumen memilih layanan serta harga yang dikenakan pada saat jam sibuk dan jam tidak sibuk. Kondisi orde pertama untuk optimasi masalah konsumen *high-demand* dan *low-demand* menggunakan Persamaan (4.45), (3.21), (2.23), dan (3.24).

Biaya program layanan P yang terbaik dapat ditetapkan pada konsumen adalah biaya yang dikenakan untuk konsumen *low-demand*. Jika biaya layanan lebih dari ini maka menyebabkan ISP kehilangan semua konsumen *high-demand*, artinya diasumsikan bahwa lebih menguntungkan jika menggunakan $P_x = a - (c+t)$ dan $P_y = f'(Y_2) - (c+t)$.
Dengan menggunakan Kendala (4.37), diperoleh :

$$aX_2 + f(Y_2) - P_xX_2 - P_yY_2 - PZ_2 - (c+t)X_2 - (c+t)Y_2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow aX_2 + f(Y_2) - (a-(c+t))X_2 - (f'(Y_2)-(c+t))Y_2 - P - (c+t)X_2 - (c+t)Y_2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow aX_2 + f(Y_2) - aX_2 + (c+t)X_2 - f'(Y_2)Y_2 + (\mathrm{c+t})Y_2 - P - (c+t)X_2 - (c+t)Y_2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow P \leq aX_2 + f(Y_2) - aX_2 - f'(Y_2)Y_2 + (c+t)X_2 + (c+t)Y_2 - (c+t)X_2 - (c+t)Y_2$$

karena $X_1{}^* \leq \bar{X}_1$ dan $X_2{}^* \leq \bar{X}_2$ dan $Y_1{}^* \leq \bar{Y}_1$ dan $Y_2{}^* \leq \bar{Y}_2$, maka :

$$P_x = a - (c+t),\ P_y = f'(\bar{Y}_2) - (\mathrm{c+t}) \text{ dan}$$
$$P \leq f(\bar{Y}_2) - f'(\bar{Y}_2)\bar{Y}_2$$

Optimasi masalah produsen menjadi :

$$\underset{P,P_X,P_Y}{\text{Maks}}\ m\big(P_x\mathrm{X}_1{}^* + P_y\mathrm{Y}_1{}^* + P\mathrm{Z}_1{}^*\big) + n\,\big(P_x\mathrm{X}_2{}^* + P_y\mathrm{Y}_2{}^* + P\mathrm{Z}_2{}^*\big)$$
$$= m\big((a-(c+t))\mathrm{X}_1{}^* + (f'(\bar{Y}_2) - (c+t)\mathrm{Y}_1{}^* + P\big)$$
$$+\ n\,\big((a-(c+t))\mathrm{X}_2{}^* + (f'(\bar{Y}_2) - (c+t)\mathrm{Y}_2{}^* + P\big)$$
$$= m[a\bar{X}_1 - (c+t)\bar{X}_1 + f'(\bar{Y}_2)\bar{Y}_1 - (c+t)\bar{Y}_1 + \{f(\bar{Y}_2) - f'(\bar{Y}_2)\bar{Y}_2\}] + n\,[a\bar{X}_2 - (c+t)\bar{X}_2 + f'(\bar{Y}_2)\bar{Y}_2 - (c+t)\bar{Y}_2 + \{f(\bar{Y}_2) - f'(\bar{Y}_2)\bar{Y}_2\}\,]$$
$$= m[a\bar{X}_1 + f'(\bar{Y}_2)\bar{Y}_1 + f(\bar{Y}_2) - f'(\bar{Y}_2)\bar{Y}_2 - (c+t)\bar{X}_1 - (c+t)\bar{Y}_1] + n\,[a\bar{X}_2 + f(\bar{Y}_2) - (c+t)\bar{X}_2 - (c+t)\bar{Y}_2\,]$$
$$= m[a\bar{X}_1 + f'(\bar{Y}_2)(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) + f(\bar{Y}_2)\,] + n\,[a\bar{X}_2 + f(\bar{Y}_2) - (c+t)\bar{X}_2 - (c+t)\bar{Y}_2\,]$$

Jika ISP menggunakan skema pembiayaan *two-part tariff* dengan menetapkan $P_x > 0$, $P_y > 0$, dan $P > 0$, maka ISP dapat menetapkan harga optimal $P_x = a - (c+t)$ dan $P_y = f'(Y_2) - (c+t)$, dan biaya langganan P sama dengan surplus konsumen dari konsumen tingkat pemakaian rendah, dengan keuntungan maksimumnya adalah:

$$m[a\bar{X}_1 + f'(\bar{Y}_2)(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) + f(\bar{Y}_2)\,] + n\,[a\bar{X}_2 + f(\bar{Y}_2) - (c+t)\bar{X}_2 - (c+t)\bar{Y}_2\,]$$

Berdasarkan kasus ini diperoleh lemma berikut.

Lemma 9b :
Jika ISP menggunakan harga *two-part tariff*, maka harga optimal adalah $P_X = a - (c+t)$ dan $P_Y = f'(\bar{Y}_2) - (c+t)$, serta $P = f(\bar{Y}_2) - f'(\bar{Y}_2)\bar{Y}_2$ dengan keuntungan maksimum dicapai oleh ISP adalah:

$$m[a\bar{X}_1 + f'(\bar{Y}_2)(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) + f(\bar{Y}_2)\,] + n\,[a\bar{X}_2 + f(\bar{Y}_2) - (c+t)\bar{X}_2 - (c+t)\bar{Y}_2\,]$$

Hasil analisis dari Lemma 7b, 8b, dan 9b disajikan dalam Tabel 3.3.

Tabel 3.3 Perbandingan Skema Pembiayaan untuk Konsumen Heterogen (*High-Demand* dan *Low-Demand*) Berdasarkan Fungsi Utilitas Quasi-Linier dengan Biaya Marjinal dan Biaya Pengawasan

Yang Dioptimalkan	Lemma 7b (*Flat-Fee*)	Lemma 8b (*Usage-Based*)	Lemma 9b (*Two-Part Tariff*)
Harga yang Dikenakan oleh Konsumen	$\boldsymbol{a\bar{X}_2 + f(\bar{Y}_2) - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)c}$	$\boldsymbol{P_x = a - (c + t)}$ dan $\boldsymbol{P_y = f'(\bar{Y}_2) - (c + t)}$	$\boldsymbol{P_x = a - (c + t)}$ dan $\boldsymbol{P_y = f'(\overline{Y_2}) - (c + t)}$
Keuntungan maksimum	$\boldsymbol{(m + n)[a\bar{X}_2 + f(\bar{Y}_2) - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)c]}$.	$\boldsymbol{(m + n)\ [a\bar{X}_2 + \overline{Y_2}\, f'(\overline{Y_2}) - (c + t)\bar{X}_2 - (c + t)\overline{Y_2}\ ]}$	$\boldsymbol{m[a\bar{X}_1 + f'(\bar{Y}_2)(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) + f(\bar{Y}_2)\ ] + n\ [a\bar{X}_2 + f(\bar{Y}_2) - (c + t)\bar{X}_2 - (c + t)\bar{Y}_2\ ]}$

Berdasarkan Tabel 3.3, jika diasumsikan bahwa $X \geq 0$ dan $Y \geq 0$, maka $m[a\bar{X}_1 + f'(\bar{Y}_2)(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) + f(\bar{Y}_2)\ ] + n\ [a\bar{X}_2 + f(\bar{Y}_2) - (c + t)\bar{X}_2 - (c + t)\bar{Y}_2\ ] > (m + n)[a\bar{X}_2 + \bar{Y}_2\, f'(\bar{Y}_2) - (c + t)\bar{X}_2 - (c + t)\bar{Y}_2\ ] > (m + n)[a\,\bar{X}_2 + f(\bar{Y}_2) - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)c]$, artinya skema pembiayaan *two part tariff* lebih optimal dibandingkan skema pembiayaan *usage-based* dan *flat-fee* untuk masalah konsumen heterogen berdasarkan tingkat pemakaiannya yaitu *high-demand* dan *low-demand*.

3.4 Kesimpulan

Skema pembiayaan *usage-based* menghasilkan keuntungan yang lebih optimal dibandingkan skema pembiayaan *flat-fee* dan *two-part tariff* untuk masalah konsumen homogen dan heterogen *high-end* dan *low-end*, sedangkan konsumen heterogen *high-demand* dan *low-demand* menghasilkan keuntungan optimal pada skema pembiayaan *two part tariff*.

BAB IV

FUNGSI UTILITAS *BANDWIDTH*

Pada kasus ini digunakan fungsi utilitas sebagai fungsi *bandwidth* yang berkurang dengan meningkatnya *bandwidth* dengan bentuk (Yang, 2004):

$$U_{kj} = U_{0j} + W_j \ln \frac{X_{kj}}{L_{mj}} \tag{4.1}$$

Kelas *j* dibagi menjadi kelas pada jam sibuk (*x*) dan kelas yang bukan pada jam sibuk (*y*) sehingga diperoleh :

$$U_{kx} = U_{0x} + W_x \ln \frac{X_{kx}}{L_{mx}} \tag{4.2}$$

$$U_{ky} = U_{0y} + W_y \ln \frac{X_{ky}}{L_{my}} \tag{4.3}$$

dengan :

$$U_0 = U_{0x} + U_{0y} \tag{4.4}$$

$$W_x = a \text{ dan } W_y = b$$

$$X_{kx} = X \text{ dan } X_{ky} = Y$$

$$L_{mx} = X_m \text{ dan } L_{my} = Y_m$$

Dengan demikian :

$$U(x, y) = U_{0x} + W_x \ln \frac{X_{kx}}{L_{mx}} + U_{0y} + W_y \ln \frac{X_{ky}}{L_{my}} \tag{4.5}$$

$$U(x, y) = U_0 + a \ln \frac{X}{X_m} + b \ln \frac{Y}{Y_m} \tag{4.6}$$

Untuk mempermudah dalam perhitungan, Persamaan (4.4) diubah menjadi :

$$U(x, y) = U_0 + a \ln \frac{X+1}{X_m+1} + b \ln \frac{Y+1}{Y_m+1} \tag{4.7}$$

Perubahan ini dilakukan untuk mempermudah perhitungan ketika tingkat konsumsi minimum X_m dan Y_m. Serta tingkat konsumsi ketika jam sibuk maupun jam tidak sibuk berturut - turut X dan Y.

4.1 Fungsi Utilitas *Fungsi Bandwidth* pada Konsumen Homogen

Pada kasus konsumen homogen, diasumsikan semua konsumen memiliki tingkat kepuasan yang sama dan tingkat maksimum penggunaan yang sama di jam sibuk maupun di jam tidak sibuk, yaitu $\bar{X}$ dan $\bar{Y}$.

Dengan fungsi utilitas yang lebih spesifik, setiap konsumen mengikuti problem optimasi :

Optimasi Masalah Konsumen:

$$\max_{X,Y,Z} \ U_0 + a \ln \frac{X+1}{X_m+1} + b \ln \frac{Y+1}{Y_m+1} - P_X X - P_Y Y - PZ - (X+Y)c \tag{4.8}$$

dengan kendala :

$$X \leq \bar{X} Z$$

$$Y \leq \bar{Y} Z$$

$$U_0 + a\ln\frac{X+1}{X_m+1} + b\ln\frac{Y+1}{Y_m+1} - P_X X - P_Y Y - PZ - (X+Y)c \geq 0 \tag{4.9}$$

$Z = 0\ atau\ 1$

Optimasi Masalah Produsen

$$max_{P,P_X,P_Y} \sum_i (P_X X_i{}^* + P_Y Y_i{}^* + PZ_i{}^*) \tag{4.10}$$

dimana (X*,Y*,Z*) = arg maks $U_0 + a\ln\frac{X+1}{X_m+1} + b\ln\frac{Y+1}{Y_m+1} - P_X X - P_Y Y - PZ - (X+Y)c$

dengan kendala:

$X \leq \bar{X}Z$

$Y \leq \bar{Y}Z$

$$U_0 + a\ln\frac{X+1}{X_m+1} + b\ln\frac{Y+1}{Y_m+1} - P_X X - P_Y Y - PZ - (X+Y)c \geq 0 \tag{4.11}$$

$Z = 0$ atau 1

Kasus 1b. Jika penyedia layanan memilih untuk menggunakan skema pembiayaan *flat-fee* maka ditetapkan $P_X = 0$, $P_Y = 0$, $P > 0$. Dengan ditetapkannya ketentuan tersebut, tingkat konsumsi konsumen menjadi $X = \bar{X}$ dan $Y = \bar{Y}$ sehingga Persamaan (4.6) menjadi:

$$\max_{X,Y,Z}\ U_0 + a\ln\frac{\bar{X}+1}{X_m+1} + b\ln\frac{\bar{Y}+1}{Y_m+1} - 0.X - 0.Y - PZ - (X+Y)c$$

$$= \max_{X,Y,Z}\ U_0 + a\ln\frac{\bar{X}+1}{X_m+1} + b\ln\frac{\bar{Y}+1}{Y_m+1} - PZ - (X+Y)c \tag{4.12}$$

Berdasarkan kendala pada Persamaan (4.6) diperoleh:

$$U_0 + a\ln\frac{\bar{X}+1}{X_m+1} + b\ln\frac{\bar{Y}+1}{Y_m+1} - P - (\bar{X}+\bar{Y})c \geq 0 \tag{4.13}$$

Untuk tetap membuat tingkat kepuasan konsumen maksimum, diambil batas atas dari Persamaan (4.11) sehingga $P = U_0 + a\ln\frac{\bar{X}+1}{X_m+1} + b\ln\frac{\bar{Y}+1}{Y_m+1} - (\bar{X}+\bar{Y})c$, dan biaya yang dikenakan pada skema pembiayaan *flat-fee* adalah sebesar :

$$U_0 + a\ln\frac{\bar{X}+1}{X_m+1} + b\ln\frac{\bar{Y}+1}{Y_m+1} - (\bar{X}+\bar{Y})c\,.$$

Dengan demikian optimasi masalah produsen menjadi :

$$\max_{P,P_X,P_Y} \sum_i (P_X X_i{}^* + P_Y Y_i{}^* + PZ_i{}^*)$$

$$= \max_{P,P_X,P_Y} \sum_i \left(0 \cdot X_i{}^* + 0 \cdot Y_i{}^* + U_0 + a\ln\frac{\bar{X}+1}{X_m+1} + b\ln\frac{\bar{Y}+1}{Y_m+1} - (\bar{X}+\bar{Y})c\right)$$

$$= \max_{P,P_X,P_Y} \sum_i \left(0 \cdot X_i{}^* + 0 \cdot Y_i{}^* + U_0 + a\ln\frac{\bar{X}+1}{X_m+1} + b\ln\frac{\bar{Y}+1}{Y_m+1} - (\bar{X}+\bar{Y})c\right)$$

$$= max \sum_i \left(U_0 + a\ln\frac{\bar{X}+1}{X_m+1} + b\ln\frac{\bar{Y}+1}{Y_m+1} - (\bar{X}+\bar{Y})c\right)$$

Artinya keuntungan maksimum yang diperoleh oleh penyedia layanan adalah

$$\sum_i \left(U_0 + a \ln \frac{\bar{X}+1}{X_m+1} + b \ln \frac{\bar{Y}+1}{Y_m+1} - (\bar{X}+\bar{Y})c \right)$$

Berdasarkan kasus ini diperoleh :

Lemma 1b. Jika penyedia layanan menggunakan skema pembiayaan *flat-fee*, biaya yang dibayarkan menjadi $U_0 + a \ln \frac{\bar{X}+1}{X_m+1} + b \ln \frac{\bar{Y}+1}{Y_m+1} - (\bar{X}+\bar{Y})c$ dan keuntungann maksimum yang diperoleh adalah

$$\sum_i \left(U_0 + a\, ln \frac{\bar{X}+1}{X_m+1} + b\, ln \frac{\bar{Y}+1}{Y_m+1} - (\bar{X}+\bar{Y})c \right)$$

- Untuk Skema Pembiayaan *usage-based* dan *two-part tariff*:

Optimasi Masalah Konsumen:

$$\max_{X,Y,Z} U_0 + a \ln \tfrac{X+1}{X_m+1} + b \ln \tfrac{Y+1}{Y_m+1} - P_X X - P_Y Y - PZ - (\ c+t\ )\ X - (\ c+t\ )\ Y$$

dengan kendala :

$X \le \bar{X}Z$

$Y \le \bar{Y}Z$

$$U_0 + a \ln \tfrac{X+1}{X_m+1} + b \ln \tfrac{Y+1}{Y_m+1} - P_X X - P_Y Y - PZ - (\ c+t\ )\ X - (\ c+t\ )\ Y \ge 0 \qquad (4.14)$$

$Z = 0$ atau 1

Optimasi Masalah Produsen

$$max_{P,P_X,P_Y} \textstyle\sum_i (P_X X_i^* + P_Y Y_i^* + PZ_i^*) \qquad (4.15)$$

dimana (X*,Y*,Z*) = arg maks $U_0 + a \ln \frac{X+1}{X_m+1} + b \ln \frac{Y+1}{Y_m+1} - P_X X - P_Y Y - PZ - (\ c+t\ )\ X - (\ c+t\ )\ Y$

dengan kendala :

$X \le \bar{X}Z$

$Y \le \bar{Y}Z$

$$U_0 + a \ln \tfrac{X+1}{X_m+1} + b \ln \tfrac{Y+1}{Y_m+1} - P_X X - P_Y Y - PZ - (\ c+t\ )\ X - (\ c+t\ )\ Y \ge 0 \qquad (4.16)$$

$Z = 0$ atau 1

Kasus 2b. Jika penyedia layanan memilih menggunakan skema pembiayaan *usage based* maka ditetapkan $P_X > 0$, $P_Y > 0$, dan $P = 0$. Dengan ketetapan tersebut Persamaan (4.13) menjadi:

$$\max_{X,Y,Z}\ U_0 + a \ln \tfrac{X+1}{X_m+1} + b \ln \tfrac{Y+1}{Y_m+1} - P_X X - P_Y Y - 0 \cdot Z - (\ c+t\ )\ X - (\ c+t\ )\ Y$$

$$= \max_{X,Y,Z}\ U_0 + a \ln \tfrac{X+1}{X_m+1} + b \ln \tfrac{Y+1}{Y_m+1} - P_X X - P_Y Y - (\ c+t\ )\ X - (\ c+t\ )\ Y \qquad (4.17)$$

Untuk memaksimumkan Persamaan (4.17), penyedia harus memperkecil nilai P_X dan P_Y. Untuk mengoptimalkan masalah konsumen Persamaan (4.17) diferensialkan terhadap x dan y.

$$\frac{\partial\left(U_0 + a\ln\frac{X+1}{X_m+1} + b\ln\frac{Y+1}{Y_m+1} - P_X X - P_Y Y - (\,c+t\,)\,X - (\,c+t\,)\,Y\right)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{a}{X^*+1} - P_X - (c+t) = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{X^*+1} - (c+t) = P_X \text{ maka } X^* = \frac{a}{P_X + (c+t)} - 1 \qquad (4.18)$$

$$\frac{\partial\left(U_0 + a\ln\frac{X+1}{X_m+1} + b\ln\frac{Y+1}{Y_m+1} - P_X X - P_Y Y - (\,c+t\,)\,X - (\,c+t\,)\,Y\right)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{b}{Y^*+1} - P_Y - (c+t) = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{Y^*+1} - (c+t) = P_Y \text{ maka } Y^* = \frac{b}{P_Y+(c+t)} - 1 \qquad (4.19)$$

Optimasi Masalah Produsen menjadi:

$$\max_{P_X,P_Y} \sum_i [P_X X^* + P_Y Y^*]$$

$$= \max_{P_X,P_Y} \sum_i \left[P_X\left(\frac{a}{P_X + (c+t)} - 1\right) + P_y\left(\frac{b}{P_Y + (c+t)} - 1\right)\right]$$

$$= \max_{P_X,P_Y} \sum_i \left[P_X\left(\frac{a}{\frac{a}{X^*+1} - (c+t) + (c+t)} - 1\right) + P_y\left(\frac{b}{\frac{b}{Y^*+1} - (c+t) + (c+t)} - 1\right)\right]$$

$$= \max_{P_X,P_Y} \sum_i \left[P_X\big((X^*+1) - 1\big) + P_y\big((Y^*+1) - 1\big)\right]$$

$$= \max_{P_X,P_Y} \sum_i \left[P_X(X^*) + P_y(Y^*)\right]$$

Apabila X dan Y dibatasi, maka X^* dan Y^* menjadi $\bar{X}$ dan $\bar{Y}$. Dengan kata lain, P_X dan P_Y menjadi $P_X = \frac{a}{\bar{X}+1} - (c+t)$ dan $P_Y = \frac{b}{\bar{Y}+1} - (c+t)$ dengan keuntungan maksimum yang diperoleh adalah :

$$\max_{P_X,P_Y} \sum_i \left[P_X(\bar{X}) + P_y(\bar{Y})\right]$$

$$= \max_{P_X,P_Y} \sum_i \left[\left(\frac{a}{\bar{X}+1} - (c+t)\right)\bar{X} + \left(\frac{b}{\bar{Y}+1} - (c+t)\right)\bar{Y}\right]$$

$$= \max_{P_X,P_Y} \sum_i \left[\left(\frac{a}{\bar{X}+1}\right)\bar{X} - (c+t)\bar{X} + \left(\frac{b}{\bar{Y}+1}\right)\bar{Y} - (c+t)\bar{Y}\right]$$

$$= \max_{P_X,P_Y} \sum_i \left[\left(\frac{a}{\bar{X}+1}\right)\bar{X} + \left(\frac{b}{\bar{Y}+1}\right)\bar{Y} - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y}\right]$$

Berdasarkan kasus ini diperoleh :

Lemma 2b. Jika penyedia layanan menggunakan skema pembiayaan *usage based*, harga optimalnya adalah $P_X = \frac{a}{\bar{X}+1} - (c+t)$ dan $P_Y = \frac{b}{\bar{Y}+1} - (c+t)$ dengan keuntungann maksimum yang diperoleh adalah

$$\sum_i \left[\left(\frac{a}{\bar{X}+1} \right) \bar{X} + \left(\frac{b}{\bar{Y}+1} \right) \bar{Y} - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y} \right]$$

Kasus 3b. Jika penyedia layanan memilih menggunakan skema pembiayaan *two part tariff* maka ditetapkan $P_X > 0$, $P_Y > 0$, dan $P > 0$, artinya terdapat biaya bergabung jika konsumen memilih layanan serta biaya yang dikenakan pada saat jam sibuk dan jam tidak sibuk. Jika Persamaan (4.18) dan (4.19), disubstitusikan ke Pertidaksamaan (4.14) yang merupakan kendala pada optimasi masalah konsumen, maka kendala tersebut menjadi :

$$U_0 + a\ln\frac{X+1}{X_m+1} + b\ln\frac{Y+1}{Y_m+1} - P_X X - P_Y Y - PZ - (c+t)X - (c+t)Y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow U_0 + a\ln\frac{X+1}{X_m+1} + b\ln\frac{Y+1}{Y_m+1} - \left(\frac{a}{X+1} - (c+t)\right)X - \left(\frac{b}{Y+1} - (c+t)\right)Y - P - (c+t)X - (c+t)Y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow U_0 + a\ln\frac{X+1}{X_m+1} + b\ln\frac{Y+1}{Y_m+1} - \left(\frac{a}{X+1}\right)X + (c+t)X - \left(\frac{b}{Y+1}\right)Y + (c+t)Y - P - (c+t)X - (c+t)Y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow U_0 + a\ln\frac{X+1}{X_m+1} + b\ln\frac{Y+1}{Y_m+1} - \left(\frac{a}{X+1}\right)X - \left(\frac{b}{Y+1}\right)Y - P \geq 0$$

$$\Leftrightarrow P \leq U_0 + a\ln\frac{X+1}{X_m+1} + b\ln\frac{Y+1}{Y_m+1} - \left(\frac{a}{X+1}\right)X - \left(\frac{b}{Y+1}\right)Y$$

Optimasi Masalah Produsen menjadi :

$$\max_{P,P_X,P_Y} \sum_i [P_X X^* + P_Y Y^* + PZ^*]$$

$$= \max_{P,P_X,P_Y} \sum_i \left[P_X \left(\frac{a}{P_X + (c+t)} - 1 \right) + P_Y \left(\frac{b}{P_Y + (c+t)} - 1 \right) + P \right]$$

$$= \max_{P,P_X,P_Y} \sum_i \left[P_X((X^*+1)-1) + P_y((Y^*+1)-1) + \left(U_0 + a\ln\frac{X+1}{X_m+1} + b\ln\frac{Y+1}{Y_m+1} - \left(\frac{a}{X^*+1}\right)X^* - \left(\frac{b}{Y^*+1}\right)Y^* \right) \right]$$

$$= \max_{P,P_X,P_Y} \sum_i \left[\left(\frac{a}{X^*+1} - (c+t) \right)(X^*) + \left(\frac{b}{Y^*+1} - (c+t) \right)(Y^*) + \left(U_0 + a\ln\frac{X+1}{X_m+1} + b\ln\frac{Y+1}{Y_m+1} - \left(\frac{a}{X^*+1}\right)X^* - \left(\frac{b}{Y^*+1}\right)Y^* \right) \right]$$

$$= \max_{P, P_X, P_Y} \sum_i \left[\left(\frac{a}{X^* + 1} \right) X^* - (c+t) X^* + \left(\frac{b}{Y^* + 1} \right) Y^* - (c+t) Y^* \right.$$
$$\left. + \left(U_0 + a \ln \frac{X+1}{X_m + 1} + b \ln \frac{Y+1}{Y_m+1} - \left(\frac{a}{X^*+1} \right) X^* - \left(\frac{b}{Y^*+1} \right) Y^* \right) \right]$$

$$= \max_{P, P_X, P_Y} \sum_i \left[-(c+t) X^* - (c+t) Y^* + \left(U_0 + a \ln \frac{X+1}{X_m+1} + b \ln \frac{Y+1}{Y_m+1} \right) \right]$$

$$= \max_{P, P_X, P_Y} \sum_i \left[U_0 + a \ln \frac{X+1}{X_m+1} + b \ln \frac{Y+1}{Y_m+1} - (c+t) X^* - (c+t) Y^* \right]$$

Apabila X dan Y dibatasi, maka X^* dan Y^* menjadi $\overline{X}$ dan $\overline{Y}$. Dengan kata lain, P_X dan P_Y menjadi $P_X = \frac{a}{\overline{X}+1} - (c+t)$, $P_Y = \frac{b}{\overline{Y}+1} - (c+t)$ dan $P = U_0 + a \ln \frac{\overline{X}+1}{X_m+1} + b \ln \frac{\overline{Y}+1}{Y_m+1} - \left(\frac{a}{X+1} \right) \overline{X} - \left(\frac{b}{Y+1} \right) \overline{Y}$. Jadi biaya yang dikenakan sesuai dengan pemakaian konsumen sebesar $U_0 + a \ln \frac{\overline{X}+1}{X_m+1} + b \ln \frac{\overline{Y}+1}{Y_m+1} - (c+t)\overline{X} - (c+t)\overline{Y}$ dengan keuntungan maksimum yang diperoleh adalah

$$\sum_i \left[U_0 + a \ln \frac{\overline{X}+1}{X_m+1} + b \ln \frac{\overline{Y}+1}{Y_m+1} - (c+t)\overline{X} - (c+t)\overline{Y} \right]$$

Berdasarkan kasus ini diperoleh :

Lemma 3b : Jika penyedia layanan menggunakan skema pembiayaan *two part tariff*, harga optimalnya adalah $P_X = \frac{a}{\overline{X}+1} - (c+t)$, $P_Y = \frac{b}{\overline{Y}+1} - (c+t)$ dan $P = U_0 + a \ln \frac{\overline{X}+1}{X_m+1} + b \ln \frac{\overline{Y}+1}{Y_m+1} - \left(\frac{a}{X+1} \right) \overline{X} - \left(\frac{b}{Y+1} \right) \overline{Y}$ dengan keuntungann maksimum yang diperoleh adalah

$$\sum_i \left[U_0 + a \ln \frac{\overline{X}+1}{X_m+1} + b \ln \frac{\overline{Y}+1}{Y_m+1} - (c+t)\overline{X} - (c+t)\overline{Y} \right]$$

Hasil analisis dari Lemma 1b, 2b, dan 3b disajikan dalam Tabel 4.1.

Tabel 4.1 Perbandingan skema pembiayaan untuk konsumen homogen berdasarkan Fungsi Utilitas *Bandwidth*.

	Lemma 1.b (*Flat-Fee*)	Lemma 2.b (*Usage-Based*)	Lemma 3.b (*Two-Part Tariff*)
Harga yang dikenakan pada konsumen	$U_0 + a\ln\frac{\overline{X}+1}{X_m+1} + b\ln\frac{\overline{Y}+1}{Y_m+1} - (\overline{X}+\overline{Y})c$	$P_X = \frac{a}{\overline{X}+1} - (c+t)$ dan $P_Y = \frac{b}{\overline{Y}+1} - (c+t)$	$P_X = \frac{a}{\overline{X}+1} - (c+t)$ dan $P_Y = \frac{b}{\overline{Y}+1} - (c+t)$
Keuntungan Maksimum	$\sum_i \left(U_0 + a\,ln\frac{\overline{X}+1}{X_m+1} + b\,ln\frac{\overline{Y}+1}{Y_m+1} - (\overline{X}+\overline{Y})c\right)$	$\sum_i \left[\left(\frac{a}{\overline{X}+1}\right)\overline{X} + \left(\frac{b}{\overline{Y}+1}\right)\overline{Y} - (c+t)\overline{X} - (c+t)\overline{Y}\right]$	$\sum_i \left[U_0 + a\ln\frac{\overline{X}+1}{X_m+1} + b\ln\frac{\overline{Y}+1}{Y_m+1} - (c+t)\overline{X} - (c+t)\overline{Y}\right]$

Berdasarkan Tabel 4.1, jika diasumsikan $U_0 + a\,ln\frac{\overline{X}+1}{X_m+1} + b\,ln\frac{\overline{Y}+1}{Y_m+1} - (X+Y)c > U_0 + a\ln\frac{X+1}{X_m+1} + b\ln\frac{Y+1}{Y_m+1} - (c+t)\,\overline{X} - (c+t)\,\overline{Y}$ maka keuntungan maksimum yang diperoleh ISP (penyedia layanan) adalah saat penyedia layanan menggunakan skema pembiayaan *flatt-fee*.

4.2 Fungsi Utilitas *Fungsi Bandwidth* pada Konsumen Heterogen *High-end* Golongan Atas (*High-end*) dan Golongan Bawah (*Low-end*)

Misalkan terdapat *m* konsumen *high-end* (*i*=1) dan *n* konsumen *low-end* (*i*=2). Diasumsikan bahwa setiap konsumen heterogen mempunyai batas atas yang sama $\overline{X}$ dan $\overline{Y}$ dengan masing-masing adalah tingkat konsumsi pada jam sibuk dan bukan jam sibuk dan $a_1 > a_2$, $b_1 > b_2$.

Optimasi Masalah Konsumen:

$$max_{X_i,Y_i,Z_i}\, U_{0i} + a_i\ln\frac{X_i+1}{X_m+1} + b_i\ln\frac{Y_i+1}{Y_m+1} - P_XX_i - P_YY_i - PZ_i - (X+Y)c \quad (4.20)$$

dengan kendala :

$$X_i \le \overline{X}_iZ_i$$

$$Y_i \le \overline{Y}_iZ_i$$

$$U_{0i} + a_i\ln\frac{X_i+1}{X_m+1} + b_i\ln\frac{Y_i+1}{Y_m+1} - P_XX_i - P_YY_i - PZ_i - (X+Y)c \ge 0 \quad (4.21)$$

$$Z_i = 0\ atau\ 1$$

Optimasi Masalah Produsen:

$$max_{P,P_X,P_Y} m(P_X X_1{}^* + P_Y Y_1{}^* + PZ_1{}^*) + n(P_X X_2{}^* + P_Y Y_2{}^* + PZ_2{}^*)$$

dimana (X_i*,Y_i*,Z_i*) = argmax $U_{0i} + a_i \ln\frac{X_i+1}{X_m+1} + b_i \ln\frac{Y_i+1}{Y_m+1} - P_x X_i - P_y Y_i - PZ_i - (X+Y)c$

Dengan kendala:

$$X_i \leq \overline{X}_i Z_i$$

$$Y_i \leq \overline{Y}_i Z_i$$

$$U_{0i} + a_i \ln\frac{X_i+1}{X_m+1} + b_i \ln\frac{Y_i+1}{Y_m+1} - P_x X_i - P_y Y_i - PZ_i - (X+Y)c \geq 0 \quad (4.22)$$

$Z_i = 0$ atau 1

Kasus 4b. Jika menggunakan skema pembayaran *flat fee* maka sudah pasti diberikan $P_X = 0$, $P_Y = 0$, dan $P > 0$. Jika konsumen memilih untuk bergabung ke dalam program yang diberikan, tingkat kepuasan maksimum diperoleh dengan memilih tingkat konsumsi $X_1 = \overline{X}$, $Y_1 = \overline{Y}$ atau $X_2 = \overline{X}$, $Y_2 = \overline{Y}$. Hal ini membuat penyedia layanan dapat memberikan harga untuk setiap konsumen *high-end* tidak lebih dari $U_{01} + a_1 \ln\frac{X_1+1}{X_m+1} + b_1 \ln\frac{Y_1+1}{Y_m+1} - (\overline{X} + \overline{Y})c$ dan setiap konsumen *low-end* tidak lebih dari $U_{02} + a_2 \ln\frac{X_2+1}{X_m+1} + b_2 \ln\frac{Y_2+1}{Y_m+1} - (\overline{X} + \overline{Y})c$. Dengan dimikian dapat diasumsikan bahwa $a_1 < \frac{m+n}{m} a_2$ dan $b_1 < \frac{m+n}{m} b_2$. Untuk itu penyedia layanan mengenakan biaya sebesar $U_{02} + a_2 \ln\frac{\overline{X}+1}{X_m+1} + b_2 \ln\frac{\overline{Y}+1}{Y_m+1} - (\overline{X} + \overline{Y})c$ kepada konsumen *high-end* dan konsumen *low-end* yang membuat keuntungan maksimum yang didapat penyedia layanan menjadi $(m+n)\left(U_{02} + a_2 \ln\frac{\overline{X}+1}{X_m+1} + b_2 \ln\frac{\overline{Y}+1}{Y_m+1} - (\overline{X} + \overline{Y})c\right)$

Berdasarkan kasus ini diperoleh :

Lemma 4b. Jika penyedia layanan menggunakan skema pembiayaan *flat fee*, harga yang dikenakan kepada konsumen menjadi $U_{02} + a_2 \ln\frac{\overline{X}+1}{X_m+1} + b_2 \ln\frac{\overline{Y}+1}{Y_m+1} - (\overline{X} + \overline{Y})c$ dan keuntungan maksimum yang diperoleh sebesar :

$$(\mathrm{m}+\mathrm{n})\left(\mathrm{U}_{02} + \mathrm{a}_2 \ln\frac{\overline{\mathrm{X}}+1}{\mathrm{X}_\mathrm{m}+1} + \mathrm{b}_2 \ln\frac{\overline{\mathrm{Y}}+1}{\mathrm{Y}_\mathrm{m}+1} - (\overline{\mathrm{X}} + \overline{\mathrm{Y}})\mathrm{c}\right) \quad (4.23)$$

.**Untuk skema pembiayaan *usage-based* dan *two-part tariff***

Optimasi Masalah Konsumen:

$$max_{X_i,Y_i,Z_i}\, U_{0i} + a_i \ln\frac{X_i+1}{X_m+1} + b_i \ln\frac{Y_i+1}{Y_m+1} - P_X X_i - P_Y Y_i - PZ_i - (c+t)X_i - (c+t)Y_i \quad (4.23)$$

dengan kendala :

$$X_i \leq \overline{X}_i Z_i$$

$$Y_i \leq \overline{Y}_i Z_i$$

$$U_{0i} + a_i \ln\frac{X_i+1}{X_m+1} + b_i \ln\frac{Y_i+1}{Y_m+1} - P_X X_i - P_Y Y_i - PZ_i - (c+t)X_i - (c+t)Y_i \geq 0 \quad (4.24)$$

$Z_i = 0$ atau 1

Optimasi Masalah Produsen:

$$max_{P,P_X,P_Y}\ m(P_XX_1{}^* + P_YY_1{}^* + PZ_1{}^*) + n(P_XX_2{}^* + P_YY_2{}^* + PZ_2{}^*)$$

dimana (X_i*,Y_i*,Z_i*) = argmax $U_{0i} + a_i \ln\frac{X_i+1}{X_m+1} + b_i \ln\frac{Y_i+1}{Y_m+1} - P_xX_i - P_yY_i - PZ_i - (c+t)X_i - (c+t)Y_i$

dengan kendala:

$$X_i \leq \overline{X}_i Z_i$$

$$Y_i \leq \overline{Y}_i Z_i$$

$$U_{0i} + a_i \ln\frac{X_i+1}{X_m+1} + b_i \ln\frac{Y_i+1}{Y_m+1} - P_xX_i - P_yY_i - PZ_i - (c+t)X_i - (c+t)Y_i \geq 0 \qquad (4.25)$$

$Z_i = 0$ atau 1

Kasus 5b. Jika penyedia layanan memilih menggunakan skema pembiayaan *usage based* maka ditetapkan $P_X > 0$, $P_Y > 0$, dan $P = 0$. Dengan ketetapan tersebut persamaan (4.23) menjadi :

$$max_{X_1,Y_1,Z_1}\ U_{01} + a_1 \ln\frac{X_1+1}{X_m+1} + b_1 \ln\frac{Y_1+1}{Y_m+1} - P_xX_1 - P_yY_1 - (c+t)X_1 - (c+t)Y_1 \qquad (4.26)$$

Pertama, untuk mengoptimalkan masalah konsumen Persamaan (4.26) diferensialkan terhadap x dan y.

$$\frac{\partial\left(U_{01}+a_1 \ln\frac{X_1+1}{X_m+1}+b_1 \ln\frac{Y_1+1}{Y_m+1}-P_xX_1-P_yY_1-(c+t)X_1-(c+t)Y_1\right)}{\partial X_1} = 0$$

$$\frac{a_1}{X_1+1} - P_X - (c+t) = 0 \Leftrightarrow \frac{a_1}{X_1+1} - (c+t) = P_X \text{ maka } X_1^* = \frac{a_1}{P_X+(c+t)} - 1 \qquad (4.27)$$

$$\frac{\partial\left(U_{01}+a_1 \ln\frac{X_1+1}{X_m+1}+b_1 \ln\frac{Y_1+1}{Y_m+1}-P_xX_1-P_yY_1-(c+t)X_1-(c+t)Y_1\right)}{\partial Y_1} = 0$$

$$\frac{b_1}{Y_1+1} - P_Y - (c+t) = 0 \Leftrightarrow \frac{b_1}{Y_1+1} - (c+t) = P_Y \text{ maka } Y_1^* = \frac{b_1}{P_Y+(c+t)} - 1 \qquad (4.28)$$

Optimasi masalah konsumen heterogen golongan bawah :

$$\underset{X_2,Y_2,Z_2}{\text{maks}}\ U_{02} + a_2 \ln\frac{X_2+1}{X_m+1} + b_2 \ln\frac{Y_2+1}{Y_m+1} - P_xX_2 - P_yY_2 - (c+t)X_2 - (c+t)Y_2 \qquad (4.29)$$

Kedua, untuk mengoptimalkan masalah konsumen Persamaan (4.29) diferensialkan terhadap x dan y.

$$\frac{\partial\left(U_{02}+a_2 \ln\frac{X_2+1}{X_m+1}+b_2 \ln\frac{Y_2+1}{Y_m+1}-P_xX_2-P_yY_2-(c+t)X_2-(c+t)Y_2\right)}{\partial X_2} = 0$$

$$\frac{a_2}{X_2+1} - P_X - (c+t) = 0 \Leftrightarrow \frac{a_2}{X_2+1} - (c+t) = P_X \text{ maka } X_2^* = \frac{a_2}{P_X+(c+t)} - 1 \qquad (4.30)$$

$$\frac{\partial\left(U_{02}+a_2 \ln\frac{X_2+1}{X_m+1}+b_2 \ln\frac{Y_2+1}{Y_m+1}-P_xX_2-P_yY_2-(c+t)X_2-(c+t)Y_2\right)}{\partial Y_2} = 0$$

$$\frac{b_2}{Y_2+1} - P_Y - (c+t) = 0 \Leftrightarrow \frac{b_2}{Y_2+1} - (c+t) = P_Y \text{ maka } Y_2^* = \frac{b_2}{P_Y+(c+t)} - 1 \qquad (4.31)$$

Optimasi Masalah Produsen menjadi :

$$\text{maks}_{P_X,P_Y}\ m(P_XX_1^* + P_YY_1^*) + n(P_XX_2^* + P_YY_2^*)$$

$= \text{maks}_{P_X,P_Y}\, m(P_X((X_1^* + 1) - 1) + P_Y((Y_1^* + 1) - 1)) + n(P_X((X_2^* + 1) - 1) + P_Y((Y_2^* + 1) - 1))$

$$= max_{P_X,P_Y}\, m\left(\left(\frac{a_1}{X_1+1} - (c+t)\right)X_1^* + \left(\frac{b_1}{Y_1+1} - (c+t)\right)Y_1^*\right) + n\left(\left(\frac{a_2}{X_2+1} - (c+t)\right)X_2^* + \left(\frac{b_2}{Y_2+1} - (c+t)\right)Y_2^*\right) \quad (4.32)$$

Untuk memaksimumkan Persamaan (4.32), penyedia layanan harus memperkecil nilai P_X dan P_Y. Jika X_1, X_2, Y_1, dan Y_2 dibatasi, maka X_1^*, X_2^*, Y_1^*, dan Y_2^* tidak dapat melebihi $\overline{X}$ dan $\overline{Y}$. Untuk mencari harga optimal, pertama lakukan analisis pada jam sibuk.

Optimasi Masalah Produsen :

$$\text{maks}_{P_X}\, m(P_X X_1^*) + n(P_Y X_2^*) = \text{maks}_{P_X}\, m\left(\left(\frac{a_1}{X_1+1} - (c+t)\right)X_1^*\right) + n\left(\left(\frac{b_2}{Y_2+1} - (c+t)\right)Y_2^*\right) \quad (4.33)$$

Untuk memaksimalkan Persamaan (4.33), produsen harus memperkecil nilai P_X sehingga harga terbaik P_X tidak dapat lebih besar dari $\frac{a_1}{\overline{X}_1+1} - (c+t)$. Dengan kata lain, jika produsen memberikan harga dibawah $\frac{a_2}{\overline{X}_2+1} - (c+t)$ maka keuntungan yang diperoleh tidaklah optimal (maksimum) karena X_1^* dan X_2^* tidak dapat lebih dari $\overline{X}$ dan permintaan pengguna meningkat dengan menurunnya harga. Harga terbaik P_X harus berada diantara $\frac{a_1}{\overline{X}+1} - (c+t)$ dan $\frac{a_2}{\overline{X}+1} - (c+t)$. Ketika harga berada pada interval tersebut permintaan konsumen *high-end* menjadi tetap di $\overline{X}$ sedangkan permintaan konsumen *low-end* meningkat sebanding dengan menurunnya harga. Dengan kata lain, P_X dan P_Y menjadi $P_X = \frac{a_2}{\overline{X}+1} - (c+t)$ dan $P_Y = \frac{b_2}{\overline{Y}_2+1} - (c+t)$ dengan keuntungan maksimum yang diperoleh sebesar :

$$(m+n)\left(\frac{a_2\overline{X}}{\overline{X}+1} + \frac{b_2\overline{Y}}{\overline{Y}+1} - (c+t)\overline{X} - (c+t)\overline{Y}\right)$$

Berdasarkan kasus ini diperoleh :

Lemma 5b. Jika penyedia layanan menggunakan skema pembiayaan *usage based*, harga optimalnya adalah $P_X = \frac{a_2}{\overline{X}+1} - (c+t)$ dan $P_Y = \frac{b_2}{\overline{Y}+1} - (c+t)$ dengan

keuntungan maksimum yang diperoleh sebesar :

$$(m+n)\left(\left(\frac{a_2}{\overline{X}+1}\right)\overline{X} + \left(\frac{b_2}{\overline{Y}+1}\right)\overline{Y} - (c+t)\,\overline{X} - (c+t)\,\overline{Y}\right)$$

Kasus 6b. Jika penyedia layanan memilih menggunakan skema pembiayaan *two part tariff* maka ditetapkan $P_X > 0$, $P_Y > 0$, dan $P > 0$. Kondisi orde pertama untuk persamaan optimasi masalah konsumen golongan atas atau golongan bawah dengan menggunakan Persamaan (4.27), (4.28), (4.30), dan (4.31). Persamaan (4.27) dan (4.30) adalah kurva permintaan konsumen golongan atas dan golongan bawah pada saat jam sibuk. Persamaan (4.28) dan (4.31) adalah kurva permintaan konsumen golongan atas dan golongan bawah di jam tidak sibuk. Jika ditetapkan $a_1 > a_2$ maka untuk ketetapan biaya golongan atas mengikuti harga bagi biaya golongan bawah, sehingga :

$$a_1\,(m) < a_2\,(m+n) \Leftrightarrow a_1 < \frac{a_2\,(m+n)}{m}$$

Artinya jika konsumen dikenakan biaya sebesar $P_X = \frac{a_1}{X_1+1} - (c+t)$, $P_Y = \frac{b_1}{Y_1+1} - (c+t)$ dan $P = U_{01} + a_1 \ln\frac{X_1+1}{X_m+1} + b_2 \ln\frac{Y_1+1}{Y_m+1} - \left(\frac{a_1}{X_1+1}\right)X_1 - \left(\frac{b_1}{Y_1+1}\right)Y_1$, hanya konsumen golongan atas yang dapat mengikuti layanan karena konsumen golongan bawah mempunyai kendala $P_X \leq \frac{a_2}{X_2+1} - (c+t)$ dan $P_Y \leq \frac{b_2}{Y_2+1} - (c+t)$. Jika konsumen dikenakan biaya $P_X = \frac{a_2}{X_2+1} - (c+t)$, $P_Y = \frac{b_2}{Y_2+1} - (c+t)$ dan $P = U_{02} + a_2 \ln\frac{X_2+1}{X_m+1} + b_2 \ln\frac{Y_2+1}{Y_m+1} - \left(\frac{a_2}{X_2+1}\right)X_2 - \left(\frac{b_2}{Y_2+1}\right)Y_2$, maka kedua jenis konsumen tersebut dapat mengikuti layanan, yaitu konsumen golongan atas dan konsumen golongan bawah. Hal ini dikarenakan banyak konsumen melihat biaya berlangganan sebagai entri penghalang, penyedia dapat memilih untuk menurunkan entri penghalang ini sehingga dapat menarik lebih banyak konsumen. Dengan demikian untuk memaksimumkan keuntungan, penyedia layanan mengenakan biaya $P_X = \frac{a_2}{X_2+1} - (c+t), P_Y = \frac{b_2}{Y_2+1} - (c+t)$ dan $P = U_{02} + a_2 \ln\frac{X_2+1}{X_m+1} + b_2 \ln\frac{Y_2+1}{Y_m+1} - \left(\frac{a_2}{X_2+1}\right)X_2 - \left(\frac{b_2}{Y_2+1}\right)Y_2$.

Optimasi masalah penyedia layanan menjadi :

$$\underset{P_X,P_Y}{\text{maks}}\, m(P_X X_1^* + P_Y Y_1^* + PZ_1^*) + n\,(P_X X_2^* + P_Y Y_2^* + PZ_2^*)$$

$$= m\left[\frac{a_2\bar{X}}{\bar{X}+1} - (c+t)\bar{X} + \frac{b_2\bar{Y}}{\bar{Y}+1} - (c+t)\bar{Y} + \left\{U_{02} + a_2 \ln\frac{\bar{X}+1}{X_m+1} + b_2 \ln\frac{\bar{Y}+1}{Y_m+1} - \left(\frac{a_2}{\bar{X}+1}\right)\bar{X} - \left(\frac{b_2}{\bar{Y}+1}\right)\bar{Y}\right\}\right] + n\left[\frac{a_2\bar{X}}{\bar{X}+1} - (c+t)\bar{X} + \frac{b_2\bar{Y}}{\bar{Y}+1} - (c+t)\bar{Y} + \left\{U_{02} + a_2 \ln\frac{\bar{X}+1}{X_m+1} + b_2 \ln\frac{\bar{Y}+1}{Y_m+1} - \left(\frac{a_2}{\bar{X}+1}\right)\bar{X} - \left(\frac{b_2}{\bar{Y}+1}\right)\bar{Y}\right\}\right]$$

$$= m\left[-(c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y} + \left\{U_{02} + a_2 \ln\frac{\bar{X}+1}{X_m+1} + b_2 \ln\frac{\bar{Y}+1}{Y_m+1}\right\}\right] + n\left[-(c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y} + \left\{U_{02} + a_2 \ln\frac{\bar{X}+1}{X_m+1} + b_2 \ln\frac{\bar{Y}+1}{Y_m+1}\right\}\right]$$

$$= m\left[U_{02} + a_2 \ln\frac{\bar{X}+1}{X_m+1} + b_2 \ln\frac{\bar{Y}+1}{Y_m+1} - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y}\right] + n\left[U_{02} + a_2 \ln\frac{\bar{X}+1}{X_m+1} + b_2 \ln\frac{\bar{Y}+1}{Y_m+1} - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y}\right]$$

$$= (m+n)\left[U_{02} + a_2 \ln\frac{\bar{X}+1}{X_m+1} + b_2 \ln\frac{\bar{Y}+1}{Y_m+1} - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y}\right]$$

Keuntungan maksimum yang diperoleh sebesar :

$$(m+n)\left[U_{02} + a_2 \ln\frac{\bar{X}+1}{X_m+1} + b_2 \ln\frac{\bar{Y}+1}{Y_m+1} - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y}\right]$$

Berdasarkan kasus ini diperoleh :

Lemma 6b. Jika penyedia layanan menggunakan skema pembiayaan *two part tariff*, harga optimalnya adalah $P_X = \frac{a_2}{\bar{X}+1} - (c+t)$, $P_Y = \frac{b_2}{\bar{Y}+1} - (c+t)$ dan $P = U_{02} + a_2 \ln\frac{\bar{X}+1}{X_m+1} + b_2 \ln\frac{\bar{Y}+1}{Y_m+1} - \left(\frac{a_2}{\bar{X}+1}\right)\bar{X} - \left(\frac{b_2}{\bar{Y}+1}\right)\bar{Y}$ dengan keuntungan maksimum yang diperoleh sebesar :

$$(m+n)\left[U_{02} + a_2 \ln\frac{\bar{X}+1}{X_m+1} + b_2 \ln\frac{\bar{Y}+1}{Y_m+1} - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y}\right]$$

Hasil analisis dari Lemma 4b, 5b, dan 6b disajikan dalam Tabel 4.2.

Tabel 4.2 Perbandingan skema pembiayaan untuk konsumen heterogen golongan atas (*High-end*) dan golongan bawah (*Low-end*) berdasarkan Fungsi Utilitas *Bandwidth*

	Lemma 4b (*Flat-Fee*)	Lemma 5b (*Usage-Based*)	Lemma 6b (*Two-Part Tariff*)
Harga yang dikenakan pada konsumen	$\boldsymbol{U_{02} + a_2 \ln\frac{\bar{X}+1}{X_m+1} + b_2 \ln\frac{\bar{Y}+1}{Y_m+1} - (\bar{X} + \bar{Y})c}$	$\boldsymbol{P_X = \frac{a_2}{\bar{X}+1} - (c+t)}$ dan $\boldsymbol{P_Y = \frac{b_2}{\bar{Y}+1} - (c+t)}$	$\boldsymbol{P_X = \frac{a_2}{\bar{X}+1} - (c+t)}$ dan $\boldsymbol{P_Y = \frac{b_2}{\bar{Y}+1} - (c+t)}$
Keuntungan Maksimum	$\boldsymbol{(m+n)\left(U_{02} + a_2\, ln\frac{\bar{X}+1}{X_m+1} + b_2\, ln\frac{\bar{Y}+1}{Y_m+1} - (\bar{X} + \bar{Y})c\right)}$	$\boldsymbol{(m+n)\left(\left(\frac{a_2}{\bar{X}+1}\right)\bar{X} + \left(\frac{b_2}{\bar{Y}+1}\right)\bar{Y} - (c+t)\,\bar{X} - (c+t\,)\,\bar{Y}\right)}$	$\boldsymbol{(m+n)\left[U_{02} + a_2 \ln\frac{\bar{X}+1}{X_m+1} + b_2 \ln\frac{\bar{Y}+1}{Y_m+1} - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y}\right]}$

Berdasarkan Tabel 4.2 jika diasumsikan $U_0 + a\,ln\frac{\bar{X}+1}{X_m+1} + b\,ln\frac{\bar{Y}+1}{Y_m+1} - (X+Y)c > U_0 + a\ln\frac{X+1}{X_m+1} + b\ln\frac{Y+1}{Y_m+1} - (c+t)\,\bar{X} - (c+t)\,\bar{Y}$ maka keuntungan maksimum yang diperoleh ISP (penyedia layanan) adalah saat ISP menggunakan skema pembiayaan *flatt-fee*.

4.3 Fungsi Utilitas *Fungsi Bandwidth* pada Konsumen Heterogen Tingkat Pemakaian Tinggi (*High-demand*) dan Tingkat Pemakaian Rendah (*Low-demand*)

Misalkan diasumsikan dua jenis konsumen, konsumen tingkat pemakaian tinggi (tipe 1) dengan tingkat konsumsi maksimum $\bar{X}_1$ dan $\bar{Y}_1$ dan konsumen tingkat pemakaian rendah (tipe 2) dengan tingkat konsumsi maksimum $\bar{X}_2$ dan $\bar{Y}_2$. Misalkan ada *m* konsumen (tipe 1) dan *n* konsumen (tipe 2) dengan $a_1 = a_2 = a$ dan $b_1 = b_2 = b$.

Berikut ini dibahas penentuan keuntungan maksimum pada setiap skema pembiayaan yang digunakan penyedia layanan.

Kasus 7b. Jika penyedia layanan menggunakan harga *flat-fee* dengan menetapkan $P_X = 0$, $P_Y = 0$ dan $P > 0$. Artinya, jika konsumen (konsumen tingkat pemakaian tinggi atau tingkat pemakaian rendah) memilih untuk bergabung dengan layanan, maka konsumen tersebut sepenuhnya memanfaatkan layanan dengan memilih tingkat konsumsi $X_1 = \bar{X}_1,\ Y_1 = \bar{Y}_1$ atau $X_2 = \bar{X}_2,\ Y_2 = \bar{Y}_2$ dengan utilitas maksimum $U_{01} + a_1\ \ln\frac{\bar{X}_1+1}{X_m+1} + b_2\ \ln\frac{\bar{Y}_1+1}{Y_m+1} - (\bar{X}_1 + \bar{Y}_1)c$ atau $U_{02} + a_2\ \ln\frac{\bar{X}_2+1}{X_m+1} + b_2\ \ln\frac{\bar{Y}_2+1}{Y_m+1} - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)c$ (untuk konsumen tingkat pemakaian tinggi dan tingkat pemakaian rendah), sehingga penyedia layanan dapat memberikan harga untuk setiap konsumen tingkat pemakaian tinggi tidak lebih dari $P = U_{01} + a_1\ \ln\frac{\bar{X}_1+1}{X_m+1} + b_2\ \ln\frac{\bar{Y}_1+1}{Y_m+1} - (\bar{X}_1 + \bar{Y}_1)c$ dan konsumen tingkat pemakaian rendah tidak lebih dari $P = U_{02} + a_2 \ \ln\frac{\bar{X}_2+1}{X_m+1} + b_2 \ \ln\frac{\bar{Y}_2+1}{Y_m+1} - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)c$. Karena penyedia layanan tidak bisa membedakan konsumen tingkat pemakaian tinggi dan konsumen tingkat pemakaian rendah dan harus memberikan harga yang sama untuk konsumen, penyedia layanan dapat menetapkan harga $P = U_{01} + a_1 \ \ln\frac{\bar{X}_1+1}{X_m+1} + b_2 \ \ln\frac{\bar{Y}_1+1}{Y_m+1} - \left(\frac{a_1}{\bar{X}_1+1}\right)\bar{X}_1 - \left(\frac{b_1}{\bar{Y}_1+1}\right)\bar{Y}_1$ dengan hanya melayani konsumen tingkat pemakaian tinggi. Sedangkan harga $P = U_{02} + a_2 \ \ln\frac{\bar{X}_2+1}{X_m+1} + b_2 \ \ln\frac{\bar{Y}_2+1}{Y_m+1} - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)\ c$ bisa melayani kedua jenis konsumen tersebut, yaitu konsumen tingkat pemakaian tinggi dan tingkat pemakaian rendah.

Jika diasumsikan bahwa $m\left[U_{01} + a_1 \ \ln\frac{\bar{X}_1+1}{X_m+1} + b_2 \ \ln\frac{\bar{Y}_1+1}{Y_m+1} - (\bar{X}_1 + \bar{Y}_1)c\right] < (m+n)\left[U_{02} + a_2 \ \ln\frac{\bar{X}_2+1}{X_m+1} + b_2 \ \ln\frac{\bar{Y}_2+1}{Y_m+1} - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)c\right]$, penyedia layanan yang terbaik menetapkan harga layanan adalah sebesar $U_{02} + a_2 \ \ln\frac{\bar{X}_2+1}{X_m+1} + b_2 \ \ln\frac{\bar{Y}_2+1}{Y_m+1} - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)c$ dan melayani kedua jenis konsumen yaitu konsumen tingkat pemakaian tinggi dan tingkat pemakaian rendah dengan keuntungan maksimum diperoleh sebesar :

$$(m+n)\left[U_{02} + a_2 \ \ln\frac{\bar{X}_2+1}{X_m+1} + b_2 \ \ln\frac{\bar{Y}_2+1}{Y_m+1} - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)c\right]$$

Berdasarkan kasus ini diperoleh :

Lemma 7b : Jika penyedia layanan menggunakan skema pembiayaan *flat fee*, biaya yang dibayarkan menjadi $P = U_{02} + a\ln\frac{\bar{X}_2+1}{X_m+1} + b\ln\frac{\bar{Y}_2+1}{Y_m+1} - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)c$ dan keuntungann maksimum yang diperoleh sebesar :

$$(m+n)\left[U_{02} + a\,ln\frac{\overline{X_2}+1}{X_m+1} + b\,ln\frac{\overline{Y_2}+1}{Y_m+1} - (\overline{X}_2 + \overline{Y_2})c\right]$$

.**Kasus 8b.** Jika penyedia layanan memilih menggunakan skema pembiayaan *usage based* maka ditetapkanlah $P_X > 0$, $P_Y > 0$, dan $P = 0$. Kondisi pertama untuk proses pengoptimalan pada optimasi masalah kosumen *high demand* dan konsumen *low demand*:

$$\frac{\partial\left[\begin{array}{l}\left(U_{01}+a\ln\frac{X_1+1}{X_m+1}+b\ln\frac{Y_1+1}{Y_m+1}-P_xX_1-P_yY_1-(c+t)X_1-(c+t)Y_1\right)+\\ \left(U_{02}+a\ln\frac{X_2+1}{X_m+1}+b\ln\frac{Y_2+1}{Y_m+1}-P_xX_2-P_yY_2-(c+t)X_2-(c+t)Y_2\right)\end{array}\right]}{\partial X_1} = 0$$

$$\frac{a}{X_1+1} - P_X - (c+t) = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{X_1+1} - (c+t) = P_X \Leftrightarrow X_1^* = \frac{a}{P_X+(c+t)} - 1 \qquad (4.34)$$

$$\frac{\partial\left[\begin{array}{l}\left(U_{01}+a\ln\frac{X_1+1}{X_m+1}+b\ln\frac{Y_1+1}{Y_m+1}-P_xX_1-P_yY_1-(c+t)X_1-(c+t)Y_1\right)+\\ \left(U_{02}+a\ln\frac{X_2+1}{X_m+1}+b\ln\frac{Y_2+1}{Y_m+1}-P_xX_2-P_yY_2-(c+t)X_2-(c+t)Y_2\right)\end{array}\right]}{\partial Y_1} = 0$$

$$\frac{b}{Y_1+1} - P_Y - (c+t) = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{Y_1+1} - (c+t) = P_Y \Leftrightarrow Y_1^* = \frac{b}{P_Y+(c+t)} - 1 \qquad (4.35)$$

$$\frac{\partial\left[\begin{array}{l}\left(U_{01}+a\ln\frac{X_1+1}{X_m+1}+b\ln\frac{Y_1+1}{Y_m+1}-P_xX_1-P_yY_1-(c+t)X_1-(c+t)Y_1\right)+\\ \left(U_{02}+a\ln\frac{X_2+1}{X_m+1}+b\ln\frac{Y_2+1}{Y_m+1}-P_xX_2-P_yY_2-(c+t)X_2-(c+t)Y_2\right)\end{array}\right]}{\partial X_2} = 0$$

$$\frac{a}{X_2+1} - P_X - (c+t) = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{X_2+1} - (c+t) = P_X \Leftrightarrow X_2^* = \frac{a}{P_X+(c+t)} - 1 \qquad (4.36)$$

$$\frac{\partial\begin{bmatrix}\left(U_{01}+a\ln\frac{X_1+1}{X_m+1}+b\ln\frac{Y_1+1}{Y_m+1}-P_xX_1-P_yY_1-(c+t)X_1-(c+t)Y_1\right)+\\ \left(U_{02}+a\ln\frac{X_2+1}{X_m+1}+b\ln\frac{Y_2+1}{Y_m+1}-P_xX_2-P_yY_2-(c+t)X_2-(c+t)Y_2\right)\end{bmatrix}}{\partial Y_2}=0$$

$$\frac{b}{Y_2+1}-P_Y-(c+t)=0\Leftrightarrow\frac{b}{Y_2+1}-(c+t)=P_Y\Leftrightarrow Y_2^*=\frac{b}{P_Y+(c+t)}-1 \quad (4.37)$$

Jika diasumsikan $m(\bar{X}_1)<(m+n)(\bar{X}_2)$, maka penyedia layanan dapat menetapkan $P_X=\frac{a}{X_2+1}-(c+t)$ dan $P_Y=\frac{b}{Y_2+1}-(c+t)$ yang melayani konsumen tingkat pemakaian tinggi maupun konsumen tingkat pemakaian rendah.

Optimasi Masalah Produsen menjadi :

$$\text{maks}_{P_X,P_Y}\, m(P_XX_1^*+P_YY_1^*)+n(P_XX_2^*+P_YY_2^*)$$

$$=\text{maks}_{P_X,P_Y}\, m(P_X((\bar{X}_1+1)-1))+P_Y((\bar{Y}_1+1)-1))+n(P_X((\bar{X}_2+1)-1)+P_Y((\bar{Y}_2+1)-1))$$

$$=\text{maks}_{P_X,P_Y}\, m(P_X(\bar{X}_1)+P_Y(\bar{Y}_1)+n(P_X(\bar{X}_2)+P_Y(\bar{Y}_2)$$

$$=\text{maks}_{P_X,P_Y}\, m\left(P_X\left(\frac{a}{P_X+(c+t)}-1\right)+P_Y\left(\frac{b}{P_Y+(c+t)}-1\right)\right)+n\left(P_X\left(\frac{a}{P_X+(c+t)}-1\right)+P_Y\left(\frac{b}{P_Y+(c+t)}-1\right)\right)$$

$$=\text{maks}_{P_X,P_Y}(m+n)\left(P_X\left(\frac{a}{P_X+(c+t)}-1\right)+P_Y\left(\frac{b}{P_Y+(c+t)}-1\right)\right)$$

Jika P_X dan P_Y menurun, maka $X_1{}^*, X_2{}^*, Y_1{}^*$ dan $Y_2{}^*$ meningkat. X_1, X_2, Y_1 dan Y_2 dibatasi pada $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$, $\bar{Y}_1$ dan $\bar{Y}_2$ mengakibatkan P_X dan P_Y terbaik masing – masing menjadi $\frac{a}{\bar{X}_2+1}-(c+t)$ dan $\frac{b}{\bar{Y}_2+1}-(c+t)$ dengan keuntungan maksimum yang dicapai :

$$=\text{maks}_{P_X,P_Y}(m+n)\left(\left(\frac{a}{\bar{X}_2+1}-(c+t)\right)\left(\frac{a}{\frac{a}{\bar{X}_2+1}-(c+t)+(c+t)}-1\right)+\left(\frac{b}{\bar{Y}_2+1}-(c+t)\right)\left(\frac{b}{\frac{b}{\bar{Y}_2+1}-(c+t)+(c+t)}-1\right)\right)$$

$$=\text{maks}_{P_X,P_Y}(m+n)\left(\left(\frac{a}{\bar{X}_2+1}-(c+t)\right)((\bar{X}_2+1)-1)+\left(\frac{b}{\bar{Y}_2+1}-(c+t)\right)((\bar{Y}_2+1)-1))\right)$$

$$=\text{maks}_{P_X,P_Y}(m+n)\left(\left(\frac{a}{\bar{X}_2+1}-(c+t)\right)\bar{X}_2+\left(\frac{b}{\bar{Y}_2+1}-(c+t)\right)\bar{Y}_2\right)$$

$$=\text{maks}_{P_X,P_Y}(m+n)\left(\left(\frac{a}{\bar{X}_2+1}\right)\bar{X}_2+\left(\frac{b}{\bar{Y}_2+1}\right)\bar{Y}_2-(c+t)\bar{X}_2-(c+t)\bar{Y}_2\right)$$

$$= \text{maks}_{P_X,P_Y}(m+n)\left(\left(\frac{a}{\bar{X}_2+1}\right)\bar{X}_2 + \left(\frac{b}{\bar{Y}_2+1}\right)\bar{Y}_2 - (c+t)\bar{X}_2 - (c+t)\bar{Y}_2\right)$$

Jika penyedia layanan menggunakan tipe pembiayaan *usage-based*, maka harga optimal pada saat jam sibuk adalah $P_X = \frac{a}{\bar{X}_2+1} - (c+t)$ dan harga optimal pada saat jam tidak sibuk adalah $P_Y = \frac{b}{\bar{Y}_2+1} - (c+t)$ dengan keuntungan maksimum yang diperoleh sebesar :

$$(m+n)\left(\left(\frac{a}{\bar{X}_2+1}\right)\bar{X}_2 + \left(\frac{b}{\bar{Y}_2+1}\right)\bar{Y}_2 - (c+t)\bar{X}_2 - (c+t)\bar{Y}_2\right)$$

Berdasarkan kasus ini diperoleh :

Lemma 8b. Jika penyedia layanan menggunakan skema pembiayaan *usage based*, harga optimalnya adalah $P_X = \frac{a}{\bar{X}_2+1} - (c+t)$ dan $P_Y = \frac{b}{\bar{Y}_2+1} - (c+t)$ dengan keuntungann maksimum yang diperoleh sebesar :

$$(m+n)\left(\left(\frac{a}{\bar{X}_2+1}\right)\bar{X}_2 + \left(\frac{b}{\bar{Y}_2+1}\right)\bar{Y}_2 - (c+t)\bar{X}_2 - (c+t)\bar{Y}_2\right)$$

.**Kasus 9b.** Jika penyedia layanan memilih menggunakan skema pembiayaan *two part tariff* maka ditetapkan $P_X > 0$, $P_Y > 0$, dan $P > 0$. Kondisi orde pertama untuk persamaan optimasi masalah konsumen tingkat pemakaian tinggi atau tingkat pemakaian rendah dengan menggunakan Persamaan (4.34), (4.35), (4.36), dan (4.37).

Jika $X_1 > X_2 \Leftrightarrow \frac{a}{X_1+1} - (c+t) > \frac{a}{X_2+1} - (c+t)$, maka $P_X = a\,{X_2}^{a-1}{Y_2}^{b} - (c+t)$ yang terbaik untuk ditetapkan oleh penyedia layanan yang dapat digunakan untuk konsumen tingkat pemakaian tinggi dan tingkat pemakaian rendah. Jika menggunakan harga $P_X = \frac{a}{X_1+1} - (c+t)$, maka penyedia layanan hanya dapat menarik konsumen tingkat pemakaian tinggi saja. Begitu juga untuk jam tidak sibuk, $P_Y = \frac{b}{Y_2+1} - (c+t)$ adalah harga yang terbaik pada saat jam tidak sibuk.

Dengan menggunakan Kendala (4.29), diperoleh

$$U_{02} + a\ln\frac{X_2+1}{X_m+1} + b\ln\frac{Y_2+1}{Y_m+1} - P_xX_2 - P_yY_2 - PZ - (c+t)X_2 - (c+t)Y_2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow U_{02} + a\ln\frac{X_2+1}{X_m+1} + b\ln\frac{Y_2+1}{Y_m+1} - \left(\frac{a}{X_2+1} - (c+t)\right)X_2 - \left(\frac{b}{Y_2+1} - (c+t)\right)Y_2 - P - (c+t)X_2 - (c+t)Y_2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow U_{02} + a\ln\frac{X_2+1}{X_m+1} + b\ln\frac{Y_2+1}{Y_m+1} - \left(\frac{a}{X_2+1}\right)X_2 + (c+t)X_2 - \left(\frac{b}{Y_2+1}\right)Y_2 + (c+t)Y_2 - P - (c+t)X_2 - (c+t)Y_2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow U_{02} + a\ln\frac{X_2+1}{X_m+1} + b\ln\frac{Y_2+1}{Y_m+1} - \left(\frac{a}{X_2+1}\right)X_2 - \left(\frac{b}{Y_2+1}\right)Y_2 - P \geq 0$$

$$\Leftrightarrow P \leq U_{02} + a\ln\frac{X_2+1}{X_m+1} + b\ln\frac{Y_2+1}{Y_m+1} - \left(\frac{a}{X_2+1}\right)X_2 - \left(\frac{b}{Y_2+1}\right)Y_2$$

karena $X_1 \leq \bar{X}_1$, $X_2 \leq \bar{X}_2$, $Y_1 \leq \bar{Y}_1$, dan $Y_2 \leq \bar{Y}_2$, maka :

$P_X = \frac{a}{\bar{X}_2+1} - (c+t), P_Y = \frac{b}{\bar{Y}_2+1} - (c+t)$ dan $P \leq U_{02} + a\ln\frac{\bar{X}_2+1}{X_m+1} + b\ln\frac{\bar{Y}_2+1}{Y_m+1} - \left(\frac{a}{\bar{X}_2+1}\right)\bar{X}_2 - \left(\frac{b}{\bar{Y}_2+1}\right)\bar{Y}_2$

Optimasi masalah produsen menjadi :

$max_{P,P_X,P_Y}\, m(P_X X_1{}^* + P_Y Y_1{}^* + PZ_1{}^*) + n(P_X X_2{}^* + P_Y Y_2{}^* + PZ_2{}^*)$

$= m\left[\left(\frac{a}{\bar{X}_2+1} - (c+t)\right)\bar{X}_1 + \left(\frac{b}{\bar{Y}_2+1} - (c+t)\right)\bar{Y}_1 + \left(U_{02} + a\ln\frac{\bar{X}_2+1}{X_m+1} + b\ln\frac{\bar{Y}_2+1}{Y_m+1} - \left(\frac{a}{\bar{X}_2+1}\right)\bar{X}_2 - \left(\frac{b}{\bar{Y}_2+1}\right)\bar{Y}_2\right)\right] + n\left[\left(\frac{a}{\bar{X}_2+1} - (c+t)\right)\bar{X}_2 + \left(\frac{b}{\bar{Y}_2+1} - (c+t)\right)\bar{Y}_2 + \left(U_{02} + a\ln\frac{\bar{X}_2+1}{X_m+1} + b\ln\frac{\bar{Y}_2+1}{Y_m+1} - \left(\frac{a}{\bar{X}_2+1}\right)\bar{X}_2 - \left(\frac{b}{\bar{Y}_2+1}\right)\bar{Y}_2\right)\right]$

$= m\left[\left(\frac{a}{\bar{X}_2+1}\right)\bar{X}_1 - (c+t)\bar{X}_1 + \left(\frac{b}{\bar{Y}_2+1}\right)\bar{Y}_1 - (c+t)\bar{Y}_1 + \left(U_{02} + a\ln\frac{\bar{X}_2+1}{X_m+1} + b\ln\frac{\bar{Y}_2+1}{Y_m+1} - \left(\frac{a}{\bar{X}_2+1}\right)\bar{X}_2 - \left(\frac{b}{\bar{Y}_2+1}\right)\bar{Y}_2\right)\right] + n\left[\left(\frac{a}{\bar{X}_2+1}\right)\bar{X}_2 - (c+t)\bar{X}_2 + \left(\frac{b}{\bar{Y}_2+1}\right)\bar{Y}_2 - (c+t)\bar{Y}_2 + \left(U_{02} + a\ln\frac{\bar{X}_2+1}{X_m+1} + b\ln\frac{\bar{Y}_2+1}{Y_m+1} - \left(\frac{a}{\bar{X}_2+1}\right)\bar{X}_2 - \left(\frac{b}{\bar{Y}_2+1}\right)\bar{Y}_2\right)\right]$

$= m\left[\left(\frac{a}{\bar{X}_2+1}\right)\bar{X}_1 - (c+t)\bar{X}_1 + \left(\frac{b}{\bar{Y}_2+1}\right)\bar{Y}_1 - (c+t)\bar{Y}_1 + \left(U_{02} + a\ln\frac{\bar{X}_2+1}{X_m+1} + b\ln\frac{\bar{Y}_2+1}{Y_m+1} - \left(\frac{a}{\bar{X}_2+1}\right)\bar{X}_2 - \left(\frac{b}{\bar{Y}_2+1}\right)\bar{Y}_2\right)\right] + n\left[U_{02} + a\ln\frac{\bar{X}_2+1}{X_m+1} + b\ln\frac{\bar{Y}_2+1}{Y_m+1} - (c+t)\bar{X}_2 - (c+t)\bar{Y}_2\right]$

$= m\left[\left(\frac{a}{\bar{X}_2+1}\right)(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + \left(\frac{b}{\bar{Y}_2+1}\right)(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) - (\bar{X}_1 + \bar{Y}_1)(c+t)\right] - n[(\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)(c+t)] + (m + n)\left[U_{02} + a\ln\frac{\bar{X}_2+1}{X_m+1} + b\ln\frac{\bar{Y}_2+1}{Y_m+1}\right]$

Jika penyedia layanan menggunakan harga *two-part tariff* dengan menetapkan $P_X > 0$, $P_Y > 0$, dan $P > 0$, maka penyedia dapat menetapkan harga yang optimal $P_X = \frac{a}{\bar{X}_2+1} - (c+t)$, $P_Y = \frac{b}{\bar{Y}_2+1} - (c+t)$, dan biaya berlangganan P sama dengan surplus konsumen dari konsumen tingkat pemakaian rendah, sehingga keuntungan maksimum yang diperoleh sebesar :

$$m\left[\left(\frac{a}{\bar{X}_2+1}\right)(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + \left(\frac{b}{\bar{Y}_2+1}\right)(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) - (\bar{X}_1 + \bar{Y}_1)(c+t)\right] - n[(\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)(c+t)] + (m + n)\left[U_{02} + a\ln\frac{\bar{X}_2+1}{X_m+1} + b\ln\frac{\bar{Y}_2+1}{Y_m+1}\right]$$

Berdasarkan kasus ini diperoleh :

Lemma 9b. Jika penyedia layanan menggunakan skema pembiayaan *two part tariff*, harga optimalnya adalah $P_X = \frac{a}{\bar{X}_2+1} - (c+t)$, $P_Y = \frac{b}{\bar{Y}_2+1} - (c+t)$ dan $P = U_{02} + a\ln\frac{\bar{X}_2+1}{X_m+1} + b\ln\frac{\bar{Y}_2+1}{Y_m+1} - \left(\frac{a}{\bar{X}_2+1}\right)\bar{X}_2 - \left(\frac{b}{\bar{Y}_2+1}\right)\bar{Y}_2$ dengan keuntungann maksimum yang diperoleh sebesar :

$m\left[\left(\frac{a}{\bar{X}_2+1}\right)(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + \left(\frac{b}{\bar{Y}_2+1}\right)(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) - (\bar{X}_1 + \bar{Y}_1)(c+t)\right] - n[(\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)(c+t)] + (m + n)\left[U_{02} + a\ln\frac{\bar{X}_2+1}{X_m+1} + b\ln\frac{\bar{Y}_2+1}{Y_m+1}\right]$.

Hasil analisis dari Lemma 7b, 8b, dan 9b disajikan dalam Tabel 4.3.

Tabel 4.3 Perbandingan skema pembiayaan untuk konsumen heterogen Tingkat Pemakaian Tinggi (*High-demand*) dan Tingkat Pemakaian Rendah (*Low-demand*) berdasarkan fungsi utilitas *Fungsi Bandwidth*.

	Lemma 7b (*Flat-Fee*)	Lemma 8b (*Usage-Based*)	Lemma 9b (*Two-Part Tariff*)
Harga yang dikenakan pada konsumen	$U_{02} + a\ln\frac{\overline{X_2}+1}{X_m+1} + b\ln\frac{\overline{Y_2}+1}{Y_m+1} - (\overline{X}_2 + \overline{Y_2})c$	$P_X = \frac{a}{\bar{X}_2+1} - (c+t)$ dan $P_Y = \frac{b}{\bar{Y}_2+1} - (c+t)$	$P_X = \frac{a}{\bar{X}_2+1} - (c+t)$ dan $P_Y = \frac{b}{\bar{Y}_2+1} - (c+t)$
Keuntungan maksimum	$(m+n)\left[U_{02} + a\,ln\frac{\overline{X_2}+1}{X_m+1} + b\,ln\frac{\overline{Y_2}+1}{Y_m+1} - (\overline{X}_2 + \overline{Y_2})c\right]$	$(m+n)\left(\left(\frac{a}{\bar{X}_2+1}\right)\bar{X}_2 + \left(\frac{b}{\bar{Y}_2+1}\right)\bar{Y}_2 - (c+t)\bar{X}_2 - (c+t)\bar{Y}_2\right)$	$m\left[\left(\frac{a}{\bar{X}_2+1}\right)(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + \left(\frac{b}{\bar{Y}_2+1}\right)(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) - (\bar{X}_1 + \bar{Y}_1)(c+t)\right] - n[(\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)(c+t)] + (m+n)\left[U_{02} + a\ln\frac{\bar{X}_2+1}{X_m+1} + b\ln\frac{\bar{Y}_2+1}{Y_m+1}\right]$

Berdasarkan Tabel 4.3 jika diketahui $X \geq 0$ dan $Y \geq 0$, maka $(m+n)\left[U_{02} + a\,ln\frac{\overline{X_2}+1}{X_m+1} + b\,ln\frac{\overline{Y_2}+1}{Y_m+1} - (\overline{X}_2 + \overline{Y_2})c\right] > (m+n)\left(\left(\frac{a}{\bar{X}_2+1}\right)\bar{X}_2 + \left(\frac{b}{\bar{Y}_2+1}\right)\bar{Y}_2 - (c+t)\bar{X}_2 - (c+t)\bar{Y}_2\right) > m\left[\left(\frac{a}{\bar{X}_2+1}\right)(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + \left(\frac{b}{\bar{Y}_2+1}\right)(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) - (\bar{X}_1 + \bar{Y}_1)(c+t)\right] - n[(\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)(c+t)] + (m+n)\left[U_{02} + a\ln\frac{\bar{X}_2+1}{X_m+1} + b\ln\frac{\bar{Y}_2+1}{Y_m+1}\right]$. Oleh karena itu, harga *flatt fee* lebih baik dibandingkan harga *two-part tariff* dan harga *usage-based* untuk masalah konsumen heterogen dengan tingkat pemakaiannya (*high-demand* dan *low-demand*).

4.4 Kesimpulan

Skema pembiayaan yang lebig optimal untuk fungsi utilitas *bandwitdh* untuk konsumen homogen, heterogen *high-demand* dan *low-demand* dan heterogen terdapat pada skema pembiayaan *falt fee*

BAB V

FUNGSI UTILITAS *PERFECT SUBTITUTE*

Pada kasus ini digunakan fungsi utilitas *perfect subtitute* dengan bentuk $U(x,y) = ax + by$.

5.1 Fungsi Utilitas *Perfect Subtitute* pada Konsumen Homogen

Diasumsikan bahwa biaya marjinal dinotasikan dengan c dan biaya pengawasan dinotasikan dengan t keduanya bernilai 0. Pada bab ini, dikaji bagaimana pengaruh dari biaya marjinal dan biaya pengawasan terhadap skema pembiayaan yang optimal. Skema pembiayaan *flat-fee* bebas atau tidak memerlukan biaya pengawasan, karena pada dasarnya tidak ada kebutuhan untuk memantau konsumsi konsumen.

Pada kasus konsumen homogen, diasumsikan semua konsumen memiliki tingkat kepuasan yang sama dan tingkat maksimum penggunaan yang sama pada jam sibuk maupun pada jam tidak sibuk, yaitu $\bar{X}$ dan $\bar{Y}$. Dengan fungsi utilitas yang lebih spesifik, setiap konsumen memiliki masalah optimasi sebagai berikut, untuk skema pembiayaan *flat-fee*:

Optimasi Masalah Konsumen :

$$\text{Maks}_{X,Y,Z}\ Zk = aX + bY - P_xX - P_yY - PZ - (X+Y)c \tag{5.1}$$

dengan kendala :

$$X \leq \bar{X}Z \tag{5.2}$$
$$Y \leq \bar{Y}Z \tag{5.3}$$
$$aX + bY - P_xX - P_yY - PZ - (X+Y)c \geq 0 \tag{5.4}$$
$$Z = 0 \text{ atau } 1 \tag{5.5}$$

Optimasi Masalah Produsen :

$$\text{Maks}_{P,P_X,P_Y} \textstyle\sum_i \left(P_xX^* + P_yY^* + PZ^*\right) \tag{5.6}$$

dimana (X*,Y*,Z*) = argmaks $aX + bY - P_xX - P_yY - PZ - (X+Y)c$

dengan kendala:

$$X \leq \bar{X}Z$$
$$Y \leq \bar{Y}Z$$
$$aX + bY - PxX - PyY - PY - (X+Y)c \geq 0$$
$$Z = 0 \text{ atau } 1$$

Untuk skema pembiayaan *usage-based* dan *two-part tariff* :

Optimasi Masalah Konsumen :

$$\text{Maks}_{X,Y,Z}\ Zk = aX + bY - P_xX - P_yY - PZ - (c+t)X - (c+t)Y \tag{5.7}$$

dengan kendala :

$$X \leq \bar{X}Z$$
$$Y \leq \bar{Y}Z$$
$$aX + bY - P_xX - P_yY - PZ - (c+t)X - (c+t)Y \geq 0 \tag{5.8}$$
$$Z = 0 \text{ atau } 1$$

Optimasi Masalah Produsen :

$$\underset{P,P_X,P_Y}{\text{Maks}} \sum_i \left(P_xX^* + P_yY^* + PZ^*\right)$$

dimana (X*,Y*,Z*) = argmaks $aX + bY - P_xX - P_yY - PZ - (c+t)X - (c+t)Y$

dengan kendala:

$$X \leq \bar{X}Z$$
$$Y \leq \bar{Y}Z$$
$$aX + bY - P_xX - P_yY - PY - (c+t)X - (c+t)Y \geq 0$$

$Z = 0$ atau 1

Kasus 1a: Jika ISP memilih untuk menggunakan skema pembiayaan *flat-fee* maka ditetapkan $P_x = 0$, $P_y = 0$, dan $P > 0$, dan harga yang diberikan oleh ISP tidak berpengaruh pada waktu penggunaan saat jam sibuk ataupun jam tidak sibuk. Dengan ditetapkannya ketentuan tersebut tingkat konsumsi konsumen menjadi $X = \bar{X}$ dan $Y = \bar{Y}$ sehingga fungsi tujuan menjadi:

$\text{Maks}_{X,Y,Z}\ Zk = a\bar{X} + b\bar{Y} - 0.\bar{X} - 0.\bar{Y} - P(1) - (\bar{X} + \bar{Y})c$

$= \text{Maks}_{X,Y,Z}\ Zk = a\bar{X} + b\bar{Y} - P - (\bar{X} + \bar{Y})c$

Berdasarkan Kendala (4.4), diperoleh:

$a\bar{X} + b\bar{Y} - P_x\bar{X} - P_y\bar{Y} - PZ - (\bar{X} + \bar{Y})c \geq 0$

$\Leftrightarrow a\bar{X} + b\bar{Y} - 0.\bar{X} - 0.\bar{Y} - P(1) - (\bar{X} + \bar{Y})c \geq 0$

$\Leftrightarrow a\bar{X} + b\bar{Y} - P - (\bar{X} + \bar{Y})c \geq 0$

$\Leftrightarrow P \leq a\bar{X} + b\bar{Y} - (\bar{X} + \bar{Y})c$

Sehingga optimasi masalah produsen:

$$\underset{P,P_x,P_y}{\text{Maks}} \sum_i \left(P_x X^* + P_y Y^* + PZ^*\right) = \underset{P,P_x,P_y}{\text{Maks}} \sum_i (0.X^* + 0.Y^* + P(1))$$

$$= \underset{P,P_x,P_y}{\text{Maks}} \sum_i (0 + 0 + a\bar{X} + b\bar{Y} - (\bar{X} + \bar{Y})c)$$

$$= \underset{P,P_x,P_y}{\text{Maks}} \sum_i (a\bar{X} + b\bar{Y} - (\bar{X} + \bar{Y})c)$$

Biaya yang dikenakan pada skema pembiayaan *flat-fee* adalah $a\bar{X} + b\bar{Y} - (\bar{X} + \bar{Y})c$ dan keuntungan maksimum yang diperoleh oleh ISP adalah:

$$\underset{P,P_X,P_Y}{\text{Maks}} \sum_i (a\bar{X} + b\bar{Y} - (\bar{X} + \bar{Y})c)$$

Selanjutnya diperoleh lemma berikut.

Lemma 1a: Jika ISP menggunakan skema pembiayaan *flat-fee*, biaya yang dibayarkan menjadi $a\bar{X} + b\bar{Y} - (\bar{X} + \bar{Y})c$ dan keuntungan maksimum yang diperoleh adalah:

$$\sum_i (a\bar{X} + b\bar{Y} - (X + Y)c)$$

Kasus 2a: Jika ISP memilih menggunakan skema pembiayaan *usage-based* maka ditetapkan $P_x > 0$, $P_y > 0$, dan $P = 0$, dimana harga yang diberikan ISP dibedakan, yaitu harga pada saat jam sibuk dan jam tidak sibuk. Dengan ketetapan tersebut Fungsi Tujuan (4.7) menjadi:

$\text{Maks}_{X,Y,Z}\ \ Zk = aX + bY - P_xX - P_yY - 0.Z - (c + t)X - (c + t)Y$

$$\text{Maks}_{X,Y,Z}\ Zk = aX + bY - P_xX - P_yY - (c + t)X - (c + t)Y \qquad (5.9)$$

Untuk memaksimumkan Persamaan (4.9), dilakukan pendiferensialan terhadap X dan Y ; dengan syarat

$$\frac{\partial Zk}{\partial X} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial Zk}{\partial Y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(aX + bY - P_xX - P_yY - (c + t)X - (c + t)Y)}{\partial X} = 0$$

$$\Leftrightarrow a - (c + t) = P_x \quad \Leftrightarrow \quad a = P_x + (c + t) \qquad (5.10)$$

dan

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(aX + bY - P_xX - P_yY - (c + t)X - (c + t)Y)}{\partial Y} = 0$$

$$\Leftrightarrow b - (c + t) = P_Y \quad \Leftrightarrow \quad b = P_Y + (c + t) \qquad (5.11)$$

Optimasi masalah produsen menjadi :

$$\underset{P,P_x,P_y}{\text{Maks}} \sum_i \left(P_x X^* + P_y Y^*\right)$$

$$= \underset{P_x,P_y}{\text{Maks}} \sum_i ((a - (c+t))X^* + (b - (c+t))Y^*)$$

$$= \underset{P_x,P_y}{\text{Maks}} \sum_i (aX^* - (c+t)X^* + bY^* - (c+t)Y^*)$$

$$= \underset{P_x,P_y}{\text{Maks}} \sum_i (aX^* + bY^* - (c+t)X^* - (c+t)Y^*)$$

Jika X dan Y dibatasi, maka X^* dan Y^* menjadi $\bar{X}$ dan $\bar{Y}$. Dengan kata lain, P_x dan P_y menjadi $P_x = a - (c+t)$ dan $P_y = b - (c+t)$ dengan keuntungan maksimum yang diperoleh adalah:

$$\sum_i (a\bar{X} + b\bar{Y} - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y})$$

Sehingga diperoleh lemma berikut.

Lemma 2a : Jika ISP menggunakan skema pembiayaan *usage-based*, harga optimalnya adalah $P_x = a - (c+t)$ dan $P_y = b - (c+t)$ dengan keuntungan maksimum yang diperoleh adalah:

$$\sum_i (a\bar{X} + b\bar{Y} - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y})$$

Kasus 3a: Jika ISP memilih menggunakan skema pembiayaan *two-part tariff* maka ditetapkan $P_x > 0$, $P_y > 0$, dan $P > 0$. Jika Persamaan (4.10) dan (4.11) disubstitusikan ke Pertidaksamaan (4.8) yang merupakan kendala pada optimasi masalah konsumen untuk skema pembiayaan *two-part tariff*, maka kendala tersebut menjadi:

$aX + bY - P_x X - P_y Y - PZ - (c+t)X - (c+t)Y \geq 0$

$\Leftrightarrow aX + bY - (a - (c+t))X - (b - (c+t))Y - P - (c+t)X - (c+t)Y \geq 0$

$\Leftrightarrow aX + bY - aX + (c+t)X - bY + (c+t)Y - P - (c+t)X - (c+t)Y \geq 0$

$\Leftrightarrow aX - aX + bY - bY + (c+t)X - (c+t)X + (c+t)Y - (c+t)Y - P \geq 0$

$\Leftrightarrow -P \geq 0$

$\Leftrightarrow P \leq 0$

Karena P tidak boleh bernilai negatif, nilai P yang memenuhi adalah $P = 0$

Optimasi Masalah Produsen menjadi:

$$\underset{P,P_x,P_y}{\text{Maks}} \sum_i \left(P_x X^* + P_y Y^* + PZ^*\right)$$

$$= \underset{P,P_x,P_y}{\text{Maks}} \sum_i \Big(\big(a - (c+t)\big)X^* + \big(b - (c+t)\big)Y^* + P\Big)$$

$$= \underset{P,P_x,P_y}{\text{Maks}} \sum_i \Big(\big(a - (c+t)\big)X^* + \big(b - (c+t)\big)Y^* + 0\Big)$$

$$= \underset{P,P_x,P_y}{\text{Maks}} \sum_i (aX^* - (c+t)X^* + bY^* - (c+t)Y^*)$$

$$= \underset{P,P_x,P_y}{\text{Maks}} \sum_i aX^* + bY^* - (c+t)X^* - (c+t)Y^*$$

Jika X dan Y dibatasi, maka X^* dan Y^* menjadi $\bar{X}$ dan $\bar{Y}$. Dengan kata lain, P_x dan P_y menjadi $P_x = a - (c+t)$, $P_y = b - (c+t)$, dan $P = 0$ dengan keuntungan maksimum yang diperoleh adalah:

$$\sum_i a\bar{X} + b\bar{Y} - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y}$$

Dari hasil analisis ini diperoleh lemma berikut.

Lemma 3a : Jika ISP menggunakan skema pembiayaan *two-part tariff*, harga optimalnya adalah $P_x = a - (c+t)$ dan $P_y = b - (c+t)$ dengan keuntungan maksimum yang diperoleh adalah:

$$\sum_i a\bar{X} + b\bar{Y} - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y}$$

Hasil analisis dari Lemma 1a, 2a, dan 3a disajikan dalam Tabel 5.1.

Tabel 5.1 Perbandingan Skema Pembiayaan untuk Konsumen Homogen Berdasarkan Fungsi Utilitas *Perfect Substitute* dengan Biaya Marjinal dan Biaya Pengawasan

Yang Dioptimalkan	Kasus 1.a (*Flat-Fee*)	Kasus 2.a (*Usage-Based*)	Kasus 3.a (*Two-Part Tariff*)
Harga yang Dikenakan pada Konsumen	$P = a\bar{X} + b\bar{Y} - (\bar{X} + \bar{Y})c$	$P_x = a - (c+t)$ dan $P_y = b - (c+t)$	$P_x = a - (c+t)$ dan $P_y = b - (c+t)$
Keuntungan Maksimum	$\sum_i a\bar{X} + b\bar{Y} - (\bar{X} + \bar{Y})c$	$\sum_i (a\bar{X} + b\bar{Y} - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y})$	$\sum_i a\bar{X} + b\bar{Y} - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y}$

Berdasarkan Tabel 5.1 dapat dilihat bahwa :

$$\sum_i a\bar{X} + b\bar{Y} - (\bar{X} + \bar{Y})c \geq \sum_i (a\bar{X} + b\bar{Y} - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y})$$

dimana $(c+t) \leq a\bar{X}$ atau $(c+t) \leq b\bar{Y}$, tipe skema pembiayaan *flat-fee* menghasilkan keuntungan maksimum lebih optimal dibandingkan saat ISP memilih menggunakan skema pembiayaan *usage-based*, dan *two-part tariff*.

5.2 Fungsi Utilitas *Perfect Subtitute* pada Konsumen Heterogen *high-end* dan *low-end*

Pada analisis 5.1 telah dibahas mengenai konsumen homogen, selanjutnya dibahas pula mengenai konsumen heterogen. Konsumen heterogen yang dianalisis adalah konsumen heterogen *high-end* dan *low-end*. Misalkan terdapat m konsumen golongan atas (i=1) dan n konsumen golongan bawah (i=2). Diasumsikan bahwa setiap konsumen heterogen mempunyai batas atas yang sama $\bar{X}$ dan $\bar{Y}$ dengan masing-masing adalah tingkat konsumsi pada saat jam sibuk dan pada saat jam tidak sibuk, $a_1 > a_2$ dan $b_1 > b_2$. Tingkat kepuasan maksimum diperoleh dengan memilih tingkat konsumsi $X_1 = \bar{X}$, $Y_1 = \bar{Y}$ atau $X_2 = \bar{X}$, $Y_2 = \bar{Y}$ dan ${X_1}^* = \bar{X}$, ${Y_1}^* = \bar{Y}$ atau ${X_2}^* = \bar{X}$, ${Y_2}^* = \bar{Y}$.

Untuk skema pembiayaan *flat-fee* :
Optimasi Masalah Konsumen:

$$\text{Maks}_{X_i,Y_i,Z_i}\ Zk = a_iX_i + b_iY_i - P_xX_i - P_yY_i - PZ_i - (X_i + Y_i)c \tag{5.12}$$

dengan kendala :

$$X_i \le \bar{X}_i Z_i$$
$$Y_i \le \bar{Y}_i Z_i$$
$$a_iX_i + b_iY_i - P_xX_i - P_yY_i - PZ_i - (X_i + Y_i)c \ge 0 \tag{5.13}$$
$$Z_i = 0 \text{ atau } 1$$

Optimasi Masalah Produsen:

$$\text{Maks}_{P,P_x,P_y} m\left(P_xX_1{}^* + P_yY_1{}^* + PZ_1{}^*\right) + n\left(P_xX_2{}^* + P_yY_2{}^* + PZ_2{}^*\right) \tag{5.14}$$

dimana (X_i*,Y_i*,Z_i*) = argmaks $a_iX_i + b_iY_i - P_xX_i - P_yY_i - PZ_i - (X_i + Y_i)c$
dengan kendala:

$$X_i \le \bar{X}_i Z_i$$
$$Y_i \le \bar{Y}_i Z_i$$
$$a_iX_i + b_iY_i - P_xX_i - P_yY_i - PZ_i - (X_i + Y_i)c \ge 0$$
$$Z_i = 0 \text{ atau } 1$$

Untuk skema pembiayaan *usage-based* dan *two-part tariff :*
Optimasi Masalah Konsumen:

$$\text{Maks}_{X_i,Y_i,Z_i}\ Zk = a_iX_i + b_iY_i - P_xX_i - P_yY_i - PZ_i - (c + t)X_i - (c + t)Y_i \tag{5.15}$$

dengan kendala :

$$X_i \le \bar{X}_i Z_i$$
$$Y_i \le \bar{Y}_i Z_i$$
$$a_iX_i + b_iY_i - P_xX_i - P_yY_i - PZ_i - (c + t)X_i - (c + t)Y_i \ge 0 \tag{5.16}$$
$$Z_i = 0 \text{ atau } 1$$

Optimasi Masalah Produsen:

$$\text{Maks}_{P,P_x,P_y} m\left(P_xX_1{}^* + P_yY_1{}^* + PZ_1{}^*\right) + n\left(P_xX_2{}^* + P_yY_2{}^* + PZ_2{}^*\right)$$

dimana (X_i*,Y_i*,Z_i*) = argmaks $a_iX_i + b_iY_i - P_xX_i - P_yY_i - PZ_i - (c + t)X_i - (c + t)Y_i$
dengan kendala:

$$X_i \le \bar{X}_i Z_i$$
$$Y_i \le \bar{Y}_i Z_i$$
$$a_iX_i + b_iY_i - P_xX_i - P_yY_i - PZ_i - (c + t)X_i - (c + t)Y_i \ge 0$$
$$Z_i = 0 \text{ atau } 1$$

Kasus 4a: Jika menggunakan skema pembiayaan *flat-fee,* maka $P_X = 0$, $P_Y = 0$, dan $P > 0$. Jika konsumen memilih untuk bergabung ke dalam program yang diberikan, tingkat kepuasan maksimum diperoleh dengan memilih tingkat konsumsi $X_1 = \bar{X}, Y_1 = \bar{Y}$ atau $X_2 = \bar{X}, Y_2 = \bar{Y}$. Hal ini membuat ISP dapat memberikan harga untuk setiap konsumen *high-end* tidak lebih dari $a_1\bar{X} + b_1\bar{Y} - (\bar{X} + \bar{Y})c$ dan setiap konsumen *low-end* tidak lebih dari $a_2\bar{X} + b_2\bar{Y} - (\bar{X} + \bar{Y})c$. Dengan demikian diasumsikan bahwa $a_1 < \frac{m+n}{m}a_2$ dan $b_1 < \frac{m+n}{m}b_2$. Jika konsumen dikenakan biaya sebesar $a_1\bar{X} + b_1\bar{Y} - (\bar{X} + \bar{Y})c$, maka hanya konsumen *high-end* yang dapat mengikuti layanan tetapi jika konsumen dikenakan biaya sebesar $a_2\bar{X} + b_2\bar{Y} - (\bar{X} + \bar{Y})c$, maka kedua jenis konsumen tersebut dapat mengikuti layanan, yaitu konsumen *high-end* dan konsumen *low-end*. Untuk memaksimumkan keuntungan, ISP mengenakan biaya $P = a_2\bar{X} + b_2\bar{Y} - (\bar{X} + \bar{Y})c$. Oleh karena itu, ISP mengenakan biaya $a_2\bar{X} + b_2\bar{Y} - (\bar{X} + \bar{Y})c$ kepada konsumen *high-end* dan konsumen *low-end* yang membuat keuntungan maksimum yang didapat ISP menjadi :

Maks $_P\, m(\, PZ_1{}^{*}) + \; n\, (PZ_2{}^{*}) = \; m(\, a_2\bar{X} + b_2\bar{Y} - (X+Y)c) + \; n\, (a_2\bar{X} + b_2\bar{Y} - (X+Y)c)$

$= (m+n\,)\; (a_2\bar{X} + b_2\bar{Y} - (X+Y)c)$

Keuntungan maksimum yang diperoleh penyedia layanan adalah:
$(m+n\,)\;(a_2\bar{X} + b_2\bar{Y} - (X+Y)c\,)$; dengan m adalah banyaknya konsumen *high-end* dan n adalah banyaknya konsumen *low-end*.

Analisis ini disimpulkan ke dalam lemma berikut.

Lemma 4a : Jika ISP menggunakan skema pembiayaan *flat-fee*, harga yang dikenakan kepada konsumen menjadi $a_2\bar{X} + b_2\bar{Y} - (X+Y)c$ dan keuntungan maksimum yang diperoleh sebesar $(m+n)(a_2\bar{X} + b_2\bar{Y} - (X+Y)c)$.

Kasus 5a: Jika ISP memilih menggunakan skema pembiayaan *usage-based* maka ditetapkan $P_x > 0$, $P_y > 0$, dan $P = 0$, sehingga optimasi masalah konsumen menjadi:

$$\text{Maks}_{X_i,Y_i,Z_i}\;\; Zk = a_iX_i + b_iY_i - P_xX_i - P_yY_i - P(0) - (c+t)X_i - (c+t)Y_i$$

$$\text{Maks}_{X_i,Y_i,Z_i}\;\; Zk = a_iX_i + b_iY_i - P_xX_i - P_yY_i - (c+t)X_i - (c+t)Y_i \qquad (5.17)$$

Optimasi masalah konsumen heterogen *high-end* :

Untuk memaksimumkan Persamaan (4.17), dilakukan pendiferensialan terhadap X_1 dan Y_1; dengan syarat

$$\frac{\partial Zk}{\partial X_1} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial Zk}{\partial Y_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(a_1X_1 + b_1Y_1 - P_xX_1 - P_yY_1 - (c+t)X_1 - (c+t)Y_1)}{\partial X_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1 - (c+t) = \; P_x \qquad (5.18)$$

dan

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(a_1X_1 + b_1Y_1 - P_xX_1 - P_yY_1 - (c+t)X_1 - (c+t)Y_1)}{\partial Y_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow b_1 - (c+t) = \; P_y \qquad (5.19)$$

Optimasi masalah konsumen heterogen *low-end* :

Untuk memaksimumkan Persamaan (4.28), dilakukan pendiferensialan terhadap X_2 dan Y_2; dengan syarat

$$\frac{\partial Zk}{\partial X_2} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial Zk}{\partial Y_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(a_2X_2 + b_2Y_2 - P_xX_2 - P_yY_2 - (c+t)X_2 - (c+t)Y_2)}{\partial X_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow a_2 - (c+t) = \; P_x \qquad (5.20)$$

dan

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(a_2X_2 + b_2Y_2 - P_xX_2 - P_yY_2 - (c+t)X_2 - (c+t)Y_2)}{\partial Y_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow b_2 - (c+t) = \; P_y \qquad (5.21)$$

Optimasi Masalah Produsen menjadi :

$$\text{Maks}_{P,P_x,P_y}(P_XX_1^* + P_YY_1^*) + n(P_XX_2^* + P_YY_2^*)$$

$$= \text{Maks}_{P_x,P_y}\, m((a_1 - (c+t))X_1^* + (b_1 - (c+t))Y_1^*) + n((a_2 - (c+t))X_2^* + (b_2 - (c+t))Y_2^*)$$

$$= \underset{P_x,P_y}{\text{Maks}}\, m(a_1X_1^* + b_1Y_1^* - (c+t)X_1^* - (c+t)Y_1^*) + n(a_2X_2^* + b_2Y_2^* - (c+t)X_2^* - (c+t)Y_2^*)$$

Untuk memaksimumkan persamaan optimasi masalah produsen, ISP harus memperkecil nilai P_x dan P_y. Karena X_1, X_2, Y_1, dan Y_2 dibatasi, maka X_1^*, X_2^*, Y_1^*, dan Y_2^* tidak dapat melebihi $\bar{X}$

dan $\bar{Y}$. Untuk mencari biaya maksimum, lakukan analisis pada jam sibuk. Analisis ini diterapkan pada masalah saat jam sibuk dan saat jam tidak sibuk.

Masalah pada saat jam sibuk :

ISP harus meminimalkan P_x; dengan $P_x \leq a_1 - (c+t)$ untuk memaksimalkan Persamaan (4.18). Di sisi lain, jika ISP menetapkan harga di bawah $P_x \leq a_2 - (c+t)$, keuntungan tidak optimal jika $X_1{}^* \leq \bar{X}$ atau $X_2{}^* \leq \bar{X}$. Oleh karena itu, harga P_x yang terbaik adalah $a_2 - (c + t) \leq P_x \leq a_1 - (c+t)$.

Masalah jam tidak sibuk :

ISP harus meminimalkan P_y; dengan $P_y \leq b_1 - (c+t)$, untuk memaksimalkan Persamaan (4.18). Di sisi lain, jika penyedia menetapkan $P_y \leq b_2 - (c+t)$, keuntungan tidak optimal jika $Y_1{}^* \leq \bar{Y}$ atau $Y_2{}^* \leq \bar{Y}$. Oleh karena itu, harga P_y yang terbaik adalah $b_2 - (c+t) \leq P_y \leq b_1 - (c+t)$.

Dengan kata lain, jika ISP memberikan harga dibawah a_2 maka keuntungan yang diperoleh tidak maksimum karena X_1^* dan X_2^* tidak dapat lebih dari $\bar{X}$ dan permintaan konsumen meningkat dengan menurunnya harga. Jadi, harga terbaik P_x haruslah berada diantara a_1 dan a_2. Saat harga berada pada interval tersebut permintaan konsumen *high-end* menjadi tetap di $\bar{X}$ dan permintaan konsumen *low-end* meningkat sebanding dengan menurunnya harga. Dengan kata lain, P_x dan P_y menjadi $P_x = a_2 - (c+t)$ dan $P_y = b_2 - (c+t)$ dengan keuntungan maksimum yang diperoleh adalah:

$$(m+n)(a_2\bar{X} + b_2\bar{Y} - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y})$$

Berdasarkan kasus ini diperoleh lemma berikut.

Lemma 5a : Jika ISP menggunakan skema pembiayaan *usage-based*, harga optimalnya adalah $P_x = a_2 - (c+t)$ dan $P_y = b_2 - (c+t)$ dengan keuntungan maksimum yang diperoleh adalah:

$$(m+n)(a_2\bar{X} + b_2\bar{Y} - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y})$$

Kasus 6a: Jika ISP memilih menggunakan skema pembiayaan *two-part tariff* maka ditetapkan $P_x > 0$, $P_y > 0$, dan $P > 0$. Untuk mengoptimalkan masalah konsumen lakukan pendiferensialan Fungsi Tujuan (4.15) terhadap x dan y sehingga diperoleh Persamaan (4.18) – (4.21). Setelah itu diperoleh P_X yang berada diantara $a_1 - (c+t)$ dan $a_2 - (c+t)$ atau $a_2 - (c+t) \leq P_x \leq a_1 - (c+t)$ begitu pula dengan P_y. Harga terbaik P_x haruslah berada diantara a_1 dan a_2. Ketika harga berada pada interval tersebut permintaan konsumen *high-end* menjadi tetap di $\bar{X}$ dan permintaan konsumen *low-end* tetap sebanding dengan menurunnya harga. Dengan kata lain, P_x dan P_y menjadi $P_x = a_2 - (c+t)$, $P_y = b_2 - (c + t)$ dan $P = 0$. Selain itu juga diasumsikan :

$a_1 < \frac{m+n}{m}\, a_2$ dan $b_1 < \frac{m+n}{m}\, b_2$.

Optimasi masalah ISP menjadi :

Maks $_{P_x,P_y}\, m\left(P_xX_1{}^* + P_yY_1{}^* + PZ_1{}^*\right) + n\left(P_xX_2{}^* + P_yY_2{}^* + PZ_2{}^*\right)$

$$= m\Big(\big(a_2 - (c+t)\big)X^* + \big(b_2 - (c+t)\big)Y^* + 0\Big)$$
$$+ n\Big(\big(a_2 - (c+t)\big)X^* + \big(b_2 - (c+t)\big)Y^* + 0\Big)$$
$$= m(a_2X^* - (c+t)X^* + b_2Y^* - (c+t)Y^*) + n(a_2X^* - (c+t)X^* + b_2Y^* - (c+t)Y^*)$$
$$= m(a_2X^* + b_2Y^* - (c+t)X^* - (c+t)Y^*) + n(a_2X^* + b_2Y^* - (c+t)X^* - (c+t)Y^*)$$
$$= (m+n)(a_2X^* + b_2Y^* - (c+t)X^* - (c+t)Y^*)$$

Keuntungan maksimum yang diperoleh adalah:

$$(m+n)(a_2\bar{X} + b_2\bar{Y} - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y})$$

Analisis ini disimpulkan ke dalam lemma berikut.

Lemma 6a : Jika ISP menggunakan skema pembiayaan *two-part tariff*, harga optimalnya adalah $P_x = a_2 - (c+t)$, $P_y = b_2 - (c+t)$ dan $P = 0$ dengan keuntungan maksimum yang diperoleh adalah:

$$(m+n)(a_2\bar{X} + b_2\bar{Y} - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y}).$$

Hasil analisis dari Lemma 4a, 5a, dan 6a disajikan dalam Tabel 5.2.

Tabel 5.2 Perbandingan Skema Pembiayaan untuk Konsumen Heterogen(*High-End* dan *Low-End*) Berdasarkan Fungsi Utilitas *Perfect Substitute* dengan Biaya Marjinal dan Biaya Pengawasan

Yang Dioptimalkan	Kasus 4.a (*Flat-Fee*)	Kasus 5.a (*Usage-Based*)	Kasus 6.a (*Two-Part Tariff*)
Harga yang Dikenakan pada Konsumen	$P = a_2\bar{X} + b_2\bar{Y} - (X + Y)c$	$P_x = a_2 - (c+t)$ dan $P_y = b_2 - (c+t)$	$P_x = a_2 - (c+t)$, $P_y = b_2 - (c+t)$
Keuntungan Maksimum	$(m+n)(a_2\bar{X} + b_2\bar{Y} - (\bar{X} + \bar{Y})c)$	$(m+n)(a_2\bar{X} + b_2\bar{Y} - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y})$	$(m+n)(a_2\bar{X} + b_2\bar{Y} - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y})$

Berdasarkan Tabel 5.2 dapat dilihat bahwa :

$$\sum_i a\bar{X} + b\bar{Y} - (\bar{X} + \bar{Y})c \geq \sum_i (a\bar{X} + b\bar{Y} - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y})$$

dimana $(c+t) \leq a_2\bar{X}$ atau $(c+t) \leq b_2\bar{Y}$, skema pembiayaan *flat-fee* menghasilkan keuntungan maksimum lebih besar dibandingkan saat ISP memilih skema pembiayaan *usage-based*, dan *two-part tariff*.

5.3 Fungsi Utilitas *Perfect Substitute* pada Konsumen Heterogen *High-demand* dan *Low-demand*

Dalam sub bab ini, dipertimbangkan bagaimana tingkat konsumsi maksimum yang heterogen mungkin mempengaruhi pilihan harga perusahaan. Diasumsikan terdapat dua tipe konsumen, yaitu konsumen *high-demand* (tipe 1) dan konsumen *low-demand* (tipe 2) dengan tingkat maksimum pemakaian $\bar{X}_1$ dan $\bar{Y}_1$ untuk (tipe 1) serta $\bar{X}_2$ dan $\bar{Y}_2$ untuk (tipe 2) dimana $\bar{X}_1 > \bar{X}_2$ dan $\bar{Y}_1 > \bar{Y}_2$. Misalkan terdapat *m* konsumen *high-demand* dan *n* konsumen *low-demand* dengan $a_1 = a_2 = a$ dan $b_1 = b_2 = b$.

Penentuan keuntungan maksimum pada setiap skema pembiayaan yang digunakan ISP.

Kasus 7a: Jika menggunakan skema pembiayaan *flat-fee* maka ditetapkan $P_x = 0$, $P_y = 0$, dan $P > 0$. Artinya jika konsumen memilih untuk bergabung ke dalam program yang diberikan, maka tingkat kepuasan maksimum diperoleh dengan memilih tingkat konsumsi $X_1 = \bar{X}_1$, $Y_1 = \bar{Y}_1$ atau $X_2 = \bar{X}_2$, $Y_2 = \bar{Y}_2$ dengan tingkat kepuasan maksimum yang diperoleh $a\bar{X}_1 + b\bar{Y}_1 - (\bar{X}_1 + \bar{Y}_1)c$ atau $a\bar{X}_2 + b\bar{Y}_2 - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)c$. Oleh karena itu, ISP tidak dapat mengenakan biaya lebih dari $a\bar{X}_1 + b\bar{Y}_1 - (\bar{X}_1 + \bar{Y}_1)c$ kepada setiap konsumen *high-demand* dan kepada setiap konsumen *low-demand* $a\bar{X}_2 + b\bar{Y}_2 - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)c$. Dengan menggunakan skema pembiayaan *flat-fee*, ISP tidak dapat membedakan pembiayaan antara konsumen *high-demand* dan konsumen *low-demand* sehingga ISP harus memilih untuk mengenakan biaya sebesar $a\bar{X}_1 + b\bar{Y}_1 - (\bar{X}_1 + \bar{Y}_1)c$ dan hanya konsumen *high-demand* yang dapat menggunakan layanan tersebut atau mengenakan biaya sebesar $a\bar{X}_2 + b\bar{Y}_2 - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)c$ dimana konsumen *high-demand* dan konsumen *low-demand* dapat bergabung ke dalam program yang diberikan. Jika diasumsikan $m[a\bar{X}_1 + b\bar{Y}_1 - (\bar{X}_1 + \bar{Y}_1)c] < (m+n)[a\bar{X}_2 + b\bar{Y}_2 - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)c]$, maka harga terbaik yang dapat dikenakan oleh ISP adalah $a\bar{X}_2 + b\bar{Y}_2 - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)c$ untuk konsumen *high-demand* dan konsumen *low-demand*. Jadi, keuntungan maksimum yang diperoleh ISP adalah:

$$(m+n)(a\bar{X}_2 + b\bar{Y}_2 - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)c)$$

Sehingga berdasarkan analisis tersebut diperoleh lemma berikut.

Lemma 7a : Jika ISP menggunakan skema pembiayaan *flat-fee*, biaya yang dibayarkan menjadi $P = a\bar{X}_2 + b\bar{Y}_2 - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)c$ dan keuntungan maksimum yang diperoleh adalah:

$$(m+n)[a\bar{X}_2 + b\bar{Y}_2 - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)c]$$

Kasus 8a: Jika ISP memilih menggunakan skema pembiayaan *usage-based* maka ditetapkan $P_x > 0$, $P_y > 0$, dan $P = 0$. Untuk optimasi masalah konsumen *high-demand/low-demand* menghasilkan:

Maks $_{X,Y,Z}$ $\quad Zk = a\bar{X}_i + b\bar{Y}_i - P_x\bar{X}_i - P_y\bar{Y}_i - (c+t)\bar{X}_i - (c+t)\bar{Y}_i$ (5.22)

Optimasi masalah konsumen heterogen *high-demand* :

Untuk mengoptimalkan Persamaan (4.22), dilakukan pendiferensialan terhadap X_1 dan Y_1; dengan syarat

$$\frac{\partial Zk}{\partial \bar{X}_1} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial Zk}{\partial \bar{Y}_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(a\bar{X}_1 + \mathrm{b}\bar{\mathrm{Y}}_1 - P_x\bar{X}_1 - P_y\bar{Y}_1 - (c+t)\bar{X}_1 - (c+t)\bar{Y}_1)}{\partial \bar{X}_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow a - (c+t) = P_x \tag{5.23}$$

dan

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(a\bar{X}_1 + \mathrm{b}\bar{\mathrm{Y}}_1 - P_x\bar{X}_1 - P_y\bar{Y}_1 - (c+t)\bar{X}_1 - (c+t)\bar{Y}_1}{\partial \bar{Y}_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow b - (c+t) = P_y \tag{5.24}$$

Optimasi masalah konsumen heterogen *low-demand* :

Untuk mengoptimalkan Persamaan (4.33), dilakukan pendiferensialan terhadap X_2 dan Y_2; dengan syarat

$$\frac{\partial Zk}{\partial \bar{X}_2} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial Zk}{\partial \bar{Y}_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(a\bar{X}_2 + \mathrm{b}\bar{\mathrm{Y}}_2 - P_x\bar{X}_2 - P_y\bar{Y}_2 - (c+t)\bar{X}_2 - (c+t)\bar{Y}_2}{\partial \bar{X}_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow a - (c+t) = P_x \tag{5.25}$$

dan

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(a\bar{X}_2 + \mathrm{b}\bar{\mathrm{Y}}_2 - P_x\bar{X}_2 - P_y\bar{Y}_2 - (c+t)\bar{X}_2 - (c+t)\bar{Y}_2}{\partial \bar{Y}_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow b - (c+t) = P_y \tag{5.26}$$

Optimasi masalah produsen:

$$\underset{P,P_x,P_y}{\text{Maks}}\ m\left(P_xX_1{}^* + P_yY_1{}^*\right) + n\left(P_xX_2{}^* + P_yY_2{}^*\right)$$

$$= m\Big(\big(a-(c+t)\big)X_1^* + (b-(c+t))Y_1^*\Big) + n\Big(\big(a-(c+t)\big)X_2^* + (b-(c+t))Y_2^*\Big)$$

$$= m(aX_1^* - (c+t)X_1^* + bY_1^* - (c+t)Y_1^*) + n(aX_2^* - (c+t)X_2^* + bY_2^* - (c+t)Y_2^*)$$

$$= m(aX_1^* + bY_1^* - (c+t)X_1^* - (c+t)Y_1^*) + n(aX_2^* + bY_2^* - (c+t)X_2^* - (c+t)Y_2^*)$$

Jika X_1, X_2, Y_1 dan Y_2 dibatasi, maka X_1^*, X_2^*, Y_1^* dan Y_2^* menjadi $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$, $\bar{Y}_1$, dan $\bar{Y}_2$. Dengan kata lain, P_x dan P_y menjadi $P_x = a - (c+t)$ dan $P_y = b - (c+t)$ dengan keuntungan maksimum yang diperoleh adalah :

$$m(a\bar{X}_1 + b\bar{Y}_1 - (c+t)\bar{X}_1 - (c+t)\bar{Y}_1) + n(a\bar{X}_2 + b\bar{Y}_2 - (c+t)\bar{X}_2 - (c+t)\bar{Y}_2)$$

Analisis ini disimpulkan dalam lemma berikut.

Lemma 8a : Jika ISP menggunakan skema pembiayaan *usage-based*, harga optimalnya adalah $P_x = a - (c+t)$ dan $P_y = b - (c+t)$ dengan keuntungan maksimum yang diperoleh adalah :

$m(a\bar{X}_1 + b\bar{Y}_1 - (c+t)\bar{X}_1 - (c+t)\bar{Y}_1) + n(a\bar{X}_2 + b\bar{Y}_2 - (c+t)\bar{X}_2 - (c+t)\bar{Y}_2)$.

Kasus 9a: Jika ISP memilih menggunakan skema pembiayaan *two-part tariff* maka ditetapkan $P_x > 0$, $P_y > 0$, dan $P > 0$. Untuk proses pengoptimalan pada optimasi masalah konsumen *high-demand* dan konsumen *low-demand* diperoleh hasil yang sama seperti Persamaan (5.23) sampai Persamaan (5.26). Jika Persamaan (5.23) sampai Persamaan (5.26) disubstitusikan ke Pertidaksamaan (5.16), diperoleh:

$a\bar{X}_i + b\bar{Y}_i - P_x\bar{X}_i - P_y\bar{Y}_i - P(1) - (c+t)\bar{X}_i - (c+t)\bar{Y}_i \geq 0$

$\Leftrightarrow a\bar{X}_i + b\bar{Y}_i - \big(a-(c+t)\big)\bar{X}_i - \big(b-(c+t)\big)\bar{Y}_i - P - (c+t)\bar{X}_i - (c+t)\bar{Y}_i \geq 0$

$\Leftrightarrow a\bar{X}_i + b\bar{Y}_i - a\bar{X}_i + (c+t)\bar{X}_i - b\bar{Y}_i + (c+t)\bar{Y}_i - P - (c+t)\bar{X}_i - (c+t)\bar{Y}_i \geq 0$

$\Leftrightarrow -P \geq 0$

$\Leftrightarrow P \leq 0$

Karena P tidak boleh negatif atau $P < 0$, P yang memenuhi adalah $P = 0$.

Optimasi Masalah Produsen menjadi :

$\text{Maks}_{P,P_x,P_y}\, m\big(P_xX_1^* + P_yY_1^* + P\big) + n\big(P_xX_2^* + P_yY_2^* + P\big)$

$= \text{Maks}_{P,P_x,P_y}\, m\Big(\big(a-(c+t)\big)X_1^* + (b-(c+t))Y_1^* + P\Big) + n\Big(\big(a-(c+t)\big)X_2^* + (b - (c+t))Y_2^* + P\Big)$

$= \text{Maks}_{P,P_x,P_y}\, m(aX_1^* - (c+t)X_1^* + bY_1^* - (c+t)Y_1^* + P) + n(aX_2^* - (c+t)X_2^* + bY_2^* - (c+t)Y_2^* + P)$

$= \text{Maks}_{P,P_x,P_y}\, m(aX_1^* + bY_1^* - (c+t)X_1^* - (c+t)Y_1^* + 0) + n(aX_2^* + bY_2^* - (c+t)X_2^* - (c+t)Y_2^* + 0)$

$= \text{Maks}_{P,P_x,P_y}\, m(aX_1^* + bY_1^* - (c+t)X_1^* - (c+t)Y_1^*) + n(aX_2^* + bY_2^* - (c+t)X_2^* - (c+t)Y_2^*)$

$= \text{Maks}_{P,P_x,P_y}\, m(aX_1^* + bY_1^* - (c+t)X_1^* - (c+t)Y_1^*) + n(aX_2^* + bY_2^* - (c+t)X_2^* - (c+t)Y_2^*)$

Jika X_1, X_2, Y_1 dan Y_2 dibatasi, maka X_1^*, X_2^*, Y_1^* dan Y_2^* menjadi $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$, $\bar{Y}_1$ dan $\bar{Y}_2$. Dengan kata lain, P_x dan P_y menjadi $P_x = a - (c+t)$, $P_y = b - (c+t)$, dan $P = 0$ dengan keuntungan maksimum yang diperoleh adalah:

$$m(a\bar{X}_1 + b\bar{Y}_1 - (c+t)\bar{X}_1 - (c+t)\bar{Y}_1) + n(a\bar{X}_2 + b\bar{Y}_2 - (c+t)\bar{X}_2 - (c+t)\bar{Y}_2)$$

Sehingga diperoleh lemma berikut.

Lemma 9a : Jika ISP menggunakan skema pembiayaan *two-part tariff*, harga optimalnya adalah $P_x = a - (c+t)$, $P_y = b - (c+t)$, dan $P = 0$ dengan keuntungan maksimum yang diperoleh adalah:

$m(a\bar{X}_1 + b\bar{Y}_1 - (c+t)\bar{X}_1 - (c+t)\bar{Y}_1) + n(a\bar{X}_2 + b\bar{Y}_2 - (c+t)\bar{X}_2 - (c+t)\bar{Y}_2)$.

Hasil analisis dari Lemma 7a, 8a, dan 9a disajikan dalam Tabel 5.3.

Tabel 5.3 Perbandingan Skema Pembiayaan untuk Konsumen Heterogen(*High-Demand* dan *Low-Demand*) Berdasarkan Fungsi Utilitas *Perfect Substitute* dengan Biaya Marjinal dan Biaya Pengawasan

Yang Dioptimalkan	Kasus 7.a (*Flat-Fee*)	Kasus 8.a (*Usage-Based*)	Kasus 9.a (*Two-Part Tariff*)
Harga yang Dikenakan pada Konsumen	$P = a\bar{X}_2 + b\bar{Y}_2 - (X + Y)c$	$P_x = a - (c + t)$ dan $P_y = b - (c + t)$	$P_x = a - (c + t)$ dan $P_y = b - (c + t)$
Keuntungan Maksimum	$(m + n)[a\bar{X}_2 + b\bar{Y}_2 - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)c]$	$m(a\bar{X}_1 + b\bar{Y}_1 - (c + t)\bar{X}_1 - (c + t)\bar{Y}_1) + n(a\bar{X}_2 + b\bar{Y}_2 - (c + t)\bar{X}_2 - (c + t)\bar{Y}_2)$	$m(a\bar{X}_1 + b\bar{Y}_1 - (c + t)\bar{X}_1 - (c + t)\bar{Y}_1) + n(a\bar{X}_2 + b\bar{Y}_2 - (c + t)\bar{X}_2 - (c + t)\bar{Y}_2)$

Berdasarkan hasil dari Tabel 5.3, dapat dilihat bahwa

$$m(a\bar{X}_1 + b\bar{Y}_1 - (c + t)\bar{X}_1 - (c + t)\bar{Y}_1) + n(a\bar{X}_2 + b\bar{Y}_2 - (c + t)\bar{X}_2 - (c + t)\bar{Y}_2) \geq (m + n)[a\bar{X}_2 + b\bar{Y}_2 - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)c]$$

ISP memperoleh keuntungan maksimum saat ISP memilih untuk menggunakan skema pembiayaan *usage-based* dan *two-part tariff* dibandingkan saat ISP memilih untuk menggunakan skema pembiayaan *flat-fee***.**

5.4 Kesimpulan

Keuntungan optimal untuk konsumen homogen dan konsumen heterogen *high-end* dan *low-end* terdapat pada skema pembiayaan *flat fee*, serta untuk konsumen heterogen *High-demand* dan *Low-demand* keuntungan yang optimal terdapat pada skema pembiayaan *usage based* dan *two-part tariff.*

BAB VI

FUNGSI UTILITAS *COBB-DOUGLAS*

Pada kasus ini digunakan fungsi utilitas berdasarkan *Cobb-Douglas:* $U(X\,,Y) = X^a Y^b$

Berikut ini analisis fungsi utilitas *Cobb-Douglas* untuk konsumen homogen dan konsumen heterogen berdasarkan 3 strategi pembiayaan dengan melibatkan Biaya Pengawasan (t) dan Biaya Marginal (c)

6.1 Fungsi Utilitas *Cobb-Douglas* pada Konsumen Homogen

Optimasi Masalah Konsumen :

$$\underset{X,Y,Z}{\text{maks}}\, X^a Y^b - P_X X - P_Y Y - PZ - (X+Y)c \tag{6.1}$$

dengan kendala :

$$X \leq \bar{X} Z \tag{6.2}$$

$$Y \leq \bar{Y} Z \tag{6.3}$$

$$X^a Y^b - P_X X - P_Y Y - PZ - (X+Y)c \geq 0 \tag{6.4}$$

$$Z = 0 \text{ atau } 1 \tag{6.5}$$

Optimasi Masalah Penyedia layanan (ISP) :

$$\underset{P,P_X,P_Y}{\text{maks}} \sum_i (P_X X^* + P_Y Y^* + PZ^*) \tag{6.6}$$

dengan (X*,Y*,Z*) = arg maks $X^a Y^b - P_X X - P_Y Y - PZ$ - $(X+Y)c$

dengan kendala :

$$X \leq \bar{X} Z$$

$$Y \leq \bar{Y} Z$$

$$X^a Y^b - P_X X - P_Y Y - PZ - (X+Y)c \geq 0$$

$$Z_i = 0 \text{ atau } 1$$

Berikut ini penentuan keuntungan maksimum pada setiap skema pembiayaan yang digunakan oleh penyedia layanan (ISP).

Kasus 1a. Jika penyedia layanan (ISP) menggunakan skema pembiayaan *flat-fee* maka ditetapkan $P_X = 0, P_Y = 0,\ P > 0$, artinya harga yang digunakan oleh penyedia layanan tidak berpengaruh pada jam sibuk ataupun jam tidak sibuk. Dengan demikian optimasi masalah konsumen menjadi :

$$\text{maks}_{X,Y,Z}\ X^a Y^b - P_X X - P_Y Y - PZ - (X+Y)\,\text{c}$$

$$= \underset{X,Y,Z}{\text{maks}}\ X^a Y^b - (0)X - (0)Y - P(1) - (X+Y)c$$

$$= \underset{X,Y,Z}{\text{maks}}\ X^a Y^b - P\ - (X+Y)c$$

Dengan menggunakan Kendala (6.4), diperoleh :

$$X^a Y^b - P_X X - P_Y Y - PZ - (X+Y)c \geq 0$$

$\Leftrightarrow\ X^aY^b - (0)X - (0)Y - P(1) - \ (X+Y)c \geq 0$

$\Leftrightarrow\ X^aY^b - P(1) - \ (X+Y)c \geq 0$

$\Leftrightarrow P \leq X^aY^b - \ (X+Y)c$

Masalah produsen menjadi :

$$\underset{P,P_X,P_Y}{\text{maks}} \sum_i (P_X X^* + P_Y Y^* + PZ^*) = \underset{P,P_X,P_Y}{\text{maks}} \sum_i \big((0)X^* + (0)Y^* + P(1)\big)$$

$$= \underset{P,P_X,P_Y}{\text{maks}} \sum_i \Big((0)X^* + (0)Y^* + X^aY^b - \ (X+Y)c\Big)$$

$$= \underset{P,P_X,P_Y}{\text{maks}} \sum_i [X^aY^b - \ (X+Y)c]$$

Untuk memaksimumkan persamaan (6.1), tingkat konsumsi konsumen menjadi $X = \bar{X}$ dan $Y = \bar{Y}$, sehingga konsumen bisa mendapatkan harga $\bar{X}^a\bar{Y}^b - (\bar{X} + \bar{Y})c$, dengan biaya yang dikenakan pada skema pembiayaan *flat fee* ini adalah $\bar{X}^a\bar{Y}^b - \ (\bar{X} + \bar{Y})c$ dan keuntungan maksimum yang diperoleh penyedia layanan (ISP) adalah

$$\sum_i \left[\bar{X}^a\bar{Y}^b - \ (\bar{X} + \bar{Y})c\right]$$

Berdasarkan kasus ini diperoleh :

Lemma 1a :

Jika penyedia layanan (ISP) menggunakan skema pembiayaan *flat-fee*, maka harga yang dikenakan kepada konsumen sebesar $\bar{X}^a\bar{Y}^b - \ (\bar{X} + \bar{Y})c$ dan keuntungan maksimum yang diperoleh produsen sebesar :

$$\sum_i \left[\bar{X}^a\bar{Y}^b - \ (\bar{X} + \bar{Y})c\right]$$

6.1.1 Untuk Skema Pembiayaan *usage-based* dan *two-part tariff*

Optimasi Masalah Konsumen :

$$\underset{X,Y,Z}{\text{maks}}\, X^aY^b - P_X X - P_Y Y - PZ - \ (c+t)\,X - (c+t)\,Y \quad (6.7)$$

dengan kendala :

$$X \leq \bar{X}Z \quad (6.8)$$

$$Y \leq \bar{Y}Z \quad (6.9)$$

$$X^aY^b - P_X X - P_Y Y - PZ - (c+t)\,X - (c+t)\,Y \geq 0 \quad (6.10)$$

$Z = 0$ atau 1 (6.11)

Optimasi Masalah Penyedia layanan (ISP) :

$$\underset{P,P_X,P_Y}{\text{maks}} \textstyle\sum_i (P_X X^* + P_Y Y^* + PZ^*) \quad (6.12)$$

dengan (X*,Y*,Z*) = arg maks $X^aY^b - P_X X - P_Y Y - P Z - (c + t) X - (c + t) Y$

dengan kendala :

$X \leq \bar{X}Z$

$Y \leq \bar{Y}Z$

$X^aY^b - P_XX - P_YY - PZ - (c + t) X - (c + t) Y \geq 0$

$Z_i = 0$ atau 1

Kasus 2a. Jika penyedia layanan (ISP) menggunakan harga *usage-based* dengan $P_X > 0, P_Y > 0$, $P = 0$, dan c & t = konstanta, maka penyedia layanan (ISP) memberikan harga berdasarkan jam sibuk dan jam tidak sibuk. Berdasarkan ketentuan diatas persamaan (6.7) menjadi :

$$\underset{X,Y,Z}{\text{maks}}\ X^aY^b - P_XX - P_YY - 0 \cdot Z - (c + t)X - (c + t)Y$$

$$= \underset{X,Y,Z}{\text{maks}}\ X^aY^b - P_XX - P_YY - (c + t)X - (c + t)Y \tag{6.13}$$

Untuk meminimumkan fungsi tersebut dengan menggunakan syarat perlu dan syarat cukup, persamaan (6.13) diferensialkan terhadap X dan Y :

(i) Syarat perlu :

$\frac{\partial(X^aY^b - P_XX - P_YY - (c+t)X - (c+t)Y)}{\partial X} = 0$, diperoleh :

$$a\,X^{a-1}Y^b - (c + t) = P_X \tag{6.14}$$

$$\Leftrightarrow\ X^{a-1} = \frac{P_X + (c + t)}{aY^b}$$

$$\Leftrightarrow\ \log X^{a-1} = \log \frac{P_X + (c + t)}{aY^b}$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)\log X = \log\left(\frac{P_X + (c + t)}{aY^b}\right)$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)^{-1}(a - 1)\log X = (a - 1)^{-1}\log\left(\frac{P_X + (c + t)}{aY^b}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log X = \log\left(\frac{P_X + (c + t)}{aY^b}\right)^{(a-1)^{-1}}$$

$$\Leftrightarrow \log X = \log\left(\frac{P_X + (c + t)}{aY^b}\right)^{\frac{1}{a-1}}$$

$$\Leftrightarrow X = \left(\frac{P_X + (c + t)}{aY^b}\right)^{\frac{1}{a-1}} \text{, diasumsikan bahwa } X = X^*$$

$$\Rightarrow X^* = \left(\frac{P_X + (c+t)}{aY^b}\right)^{\frac{1}{a-1}}$$

(ii) Syarat cukup :

$$\frac{\partial^2 (X^aY^b - P_XX - P_YY\,(\,c+t\,)\,X - (\,c+t\,)\,Y\,)}{\partial X^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial (a\,X^{a-1}Y^b - (c+t\,) - P_X)}{\partial X} = a\,(a-1)\,X^{a-2}Y^b > 0$$

artinya $P_X = a\,X^{a-1}Y^b - (\,c+t\,)$ merupakan harga minimum.

dan

(i) Syarat perlu :

$\frac{\partial (X^aY^b - P_XX - P_YY - (\,c+t\,)\,X - (\,c+t\,)\,Y\,)}{\partial Y} = 0$, diperoleh :

$$b\,X^aY^{b-1} - (\,c+t\,) = P_y \tag{6.15}$$

$$\Leftrightarrow \; Y^{b-1} = \frac{P_Y + (\,c+t\,)}{bX^a}$$

$$\Leftrightarrow \; \log Y^{b-1} = \log \frac{P_Y + (\,c+t\,)}{bX^a}$$

$$\Leftrightarrow (b-1)\log Y = \log\left(\frac{P_Y + (\,c+t\,)}{bX^a}\right)$$

$$\Leftrightarrow (b-1)^{-1}(b-1)\log Y = (b-1)^{-1}\log\left(\frac{P_Y + (\,c+t\,)}{bX^a}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log Y = \log\left(\frac{P_Y + (\,c+t\,)}{bX^a}\right)^{(b-1)^{-1}}$$

$$\Leftrightarrow \log Y = \log\left(\frac{P_Y + (\,c+t\,)}{bX^a}\right)^{\frac{1}{b-1}}$$

$$\Leftrightarrow Y = \left(\frac{P_Y + (\,c+t\,)}{bX^a}\right)^{\frac{1}{b-1}}, \text{ diasumsikan bahwa Y} = Y^*$$

$$\Rightarrow Y^* = \left(\frac{P_Y + (\,c+t\,)}{bX^a}\right)^{\frac{1}{b-1}}$$

(ii) Syarat cukup :

$$\frac{\partial^2 (X^aY^b - P_XX - P_YY)}{\partial Y^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial (b\,X^aY^{b-1} - (\,c+t\,) - P_Y)}{\partial Y} = b(b-1)\,X^aY^{b-2} > 0$$

artinya $P_Y = b\,X^aY^{b-1} - (\,c+t\,)$ merupakan harga minimum.

Optimasi masalah produsen menjadi :

$$\underset{P,P_X,P_Y}{\text{maks}} \sum\nolimits_i (P_XX^* + P_YY^*)$$

$$= \underset{P,P_X,P_Y}{\text{maks}} \sum_i \left[P_X \left(\frac{[P_X + (\,c+t\,)]^{\frac{1}{a-1}}}{a^{\left(\frac{1}{a-1}\right)}Y^{\left(\frac{b}{a-1}\right)}} \right) + P_Y \left(\frac{[P_Y + (\,c+t\,)]^{\left(\frac{1}{b-1}\right)}}{b^{\left(\frac{1}{b-1}\right)}X^{\left(\frac{a}{b-1}\right)}} \right) \right]$$

$$= \underset{P,P_X,P_Y}{\text{maks}} \sum_i \left[\left(a\, X^{a-1}Y^b - (c+t)\right)\left(\frac{\left(a\, X^{a-1}Y^b - (c+t) + (c+t)\right)^{\frac{1}{a-1}}}{a^{\left(\frac{1}{a-1}\right)} Y^{\left(\frac{b}{a-1}\right)}}\right) + \left(b\, X^a Y^{b-1} - (c+t)\right)\left(\frac{\left(b\, X^a Y^{b-1} - (c+t) + (c+t)\right)^{\left(\frac{1}{b-1}\right)}}{b^{\left(\frac{1}{b-1}\right)} X^{\left(\frac{a}{b-1}\right)}}\right)\right]$$

$$= \underset{P,P_X,P_Y}{\text{maks}} \sum_i \left[\left(a\, X^{a-1}Y^b - (c+t)\right)\left(\frac{\left(a\, X^{a-1}Y^b\right)^{\frac{1}{a-1}}}{a^{\left(\frac{1}{a-1}\right)} Y^{\left(\frac{b}{a-1}\right)}}\right) + \left(b\, X^a Y^{b-1} - (c+t)\right)\left(\frac{\left(b\, X^a Y^{b-1}\right)^{\left(\frac{1}{b-1}\right)}}{b^{\left(\frac{1}{b-1}\right)} X^{\left(\frac{a}{b-1}\right)}}\right)\right]$$

$$= \underset{P,P_X,P_Y}{\text{maks}} \sum_i \left[\left\{\frac{\left(a\, X^{a-1}Y^b\right)^{1+\frac{1}{a-1}} - (c+t)\left(a\, X^{a-1}Y^b\right)^{\frac{1}{a-1}}}{a^{\left(\frac{1}{a-1}\right)} Y^{\left(\frac{b}{a-1}\right)}}\right\} + \left\{\frac{\left(b\, X^a Y^{b-1}\right)^{1+\frac{1}{b-1}} - (c+t)\left(b\, X^a Y^{b-1}\right)^{\left(\frac{1}{b-1}\right)}}{b^{\left(\frac{1}{b-1}\right)} X^{\left(\frac{a}{b-1}\right)}}\right\}\right]$$

$$= \underset{P,P_X,P_Y}{\text{maks}} \sum_i \left[\left\{\frac{a^{\left(1+\frac{1}{a-1}\right)} X^a Y^b Y^{\left(\frac{b}{a-1}\right)} - (c+t) a^{\left(\frac{1}{a-1}\right)} X\, Y^{\left(\frac{b}{a-1}\right)}}{a^{\left(\frac{1}{a-1}\right)} Y^{\left(\frac{b}{a-1}\right)}}\right\} + \left\{\frac{b^{\left(1+\frac{1}{b-1}\right)} X^a X^{\left(\frac{a}{b-1}\right)} Y^b - (c+t) b^{\left(\frac{1}{b-1}\right)} X^{\left(\frac{a}{b-1}\right)} Y}{b^{\left(\frac{1}{b-1}\right)} X^{\left(\frac{a}{b-1}\right)}}\right\}\right]$$

$$= \underset{P,P_X,P_Y}{\text{maks}} \sum_i \left[\left\{a^{\left(1+\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a-1}\right)} X^a Y^b Y^{\left(\frac{b}{a-1}-\frac{b}{a-1}\right)} - (c+t)\, a^{\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a-1}\right)} X\, Y^{\left(\frac{b}{a-1}-\frac{b}{a-1}\right)}\right\} + \left\{b^{\left(1+\frac{1}{b-1}-\frac{1}{b-1}\right)} X^a X^{\left(\frac{a}{b-1}-\frac{a}{b-1}\right)} Y^b - (c+t) b^{\left(\frac{1}{b-1}-\frac{1}{b-1}\right)} X^{\left(\frac{a}{b-1}-\frac{a}{b-1}\right)} Y\right\}\right]$$

$$= \underset{P,P_X,P_Y}{\text{maks}} \sum_i [\{a\, X^a Y^b - (c+t)\, X\} + \{b\, X^a Y^b - (c+t)Y\}]$$

$$= \underset{P,P_X,P_Y}{\text{maks}} \sum_i \{(a+b)[X^a Y^b] - (c+t)\, X - (c+t)Y\}$$

Artinya jika penyedia layanan (ISP) ingin memaksimalkan keuntungan, maka P_X dan P_Y harus minimum. Karena $X \le \bar{X}$ dan $Y \le \bar{Y}$, maka $X = \bar{X}$ dan $Y = \bar{Y}$.

P_X dan P_Y optimal menjadi $P_X = a\bar{X}^{a-1}\bar{Y}^b - (c+t)$ dan $P_Y = b\,\bar{X}^a\bar{Y}^{b-1} - (c+t)$ dengan keuntungan maksimum yang diperoleh sebesar :

$$\sum_i \{(a+b)\left[\bar{X}^a\bar{Y}^b\right] - (c+t)\,\bar{X} - (c+t)\,\bar{Y}\}$$

Berdasarkan kasus ini diperoleh :

Lemma 2a :

Jika penyedia layanan (ISP) menggunakan *usage-based*, maka harga yang optimal menjadi $P_X = a\overline{X}^{a-1}\overline{Y}^{b} - (c+t)$ dan $P_Y = b\overline{X}^{a}\overline{Y}^{b-1} - (c+t)$ dengan keuntungan maksimum yang diperoleh sebesar :

$$\sum_i \{(a+b)\left[\overline{X}^{a}\overline{Y}^{b}\right] - (c+t)\,\overline{X} - (c+t)\,\overline{Y}\}$$

Kasus 3a. Penyedia layanan (ISP) menggunakan harga *two-part tariff* dengan menetapkan $P_X > 0, P_Y > 0$ dan $P > 0$. Jika Persamaan (6.14) dan (6.15), disubstitusikan ke Pertidaksamaan (6.10) yang merupakan kendala pada optimasi masalah konsumen, maka kendala tersebut menjadi :

$$X^aY^b - P_XX - P_YY - PZ - (c+t)\,X - (c+t)\,Y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow\ X^aY^b - \left(aX^{a-1}Y^b - (c+t)\right)X - \left(b\,X^aY^{b-1} - (c+t)\right)Y - P - (c+t)\,X - (c+t)\,Y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow\ X^aY^b - aX^aY^b + (c+t)X - bX^aY^b + (c+t)Y - P - (c+t)\,X - (c+t)\,Y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow\ P \leq X^aY^b - aX^aY^b - bX^aY^b$$

Dengan demikian masalah produsen menjadi :

$$\underset{P,P_X,P_Y}{\text{maks}} \sum_i (P_XX^* + P_YY^* + PZ^*)$$

$$= \underset{P,P_X,P_Y}{\text{maks}} \sum_i \left[P_X\left(\frac{[P_X + (c+t)]^{\frac{1}{a-1}}}{a^{\left(\frac{1}{a-1}\right)}Y^{\left(\frac{b}{a-1}\right)}}\right) + P_Y\left(\frac{[P_Y + (c+t)]^{\left(\frac{1}{b-1}\right)}}{b^{\left(\frac{1}{b-1}\right)}X^{\left(\frac{a}{b-1}\right)}}\right) + \left(X^aY^b - aX^aY^b - bX^aY^b\right)\right]$$

$$= \underset{P,P_X,P_Y}{\text{maks}} \sum_i \left[\left[\left(a\,X^{a-1}Y^b - (c+t)\right)\left(\frac{\left(a\,X^{a-1}Y^b - (c+t) + (c+t)\right)^{\frac{1}{a-1}}}{a^{\left(\frac{1}{a-1}\right)}Y^{\left(\frac{b}{a-1}\right)}}\right) + \left(b\,X^aY^{b-1} - (c+t)\right)\left(\frac{(b\,X^aY^{b-1} - (c+t) + (c+t))^{\left(\frac{1}{b-1}\right)}}{b^{\left(\frac{1}{b-1}\right)}X^{\left(\frac{a}{b-1}\right)}}\right)\right] + \left(X^aY^b - aX^aY^b - bX^aY^b\right)\right]$$

$$= \underset{P,P_X,P_Y}{\text{maks}} \sum_i \left[\left\{\frac{\left(a\,X^{a-1}Y^b\right)^{1+\frac{1}{a-1}} - (c+t)\,(a\,X^{a-1}Y^b)^{\frac{1}{a-1}}}{a^{\left(\frac{1}{a-1}\right)}Y^{\left(\frac{b}{a-1}\right)}}\right\} + \left\{\frac{\left(b\,X^aY^{b-1}\right)^{1+\frac{1}{b-1}} - (c+t)(b\,X^aY^{b-1})^{\left(\frac{1}{b-1}\right)}}{b^{\left(\frac{1}{b-1}\right)}X^{\left(\frac{a}{b-1}\right)}}\right\} + \left(X^aY^b - aX^aY^b - bX^aY^b\right)\right]$$

$$= \underset{P,P_X,P_Y}{\text{maks}} \sum_i \left[\left\{ \frac{a^{\left(1+\frac{1}{a-1}\right)} X^a Y^b Y^{\left(\frac{b}{a-1}\right)} - (c+t) a^{\left(\frac{1}{a-1}\right)} X\, Y^{\left(\frac{b}{a-1}\right)}}{a^{\left(\frac{1}{a-1}\right)} Y^{\left(\frac{b}{a-1}\right)}} \right\} + \left\{ \frac{b^{\left(1+\frac{1}{b-1}\right)} X^a X^{\left(\frac{a}{b-1}\right)} Y^{b} - (c+t) b^{\left(\frac{1}{b-1}\right)} X^{\left(\frac{a}{b-1}\right)} Y}{b^{\left(\frac{1}{b-1}\right)} X^{\left(\frac{a}{b-1}\right)}} \right\} + \left(X^a Y^b - a X^a Y^b - b X^a Y^b \right) \right]$$

$$= \underset{P,P_X,P_Y}{\text{maks}} \sum_i \left[\left\{ a^{\left(1+\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a-1}\right)} X^a Y^b Y^{\left(\frac{b}{a-1}-\frac{b}{a-1}\right)} - (c+t)\, a^{\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a-1}\right)} X\, Y^{\left(\frac{b}{a-1}-\frac{b}{a-1}\right)} \right\} + \left\{ b^{\left(1+\frac{1}{b-1}-\frac{1}{b-1}\right)} X^a X^{\left(\frac{a}{b-1}-\frac{a}{b-1}\right)} Y^b - (c+t) b^{\left(\frac{1}{b-1}-\frac{1}{b-1}\right)} X^{\left(\frac{a}{b-1}-\frac{a}{b-1}\right)} Y \right\} + \left(X^a Y^b - a X^a Y^b - b X^a Y^b \right) \right]$$

$$= \underset{P,P_X,P_Y}{\text{maks}} \sum_i \left[\{ a\, X^a Y^b - (c+t) X \} + \{ b\, X^a Y^b - (c+t) Y \} + \left(X^a Y^b - a X^a Y^b - b X^a Y^b \right) \right]$$

$$= \underset{P,P_X,P_Y}{\text{maks}} \sum_i \left[X^a Y^b - (c+t) X - (c+t) Y \right]$$

Jika P_X dan P_Y menurun, maka X^* dan Y^* meningkat. Apabila $X \leq \bar{X}$ dan $Y \leq \bar{Y}$, maka $X^* = \bar{X}$ dan $Y^* = \bar{Y}$. Dengan kata lain, P_X dan P_Y yang optimal menjadi $P_X = a\,\bar{X}^{a-1}\bar{Y}^b - (c+t)$, $P_Y = b\,\bar{X}^a\bar{Y}^{b-1} - (c+t)$ dan $P = \bar{X}^a\bar{Y}^b - a\,\bar{X}^a\bar{Y}^b - b\bar{X}^a\bar{Y}^b$ dengan keuntungan maksimum yang diperoleh sebesar :

$$\sum_i \left[\bar{X}^a\bar{Y}^b - (c+t)\,\bar{X} - (c+t)\,\bar{Y} \right]$$

Berdasarkan kasus ini diperoleh :

Lemma 3a :

Jika penyedia layanan (ISP) menggunakan harga *two-part tariff*, maka P_X dan P_Y yang terbaik menjadi $P_X = a\,\bar{X}^{a-1}\bar{Y}^b - (c+t)$, $P_Y = b\,\bar{X}^a\bar{Y}^{b-1} - (c+t)$ dan biaya tetap sebesar $(a+b)\bar{X}^a\bar{Y}^b$ dengan keuntungan maksimum yang diperoleh sebesar :

$$\sum_i \left[\bar{X}^a\bar{Y}^b - (c+t)\,\bar{X} - (c+t)\,\bar{Y} \right]$$

Hasil analisis dari Lemma 1a, 2a, dan 3a disajikan dalam Tabel 6.1.

Tabel 6.1 Perbandingan skema pembiayaan untuk konsumen homogen berdasarkan fungsi utilitas *Cobb-Douglas*

	Lemma 1.a (*Flat-Fee*)	Lemma 2.a (*Usage-Based*)	Lemma 3.a (*Two-Part Tariff*)
Harga yang dikenakan pada konsumen	$\overline{X}^a\overline{Y}^b$	$P_x = a\,\overline{X}^{a-1}\overline{Y}^b - (c+t)$ dan $P_y = b\,\overline{X}^a\overline{Y}^{b-1} - (c+t)$	$P_x = a\,\overline{X}^{a-1}\overline{Y}^b - (c+t)$ dan $P_y = b\,\overline{X}^a\overline{Y}^{b-1} - (c+t)$
Keuntungan Maksimum	$\sum_i \left[\overline{X}^a\overline{Y}^b - (\overline{X}+\overline{Y})c\right]$	$\sum_i \{(a+b)\left[\overline{X}^a\overline{Y}^b\right] - (c+t)\,\overline{X} - (c+t)\,\overline{Y}\}$	$\sum_i \left[\overline{X}^a\overline{Y}^b - (c+t)\,\overline{X} - (c+t)\,\overline{Y}\right]$

Berdasarkan Tabel 6.1, jika diasumsikan $a\overline{X}^a\overline{Y}^b > \overline{X}^a\overline{Y}^b$ dan $b\overline{X}^a\overline{Y}^b > \overline{X}^a\overline{Y}^b$, maka $(a+b)\left[\overline{X}^a\overline{Y}^b\right] > \left[\overline{X}^a\overline{Y}^b\right]$; $a, b > 0$. Keuntungan maksimum yang diperoleh penyedia layanan (ISP) adalah saat ISP menggunakan skema pembiayaan *usage-based*.

6.2 Fungsi Utilitas *Cobb-Douglas* pada Konsumen Heterogen Golongan Atas (*High-end*) dan Golongan Bawah (*Low-end*)

Misalkan terdapat *m* konsumen golongan atas (tipe 1) dan *n* konsumen golongan bawah (tipe 2). Untuk mempelajari bagaimana kesediaan untuk membayar mempengaruhi skema harga penyedia layanan (ISP), diasumsikan setiap konsumen di kedua bagian memiliki batas atas *X* yang sama di jam sibuk dan *Y* di jam tidak sibuk, $a_1 > a_2$ dan $b_1 > b_2$.

Optimasi Masalah Konsumen :

$$\underset{X_i, Y_i, Z_i}{\text{maks}}\; {X_i}^{a_i}{Y_i}^{b_i} - P_X X_i - P_Y Y_i - PZ_i - (X_i + Y_i)\,c \qquad (6.16)$$

dengan kendala :

$$X_i \leq \overline{X}\,Z_i \qquad (6.17)$$

$$Y_i \leq \overline{Y}\,Z_i \qquad (6.18)$$

$${X_i}^{a_i}{Y_i}^{b_i} - P_X X_i - P_Y Y_i - PZ_i - (X_i + Y_i)\,c \geq 0 \qquad (6.19)$$

$$Z_i = 0 \text{ atau } 1 \qquad (6.20)$$

Optimasi Masalah Produsen :

$$\underset{P,P_X,P_Y}{\text{maks}}\ m(P_X X_1{}^* + P_Y Y_1{}^* + PZ_1{}^*) + n\,(P_X X_2{}^* + P_Y Y_2{}^* + PZ_2{}^*) \tag{6.21}$$

dengan $(X_i{}^*,\ Y_i{}^*, Z_i{}^*) =$ arg maks $X_i{}^{a_i} Y_i{}^{b_i} - P_X X_i - P_Y Y_i - PZ_i - (X_i + Y_i)\,c$

dengan kendala :

$X_i \leq \bar{X}\, Z_i$

$Y_i \leq \bar{Y}\, Z_i$

$X_i{}^{a_i} Y_i{}^{b_i} - P_X X_i - P_Y Y_i - PZ_i - (X_i + Y_i)\,c \geq 0$

$Z_i = 0$ atau 1

Berikut ini dibahas penentuan keuntungan maksimum pada setiap skema pembiayaan yang digunakan penyedia layanan (ISP).

Kasus 4a. Jika penyedia layanan (ISP) menggunakan harga *flat fee* dengan menetapkan $P_X = 0, P_Y = 0$ dan $P > 0$, artinya harga yang digunakan oleh penyedia layanan (ISP) tidak berpengaruh pada waktu penggunaan (jam sibuk atau jam tidak sibuk), maka konsumen memilih tingkat konsumsi maksimum $X_1 = \bar{X},\ X_2 = \bar{X},\ Y_1 = \bar{Y}$, dan $Y_2 = \bar{Y}$. Dari persamaan (4.16) setiap konsumen golongan atas dikenakan biaya $P \leq \bar{X}^{a_1}\,\bar{Y}^{b_1} - (\bar{X} + \bar{Y})\,c$ dan konsumen golongan bawah $P \leq \bar{X}^{a_2}\,\bar{Y}^{b_2} - (\bar{X} + \bar{Y})\,c$. Kasus 4a merupakan skema pembiayaan *flat-fee* sehingga P atau harganya disetarakan untuk kedua jenis konsumen heterogen. Jika ditetapkan $a_1 > a_2$ maka untuk ketetapan biaya golongan atas mengikuti harga bagi biaya golongan bawah.

$$a_1 > a_2 \;\Leftrightarrow\; \bar{X}^{a_1} > \bar{X}^{a_2}$$

$$b_1 > b_2 \;\Leftrightarrow\; \bar{X}^{b_1} > \bar{X}^{b_2}$$

Diasumsikan bahwa $(m)\bar{X}^{a_1}\,\bar{Y}^{b_1} < (m+n)\bar{X}^{a_2}\,\bar{Y}^{b_2}$. Artinya, jika $P = \bar{X}^{a_1}\,\bar{Y}^{b_1} - (\bar{X} + \bar{Y})\,c$, maka hanya konsumen golongan atas yang dapat mengikuti layanan ini. Jika $P = \bar{X}^{a_2}\bar{Y}^{b_2} - (\bar{X} + \bar{Y})\,c$, maka kedua jenis konsumen tersebut dapat mengikuti layanan ini, yaitu konsumen golongan atas dan konsumen golongan bawah. Dengan demikian untuk memaksimumkan keuntungan, penyedia layanan (ISP) mengenakan biaya $P = \bar{X}^{a_2}\bar{Y}^{b_2} - (\bar{X} + \bar{Y})\,c$.

Dalam hal ini untuk optimasi masalah penyedia layanan (ISP) :

$$\underset{P}{\text{maks}}\ m(\,PZ_1{}^*) + n\,(PZ_2{}^*) = m\left(\bar{X}^{a_2}\,\bar{Y}^{b_2} - (\bar{X} + \bar{Y})\,c\right) + n\left(\bar{X}^{a_2}\,\bar{Y}^{b_2} - (\bar{X} + \bar{Y})\,c\right)$$

$$= (m+n)\left(\bar{X}^{a_2}\,\bar{Y}^{b_2} - (\bar{X} + \bar{Y})\,c\right)$$

Keuntungan maksimum yang diperoleh produsen adalah sebesar :

$$(m+n)\left(\bar{X}^{a_2}\,\bar{Y}^{b_2} - (\bar{X} + \bar{Y})\,c\right)$$

m adalah banyaknya konsumen golongan atas dan *n* adalah banyaknya konsumen golongan bawah.

Berdasarkan kasus ini diperoleh :

Lemma 4a :

Jika penyedia layanan menggunakan biaya *flat-fee*, maka harga yang dikenakan adalah $\bar{X}^{a_2}\,\bar{Y}^{b_2} - (\bar{X} + \bar{Y})\,c$ dengan keuntungan maksimum yang diperoleh sebesar :

$$(m+n)\left[\overline{X}^{a_2}\,\overline{Y}^{b_2} - (\overline{X}+\overline{Y})\,c\right].$$

6.2.1 Untuk skema pembiayaan *usage-based* dan *two-part tariff*

Optimasi Masalah Konsumen :

$$\underset{X_i,Y_i,Z_i}{\text{maks}}\; X_i^{a_i} Y_i^{b_i} - P_X X_i - P_Y Y_i - P Z_i - (c+t)\,X_i - (c+t)\,Y_i \tag{6.22}$$

dengan kendala :

$$X_i \le \bar{X}\, Z_i \tag{6.23}$$

$$Y_i \le \bar{Y}\, Z_i \tag{6.24}$$

$$X_i^{a_i} Y_i^{b_i} - P_X X_i - P_Y Y_i - P Z_i - (c+t)\,X_i - (c+t)\,Y_i \ge 0 \tag{6.25}$$

$Z_i = 0\ atau\ 1$(6.26)

Optimasi Masalah Produsen :

$$\underset{P,P_X,P_Y}{\text{maks}}\; m(P_X \mathrm{X}_1^* + P_Y \mathrm{Y}_1^* + P\mathrm{Z}_1^*) + n\,(P_X \mathrm{X}_2^* + P_Y \mathrm{Y}_2^* + P\mathrm{Z}_2^*) \tag{6.27}$$

dengan $(X_i^*,\ Y_i^*, Z_i^*) = \arg\ \text{maks}\, X_i^{a_i} Y_i^{b_i} - P_X X_i - P_Y Y_i - P Z_i - (c+t)\,X_i - (c+t)\,Y_i$

dengan kendala :

$$X_i \le \bar{X}\, Z_i$$

$$Y_i \le \bar{Y}\, Z_i$$

$$X_i^{a_i} Y_i^{b_i} - P_X X_i - P_Y Y_i - P Z_i - (c+t)\,X_i - (c+t)\,Y_i \ge 0$$

$Z_i = 0$ atau 1

Kasus 5a. Jika penyedia layanan (ISP) menggunakan harga *usage-based* dengan menetapkan $P_X > 0, P_Y > 0$ dan $P = 0$, artinya penyedia layanan (ISP) memberikan harga yang dibedakan, yaitu harga pada saat jam sibuk dan tidak sibuk :

Optimasi masalah konsumen heterogen golongan atas :

$$\underset{X_1,Y_1,Z_1}{\text{maks}}\; X_1^{a_1} Y_1^{b_1} - P_X X_1 - P_Y Y_1 - (c+t)\,X_1 - (c+t)\,Y_1 \tag{6.28}$$

Untuk mengoptimalkan fungsi tersebut dengan menggunakan syarat perlu dan syarat cukup, persamaan (6.28) diferensialkan terhadap X_1 dan Y_1 :

(i) Syarat perlu

$$\frac{\partial\left(X_1^{a_1} Y_1^{b_1} - P_X X_1 - P_Y Y_1 - (c+t)\,X_1 - (c+t)\,Y_1\right)}{\partial X_1} = 0$$

Dari hasil diferensial diperoleh :

$$a_1\, X_1^{a_1-1} Y_1^{b_1} - (c+t) = P_X$$

(6.29)

$$\Leftrightarrow \; {X_1}^{a_1-1} = \frac{P_X + (c+t)}{a_1 {Y_1}^{b_1}}$$

Dengan cara yang sama pada persamaan (6.14), diperoleh :

$$\Leftrightarrow {X_1}^* = \left(\frac{P_X + (c+t)}{a_1 {Y_1}^{b_1}}\right)^{\frac{1}{a_1-1}}$$

(ii) Syarat cukup

$$\frac{\partial^2({X_1}^{a_1}{Y_1}^{b_1} - P_X X_1 - P_Y Y_1 - (c+t)X_1 - (c+t)Y_1)}{\partial {X_1}^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(a_1 \, {X_1}^{a_1-1}{Y_1}^{b_1} - (c+t) - P_X)}{\partial X_1} = a_1(a_1 - 1){X_1}^{a_1-2}{Y_1}^{b_1} > 0$$

Artinya, $P_X = a_1 \, {X_1}^{a_1-1}{Y_1}^{b_1} - (c+t)$ merupakan harga minimum.

dan

(i) Syarat perlu

$$\frac{\partial({X_1}^{a_1}{Y_1}^{b_1} - P_X X_1 - P_Y Y_{1-(c+t)X_1-(c+t)Y_1})}{\partial Y_1} = 0$$

Dari hasil diferensial diperoleh :

$$b_1 X_1^{a_1} \, {Y_1}^{b_1-1} - (c+t) = P_Y \tag{6.30}$$

$$\Leftrightarrow \; {Y_1}^{b_1-1} = \frac{P_Y + (c+t)}{b_1 {X_1}^{a_1}}$$

Dengan cara yang sama pada persamaan (6.15), diperoleh :

$$\Leftrightarrow {Y_1}^* = \left(\frac{P_Y + (c+t)}{b_1 {X_1}^{a_1}}\right)^{\frac{1}{b_1-1}}$$

(ii) Syarat cukup

$$\frac{\partial^2({X_1}^{a_1}{Y_1}^{b_1} - P_X X_1 - P_Y Y_1)}{\partial {Y_1}^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(b_1 {X_1}^{a_1}{Y_1}^{b_1-1} - (c+t) - P_Y)}{\partial Y_1} = b_1(b_1 - 1){X_1}^{a_1}{Y_1}^{b_1-2} > 0$$

Artinya $P_Y = b_1 {X_1}^{a_1} \, {Y_1}^{b_1-1} - (c+t)$ merupakan harga minimum.

Optimasi masalah konsumen heterogen golongan bawah :

$$\underset{X_2, Y_2, Z_2}{\text{maks}} \; {X_2}^{a_2}{Y_2}^{b_2} - P_x X_2 - P_y Y_2 - (c+t)X_2 - (c+t)Y_2 \tag{6.31}$$

Untuk mengoptimalkan fungsi tersebut dengan menggunakan syarat perlu dan syarat cukup, persamaan (4.31) diferensialkan terhadap X_2 dan Y_2 :

(i) Syarat perlu

$$\frac{\partial({X_2}^{a_2}{Y_2}^{b_2} - P_X X_2 - P_Y Y_2 - (c+t)X_2 - (c+t)Y_2)}{\partial X_2} = 0$$

Dari hasil diferensial diperoleh :

$$a_2 {X_2}^{a_2-1}{Y_2}^{b_2} - (c+t) = P_X \tag{6.32}$$

$$\Leftrightarrow \; {X_2}^{a_2-1} = \frac{P_X + (c+t)}{a_2 {Y_2}^{b_2}}$$

Dengan cara yang sama pada persamaan (6.14), diperoleh :

$$\Leftrightarrow X_2^{\,*} = \left(\frac{P_X + (c+t)}{a_2 Y_2^{\,b_2}}\right)^{\frac{1}{a_2-1}}$$

(ii) Syarat cukup

$$\frac{\partial^2 (X_2^{\,a_2} Y_2^{\,b_2} - P_X X_2 - P_Y Y_2 - (c+t))}{\partial X_2^{\,2}} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(\, a_2 X_2^{\,a_2-1} Y_2^{\,b_2} - (c+t) - P_X\,)}{\partial X_2} = a_2\,(a_2-1) X_2^{\,a_2-2} Y_2^{\,b_2} > 0$$

Artinya, $P_X = a_2 X_2^{\,a_2-1} Y_2^{\,b_2} - (c+t)$ merupakan harga minimum.

dan

(i) Syarat perlu

$$\frac{\partial (X_2^{\,a_2} Y_2^{\,b_2} - P_X X_2 - P_Y Y_2 - (c+t) X_2 - (c+t) Y_2)}{\partial Y_2} = 0$$

Dari hasil diferensial diperoleh :

$$b_2 X_2^{\,a_2} Y_2^{\,b_2-1} - (c+t) = P_Y \tag{6.33}$$

$$\Leftrightarrow Y_2^{\,b_2-1} = \frac{P_Y + (c+t)}{b_2 X_2^{\,a_2}}$$

Dengan cara yang sama pada persamaan (6.15), diperoleh :

$$\Leftrightarrow Y_2^{\,*} = \left(\frac{P_Y + (c+t)}{b_2 X_2^{\,a_2}}\right)^{\frac{1}{b_2-1}}$$

(ii) Syarat cukup

$$\frac{\partial^2 \left(X_2^{\,a_2} Y_2^{\,b_2} - P_X X_2 - P_Y Y_2 - (c+t) X_2 - (c+t) Y_2\right)}{\partial Y_2^{\,2}} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial\left(\, b_2 X_2^{\,a_2} Y_2^{\,b_2-1} - (c+t) - P_Y\right)}{\partial Y_2} = b_2\,(b_2-1) X_2^{\,a_2} Y_2^{\,b_2-2} > 0$$

Artinya $P_Y = b_2 X_2^{\,a_2} Y_2^{\,b_2-1} - (c+t)$ merupakan harga minimum.

Analisis ini diterapkan pada masalah saat jam sibuk dan saat jam tidak sibuk.

(i) Masalah pada saat jam sibuk :
Penyedia harus meminimalkan P_X; $P_X \le a_1 X_1^{\,a_1-1} Y_1^{\,b_1} - (c+t)$ untuk memaksimalkan fungsi (6.28). Di sisi lain, jika penyedia menetapkan harga $P_X \le a_2 X_2^{\,a_2-1} Y_2^{\,b_2} - (c+t)$ maka keuntungan tidak optimal apabila $X_1 \le \overline{X}$ atau $X_2 \le \overline{X}$. Oleh karena itu, harga P_X yang terbaik adalah $a_2 X_2^{\,a_2-1} Y_2^{\,b_2} - (c+t) \le P_X \le a_1 X_1^{\,a_1-1} Y_1^{\,b_1} - (c+t)$.

(ii) Masalah jam tidak sibuk :
Penyedia harus meminimalkan P_Y; $P_Y \le b_1 Y_1^{\,b_1-1} X_1^{\,a_1} - (c+t)$, untuk memaksimalkan fungsi (6.28). Di sisi lain, jika penyedia menetapkan $P_Y \le b_2 X_2^{\,a_2} Y_2^{\,b_2-1} - (c+t)$ maka keuntungan tidak optimal apabila $Y_1 \le \overline{Y}$ atau $Y_2 \le \overline{Y}$. Oleh karena itu, harga P_Y yang terbaik adalah $b_2 X_2^{\,a_2} Y_2^{\,b_2-1} - (c+t) \le P_Y \le b_1 Y_1^{\,b_1-1} X_1^{\,a_1} - (c+t)$.

Ketika harga di interval $a_2 X_2^{\,a_2-1} Y_2^{\,b_2} - (c+t) \le P_X \le a_1 X_1^{\,a_1-1} Y_1^{\,b_1} - (c+t)$ dan $b_2 X_2^{\,a_2} Y_2^{\,b_2-1} - (c+t) \le P_Y \le b_1 Y_1^{\,b_1-1} X_1^{\,a_1} - (c+t)$, permintaan dari konsumen golongan atas tetap pada $\overline{X}$ dan $\overline{Y}$, sementara permintaan dari konsumen golongan bawah terus meningkat karena harga turun. Dengan demikian kedua konsumen (konsumen golongan atas dan golongan bawah) dapat mengikuti

layanan ini dengan harga optimal diberikan untuk jam sibuk adalah $P_X = a_2 X_2{}^{a_2-1} Y_2{}^{b_2} - (c+t)$ dan harga optimal di jam tidak sibuk adalah $P_Y = b_2 X_2{}^{a_2} Y_2{}^{b_2-1} - (c+t)$.

Optimasi masalah produsen :

$$\underset{P_X,P_Y}{\text{maks}}\, m(P_X \mathrm{X}_1{}^* + P_Y \mathrm{Y}_1{}^*) + n\,(P_X \mathrm{X}_2{}^* + P_Y \mathrm{Y}_2{}^*)$$

$$= \underset{P_X,P_Y}{\text{maks}}\,(m+n)\left[P_X\left(\frac{[P_X + (c+t)]^{\frac{1}{a_2-1}}}{a_2{}^{\left(\frac{1}{a_2-1}\right)} Y_2{}^{\left(\frac{b_2}{a_2-1}\right)}}\right) + P_Y\left(\frac{[P_Y + (c+t)]^{\left(\frac{1}{b_2-1}\right)}}{b_2{}^{\left(\frac{1}{b_2-1}\right)} X_2{}^{\left(\frac{a_2}{b_2-1}\right)}}\right)\right]$$

$$= \underset{P_X,P_Y}{\text{maks}}\,(m+n)\left[\left(a_2 X_2{}^{a_2-1} Y_2{}^{b_2} - (c+t)\right)\left(\frac{\left(a_2 X_2{}^{a_2-1} Y_2{}^{b_2} - (c+t) + (c+t)\right)^{\frac{1}{a_2-1}}}{a_2{}^{\left(\frac{1}{a_2-1}\right)} Y_2{}^{\left(\frac{b_2}{a_2-1}\right)}}\right)\right.$$
$$\left. + \left(b_2 X_2{}^{a_2} Y_2{}^{b_2-1} - (c+t)\right)\left(\frac{\left(b_2 X_2{}^{a_2} Y_2{}^{b_2-1} - (c+t) + (c+t)\right)^{\frac{1}{b_2-1}}}{b_2{}^{\left(\frac{1}{b_2-1}\right)} X_2{}^{\left(\frac{a_2}{b_2-1}\right)}}\right)\right]$$

$$= \underset{P_X,P_Y}{\text{maks}}\,(m+n)\left[(a_2 X_2{}^{a_2-1} Y_2{}^{b_2} - (c+t))\left(\frac{(a_2 X_2{}^{a_2-1} Y_2{}^{b_2})^{\frac{1}{a_2-1}}}{a_2{}^{\left(\frac{1}{a_2-1}\right)} Y_2{}^{\left(\frac{b_2}{a_2-1}\right)}}\right) + (b_2 X_2{}^{a_2} Y_2{}^{b_2-1} - (c+t))\left(\frac{(b_2 X_2{}^{a_2} Y_2{}^{b_2-1})^{\frac{1}{b_2-1}}}{b_2{}^{\left(\frac{1}{b_2-1}\right)} X_2{}^{\left(\frac{a_2}{b_2-1}\right)}}\right)\right]$$

$$= \underset{P_X,P_Y}{\text{maks}}\,(m+n)\left[\left\{\frac{(a_2 X_2{}^{a_2-1} Y_2{}^{b_2})^{1+\frac{1}{a_2-1}} - (c+t)(a_2 X_2{}^{a_2-1} Y_2{}^{b_2})^{\frac{1}{a_2-1}}}{a_2{}^{\left(\frac{1}{a_2-1}\right)} Y_2{}^{\left(\frac{b_2}{a_2-1}\right)}}\right\} + \left\{\frac{(b_2 X_2{}^{a_2} Y_2{}^{b_2-1})^{1+\frac{1}{b_2-1}} - (c+t)(b_2 X_2{}^{a_2} Y_2{}^{b_2-1})^{\left(\frac{1}{b_2-1}\right)}}{b_2{}^{\left(\frac{1}{b_2-1}\right)} X_2{}^{\left(\frac{a_2}{b_2-1}\right)}}\right\}\right]$$

$$= \underset{P_X,P_Y}{\text{maks}}\,(m+n)\left[\left\{\frac{a_2{}^{\left(1+\frac{1}{a_2-1}\right)} X_2{}^{a_2} Y_2{}^{b_2} Y_2{}^{\left(\frac{b_2}{a_2-1}\right)} - (c+t)\, a_2{}^{\left(\frac{1}{a_2-1}\right)} X_2\, Y_2{}^{\left(\frac{b_2}{a_2-1}\right)}}{a_2{}^{\left(\frac{1}{a_2-1}\right)} Y_2{}^{\left(\frac{b_2}{a_2-1}\right)}}\right\} + \left\{\frac{b_2{}^{\left(1+\frac{1}{b_2-1}\right)} X_2{}^{a_2} X_2{}^{\left(\frac{a_2}{b_2-1}\right)} Y_2{}^{b_2} - (c+t)\, b_2{}^{\left(\frac{1}{b_2-1}\right)} X_2{}^{\left(\frac{a_2}{b_2-1}\right)} Y_2}{b_2{}^{\left(\frac{1}{b_2-1}\right)} X_2{}^{\left(\frac{a_2}{b_2-1}\right)}}\right\}\right]$$

$$= \max_{P_X,P_Y} (m+n)\left[\left\{a_2^{\left(1+\frac{1}{a_2-1}-\frac{1}{a_2-1}\right)} X_2{}^{a_2} Y_2{}^{b_2} Y_2^{\left(\frac{b_2}{a_2-1}-\frac{b_2}{a_2-1}\right)} - (c+t)\, a_2^{\left(\frac{1}{a_2-1}-\frac{1}{a_2-1}\right)} X_2\, Y_2^{\left(\frac{b_2}{a_2-1}-\frac{b_2}{a_2-1}\right)}\right\} + \left\{b_2^{\left(1+\frac{1}{b_2-1}-\frac{1}{b_2-1}\right)} X_2{}^{a} X_2^{\left(\frac{a_2}{b_2-1}-\frac{a_2}{b_2-1}\right)} Y_2{}^{b} - (c+t)\, b_2^{\left(\frac{1}{b_2-1}-\frac{1}{b_2-1}\right)} X_2^{\left(\frac{a_2}{b_2-1}-\frac{a_2}{b_2-1}\right)} Y_2\right\}\right]$$

$$= \max_{P_X,P_Y} (m+n)\left[\left\{a_2\ X_2{}^{a_2} Y_2{}^{b_2} - (c+t)\, X_2\right\} + \left\{b_2\, X_2{}^{a_2} Y_2{}^{b_2} - (c+t)\, Y_2\right\}\right]$$

$$= \max_{P_X,P_Y} (m+n)\left[(a_2+b_2)\left(X_2{}^{a} Y_2{}^{b}\right) - (c+t)\, X_2 - (c+t)\, Y_2\right]$$

Harga optimal diberikan untuk jam sibuk adalah $P_X = a_2\ \overline{X}^{a-1}\overline{Y}^{b} - (c+t)$ dan harga optimal di jam tidak sibuk adalah $P_Y = b_2\ \overline{X}^{a}\overline{Y}^{b-1} - (c+t)$ dengan keuntungan maksimum yang diperoleh sebesar :

$$(m+n)\left[(a_2+b_2)\left(\bar{X}^{a_2}\,\bar{Y}^{b_2}\right) - (c+t)\,\bar{X} - (c+t)\,\bar{Y}\right]$$

Berdasarkan kasus ini diperoleh :

Lemma 5a :

Jika penyedia layanan (ISP) menggunakan harga *usage-based*, maka harga optimal diberikan untuk jam sibuk adalah $P_X = a_2\ \overline{X}^{a-1}\overline{Y}^{b} - (c+t)$ dan harga optimal di jam tidak sibuk adalah $P_Y = b_2\ \overline{X}^{a}\overline{Y}^{b-1} - (c+t)$ dengan keuntungan maksimum yang diperoleh sebesar :

$$(m+n)\left[(a_2+b_2)\left(\bar{X}^{a_2}\,\bar{Y}^{b_2}\right) - (c+t)\,\bar{X} - (c+t)\,\bar{Y}\right]$$

Kasus 6a. Jika penyedia layanan (ISP) menggunakan harga *two-part tariff*, maka $P_X > 0$, $P_Y > 0$, dan $P > 0$. Kondisi orde pertama untuk persamaan optimasi masalah konsumen golongan atas atau golongan bawah dengan menggunakan Persamaan (6.29), (6.30), (6.32), dan (6.33). Persamaan (6.29) dan (6.32) adalah kurva permintaan konsumen golongan atas dan golongan bawah pada saat jam sibuk. Persamaan (6.30) dan (6.33) adalah kurva permintaan konsumen golongan atas dan golongan bawah di jam tidak sibuk. Jika ditetapkan $a_1 > a_2$ maka untuk ketetapan biaya golongan atas mengikuti harga bagi biaya golongan bawah, sehingga :

$$a_1\,(m) < a_2\,(m+n) \Leftrightarrow a_1 < \frac{a_2\,(m+n)}{m}$$

Artinya jika konsumen dikenakan biaya sebesar $P_X = a_1\ X_1{}^{a_1-1} Y_1{}^{b_1} - (c+t)$, $P_Y = b_1\, Y_1{}^{(b_1-1)} X_1{}^{a_1} - (c+t)$ dan $P = X_1{}^{a_1}\, Y_1{}^{b_1} - (a_1+b_1)\left(X_1{}^{a_1}\, Y_1{}^{b_1}\right)$, maka hanya konsumen golongan atas yang dapat mengikuti layanan ini karena konsumen golongan bawah mempunyai kendala $P_X \le a_2\, X_2{}^{a_2-1} Y_2{}^{b_2} - (c+t)$ dan $P_Y \le b_2\ Y_2{}^{b_2-1} X_2{}^{a_2} - (c+t)$. Jika konsumen dikenakan biaya $P_X = a_2\, X_2{}^{a_2-1} Y_2{}^{b_2} - (c+t)$, $P_Y = b_2\ Y_2{}^{b_2-1} X_2{}^{a_2} - (c+t)$ dan $P = X_2{}^{a_2}\ Y_2{}^{b_2} - (a_2+b_2)\left(X_2{}^{a_2}\, Y_2{}^{b_2}\right)$, maka kedua jenis konsumen tersebut dapat mengikuti layanan, yaitu konsumen golongan atas dan konsumen golongan bawah. Hal ini dikarenakan banyak konsumen melihat biaya berlangganan sebagai entri penghalang, penyedia dapat memilih untuk menurunkan entri penghalang, sehingga dapat menarik lebih banyak konsumen. Dengan demikian untuk memaksimumkan keuntungan, penyedia layanan (ISP) mengenakan biaya

$P_X = a_2 X_2^{a_2 -1} Y_2^{b_2} - (c+t), P_Y = b_2\ Y_2^{b_2 -1} X_2^{a_2} - (c+t)$ dan $P = X_2^{a_2} Y_2^{b_2} - (a_2 + b_2)(X_2^{a_2} Y_2^{b_2})$

Dengan demikian optimasi masalah penyedia layanan (ISP) menjadi :

$$\underset{P_X,P_Y}{\text{maks}}\, m(P_X X_1^* + P_Y Y_1^* + PZ_1^*) + n\,(P_X X_2^* + P_Y Y_2^* + PZ_2^*)$$

$$= m\left[a_2 \bar{X}^{a_2} \bar{Y}^{b_2} + b_2 \bar{X}^{a_2} \bar{Y}^{b_2} - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y} + \{\bar{X}^{a_2} \bar{Y}^{b_2} - (a_2 + b_2)(\bar{X}^{a_2} \bar{Y}^{b_2})\}\right] + n\left[a_2 \bar{X}^{a_2} \bar{Y}^{b_2} + b_2 \bar{X}^{a_2} \bar{Y}^{b_2} - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y} + \{\bar{X}^{a_2} \bar{Y}^{b_2} - (a_2 + b_2)(\bar{X}^{a_2} \bar{Y}^{b_2})\}\right]$$

$$= m(\bar{X}^{a_2} \bar{Y}^{b_2} - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y}) + n\,(\bar{X}^{a_2} \bar{Y}^{b_2} - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y})$$

$$= (m+n)(\bar{X}^{a_2} \bar{Y}^{b_2} - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y})$$

Keuntungan maksimum yang diperoleh sebesar :

$$(m+n)(\bar{X}^{a_2} \bar{Y}^{b_2} - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y}).$$

Berdasarkan kasus ini diperoleh :

Lemma 6a :

Jika penyedia layanan (ISP) menggunakan harga *two-part tariff*, maka $P_X = a_2 \bar{X}^{a_2 -1} \bar{Y}^{b_2} - (c+t)$, $P_Y = b_2 \bar{X}^{a_2} \bar{Y}^{b_2 -1} - (c+t)$ dan $P = \bar{X}^{a_2} \bar{Y}^{b_2} - (a_2 + b_2)(\bar{X}^{a_2} \bar{Y}^{b_2})$, dengan

keuntungan maksimum yang diperoleh sebesar :

$$(m+n)(\bar{X}^{a_2} \bar{Y}^{b_2} - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y})$$

Hasil analisis dari Lemma 4a, 5a, dan 6a disajikan dalam Tabel 6.2.

Tabel 6.2 Perbandingan skema pembiayaan untuk konsumen heterogen Golongan Atas (*High-end*) dan Golongan Bawah (*Low-end*) berdasarkan fungsi utilitas Cobb-Douglas

	Lemma 4a (*Flat-Fee*)	Lemma 5a (*Usage-Based*)	Lemma 6a (*Two-Part Tariff*)
Harga yang dikenakan pada konsumen	$\bar{X}^{a_2} \bar{Y}^{b_2} - (\bar{X} + \bar{Y})\, c$	$P_X = a_2 \bar{X}^{a_2 -1} \bar{Y}^{b_2} - (c+t)$ dan $P_Y = b_2 \bar{X}^{a_2} \bar{Y}^{b_2 -1} - (c+t)$	$P_X = a_2 \bar{X}^{a_2 -1} \bar{Y}^{b_2} - (c+t)$ dan $P_Y = b_2 \bar{X}^{a_2} \bar{Y}^{b_2 -1} - (c+t)$
Keuntungan Maksimum	$(m+n)\left[\bar{X}^{a_2} \bar{Y}^{b_2} - (\bar{X} + \bar{Y})\, c\right]$	$(m+n)\left[(a_2 + b_2)(\bar{X}^{a_2} \bar{Y}^{b_2}) - (c+t)\,\bar{X} - (c+t)\,\bar{Y}\right]$	$(m+n)(\bar{X}^{a_2} \bar{Y}^{b_2} - (c+t)\bar{X} - (c+t)\bar{Y}).$

Berdasarkan Tabel 6.2 jika $a_2 \overline{X}^{a_2} > \overline{X}^{a_2}$ dan $b_2 \overline{Y}^{b_2} > \overline{Y}^{b_2}$, maka $(m+n)(a_2 + b_2)\left(\overline{X}^{a_2} \overline{Y}^{b_2}\right) > (m+n)\left[\overline{X}^{a_2} \overline{Y}^{b_2}\right]$; $a_2, b_2 > 0$. Oleh karena itu, jika terdapat dua jenis konsumen yang didasarkan oleh kesediaan untuk membayar di pasar, maka harga *usage-based* lebih baik dibandingkan harga *flat-fee* dan harga *two-part tariff*. Kesimpulan dari sub bab ini yaitu harga *usage-based* selalu menghasilkan keuntungan yang lebih baik dan mendominasi harga *flat-fee* dan harga *two-part tariff.*

6.3 Fungsi Utilitas *Cobb-Douglas* pada Konsumen Heterogen Tingkat Pemakaian Tinggi (*High-demand*) dan Tingkat Pemakaian Rendah (*Low-demand*)

Misalkan diasumsikan dua jenis konsumen, konsumen tingkat pemakaian tinggi (tipe 1) dengan tingkat konsumsi maksimum $\overline{X}_1$ dan $\overline{Y}_1$ dan konsumen tingkat pemakaian rendah (tipe 2) dengan tingkat konsumsi maksimum $\overline{X}_2$ dan $\overline{Y}_2$. Misalkan ada *m* konsumen (tipe 1) dan *n* konsumen (tipe 2) dengan $a_1 = a_2 = a$ dan $b_1 = b_2 = b$. Berikut ini dibahas penentuan keuntungan maksimum pada setiap skema pembiayaan yang digunakan penyedia layanan (ISP).

Kasus 7a. Jika penyedia layanan (ISP) menggunakan harga *flat-fee* dengan menetapkan $P_X = 0$, $P_Y = 0$ dan $P > 0$. Artinya layanan ini diberikan harga, jika konsumen (konsumen tingkat pemakaian tinggi atau konsumen tingkat pemakaian rendah) memilih untuk bergabung dengan layanan, maka konsumen tersebut sepenuhnya memanfaatkan layanan dengan memilih tingkat konsumsi $X_1 = \overline{X}_1$, $Y_1 = \overline{Y}_1$ atau $X_2 = \overline{X}_2$, $Y_2 = \overline{Y}_2$ dengan utilitas maksimum $\overline{X}_1{}^a \overline{Y}_1{}^b$ atau $\overline{X}_2{}^a \overline{Y}_2{}^b$ (secara berurutan untuk konsumen tingkat pemakaian tinggi atau konsumen tingkat pemakaian rendah). Selanjutnya penyedia layanan (ISP) dapat memberikan harga untuk setiap konsumen tingkat pemakaian tinggi yaitu $P \le \bar{X}_1{}^a \bar{Y}_1{}^b - (\bar{X}_1 + \bar{Y}_1)\, c$ dan masing-masing konsumen golongan bawah tidak lebih dari $P \le \bar{X}_2{}^a \bar{Y}_2{}^b - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)\, c$ sebagai *flat-fee* untuk layanan. Karena penyedia layanan (ISP) tidak bisa membedakan konsumen tingkat pemakaian tinggi atau konsumen tingkat pemakaian rendah dan harus mengenakan dengan harga yang sama untuk konsumen tersebut, penyedia layanan (ISP) menetapkan $P = \bar{X}_1{}^a \bar{Y}_1{}^b - (\bar{X}_1 + \bar{Y}_1)\, c$ dengan hanya melayani konsumen tingkat pemakaian tinggi atau menetapkan harga $P = \bar{X}_2{}^a \bar{Y}_2{}^b - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)\, c$ dengan melayani dua jenis konsumen yaitu konsumen tingkat pemakaian tinggi dan konsumen tingkat pemakaian rendah. Jika diasumsikan $m\left(\bar{X}_1{}^a \bar{Y}_1{}^b\right) < (m+n)\left(\bar{X}_2{}^a \bar{Y}_2{}^b\right)$, maka penyedia layanan (ISP) dapat menetapkan $P = \bar{X}_2{}^a \bar{Y}_2{}^b - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)\, c$ dan melayani baik konsumen tingkat pemakaian tinggi atau konsumen tingkat pemakaian rendah dengan keuntungan maksimum yang diperoleh sebesar :

$$(m+n)\left(\bar{X}_2{}^a \bar{Y}_2{}^b - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)\, c\right)$$

Berdasarkan kasus ini diperoleh :

Lemma 7a :

Jika penyedia layanan (ISP) menggunakan biaya *flat-fee*, maka harga yang ditetapkan adalah $P = \bar{X}_2{}^a \bar{Y}_2{}^b - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)\, c$ dengan keuntungan maksimum yang diperoleh sebesar :

$$(m+n)\left(\bar{X}_2{}^a \bar{Y}_2{}^b - (\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)\, c\right)$$

Kasus 8a. Jika penyedia layanan (ISP) menggunakan harga *usage-based* dengan menetapkan $P_X > 0$, $P_Y > 0$, dan $P = 0$, artinya penyedia layanan (ISP) memberikan harga yang dibedakan, yaitu harga pada saat jam sibuk dan tidak sibuk. Kondisi orde pertama untuk optimasi masalah konsumen tingkat pemakaian tinggi atau tingkat pemakaian rendah sebagai berikut:

Untuk konsumen heterogen tingkat pemakaian tinggi:

$$\underset{X,Y,Z}{\text{maks}}\ X_1{}^a Y_1{}^b - P_X X_1 - P_Y Y_1 - (c+t)\,X_1 - (\,c+t\,)\,Y_1$$

Untuk mengoptimalkan harga dengan menggunakan syarat perlu dan syarat cukup, persamaan di atas diferensialkan terhadap X_1 dan Y_1 :

(i) Syarat perlu

$$\frac{\partial(X_1{}^a\, Y_1{}^b - P_X X_1 - P_Y Y_1 - (c+t)\,X_1 - (\,c+t\,)\,Y_1)}{\partial X_1} = 0$$

Dari hasil diferensial diperoleh:

$$a\,X_1{}^{a-1} Y_1{}^b - (c+t) = P_X \tag{6.34}$$

Dengan cara yang sama pada persamaan (6.14), diperoleh :

$$\Leftrightarrow X_1{}^* = \left(\frac{P_X + (c+t)}{aY_1{}^b}\right)^{\frac{1}{a-1}}$$

(ii) Syarat cukup

$$\frac{\partial^2(X_1{}^a\, Y_1{}^b - P_X X_1 - P_Y Y_1 - (c+t)\,X_1 - (\,c+t\,)\,Y_1)}{\partial X_1{}^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(a\,X_1{}^{a-1} Y_1{}^b - P_X - (c+t))}{\partial X_1} = a\,(a-1) X_1{}^{a-2} Y_1{}^b > 0$$

dan

(i) Syarat perlu

$$\frac{\partial(X_1{}^a Y_1{}^b - P_X X_1 - P_Y Y_1 - (c+t)\,X_1 - (\,c+t\,)\,Y_1)}{\partial Y_1} = 0$$

Dari hasil diferensial diperoleh :

$$b\,Y_1{}^{b-1} X_1{}^a - (c+t) = P_Y \tag{6.35}$$

Dengan cara yang sama pada persamaan (6.15), diperoleh :

$$\Leftrightarrow Y_1{}^* = \left(\frac{P_Y + (c+t)}{bX_1{}^a}\right)^{\frac{1}{b-1}}$$

(ii) Syarat cukup

$$\frac{\partial^2(X_1{}^a Y_1{}^b - P_X X_1 - P_Y Y_1 - (c+t)\,X_1 - (\,c+t\,)\,Y_1)}{\partial Y_1{}^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(b\,Y_1{}^{b-1} X_1{}^a - P_Y - (c+t))}{\partial Y_1} = b(b-1) Y_1{}^{b-2} X_1{}^a > 0$$

dan untuk konsumen heterogen tingkat pemakaian rendah :

$$\underset{X,Y,Z}{\text{maks}}\ X_2{}^a Y_2{}^b - P_X X_2 - P_Y Y_2 - (c+t)\,X_2 - (\,c+t\,)\,Y_2$$

Untuk mengoptimalkan harga dengan menggunakan syarat perlu dan syarat cukup, persamaan di atas diferensialkan terhadap X_2 dan Y_2 :

(i) Syarat perlu

$$\frac{\partial(X_2{}^a Y_2{}^b - P_X X_2 - P_Y Y_2 - (c+t)\,X_2 - (\,c+t\,)\,Y_2)}{\partial X_2} = 0$$

Dari hasil diferensial diperoleh :

$$a\,X_2{}^{a-1} Y_2{}^b - (c+t) = P_X \tag{6.36}$$

Dengan cara yang sama pada persamaan (6.14), diperoleh :

$$\Leftrightarrow X_2{}^* = \left(\frac{P_X+(c+t)}{aY_2{}^b}\right)^{\frac{1}{a-1}}$$

(ii) Syarat cukup

$$\frac{\partial^2(X_2{}^aY_2{}^b - P_XX_2 - P_YY_2 - (c+t)\,X_2 - (\,c+t\,)\,Y_2)}{\partial X_2{}^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(a\,X_2{}^{a-1}Y_2{}^b - P_X - (c+t))}{\partial X_2} = a\,(a-1)X_2{}^{a-2}Y_2{}^b > 0$$

dan

(i) Syarat perlu

$$\frac{\partial(X_2{}^aY_2{}^b - P_XX_2 - P_YY_2 - (c+t)\,X_2 - (\,c+t\,)\,Y_2)}{\partial Y_2} = 0$$

Dari hasil diferensial diperoleh:

$$b\,Y_2{}^{b-1}X_2{}^a - (c+t) = P_Y \tag{6.37}$$

Dengan cara yang sama pada persamaan (6.15), diperoleh :

$$\Leftrightarrow Y_2{}^* = \left(\frac{P_Y + (c+t)}{bX_2{}^a}\right)^{\frac{1}{b-1}}$$

(iii) Syarat cukup

$$\frac{\partial^2(X_2{}^aY_2{}^b - P_XX_2 - P_YY_2 - (c+t)\,X_2 - (\,c+t\,)\,Y_2)}{\partial Y_2{}^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(b\,Y_2{}^{b-1}X_2{}^a - P_Y - (c+t))}{\partial Y_2} = b(b-1)X_2{}^aY_2{}^{b-2} > 0$$

Jika diasumsikan $m(\bar{X}_1) < (m+n)(\bar{X}_2)$, maka penyedia layanan (ISP) dapat menetapkan $P_X = a\,X_2{}^{a-1}Y_2{}^b - (c+t)$ dan $P_Y = b\,Y_2{}^{b-1}X_2{}^a - (c+t)$ yang melayani konsumen tingkat pemakaian tinggi maupun konsumen tingkat pemakaian rendah. Diketahui bahwa selama P_X dan P_Y menurun, maka $X_1{}^*, X_2{}^*, Y_1{}^*$ dan $Y_2{}^*$ meningkat. X_1, X_2, Y_1 dan Y_2 dibatasi pada $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{Y}_1$ dan $\bar{Y}_2$ mengakibatkan P_X dan P_Y terbaik $\mathrm{masing-masing}$ menjadi $a\,\bar{X}_2{}^{a-1}\,\bar{Y}_2{}^b - (c+t)$ dan $b\,\bar{X}_2{}^a\,\bar{Y}_2{}^{b-1} - (c+t)$ dengan keuntungan maksimum yang diperoleh :

Optimasi masalah produsen :

$$\max_{P_X,P_Y} m(P_X X_1{}^* + P_Y Y_1{}^*) + n\,(P_X X_2{}^* + P_Y Y_2{}^*)$$

$$= \max_{P_X,P_Y}(\,m+n\,)\left[P_X\left(\frac{P_X+(c+t)}{aY_2{}^b}\right)^{\frac{1}{a-1}} + P_Y\left(\frac{P_Y+(c+t)}{bX_2{}^a}\right)^{\frac{1}{b-1}}\right]$$

$$= \max_{P_X,P_Y}\,(m+n)\left[\left(a\,\bar{X}_2{}^{a-1}\,\bar{Y}_2{}^b - (\,c+t\,)\right)\left(\frac{\left(a\,\bar{X}_2{}^{a-1}\,\bar{Y}_2{}^b - (c+t) + (\,c+t)\right)^{\frac{1}{a-1}}}{a^{\left(\frac{1}{a-1}\right)}Y_2{}^{\left(\frac{b}{a-1}\right)}}\right) + \left(b\,\bar{X}_2{}^a\,\bar{Y}_2{}^{b-1} - (c+t)\right)\left(\frac{\left(b\,\bar{X}_2{}^a\,\bar{Y}_2{}^{b-1} - (c+t) + (\,c+t)\right)^{\frac{1}{b-1}}}{b^{\left(\frac{1}{b-1}\right)}X_2{}^{\left(\frac{a}{b-1}\right)}}\right)\right]$$

$$= \underset{P_X,P_Y}{\text{maks}}\,(m+n)\left[(a\,\bar{X}_2{}^{a-1}\,\bar{Y}_2{}^{b} - (c+t))\left(\frac{(a\,\bar{X}_2{}^{a-1}\,\bar{Y}_2{}^{b})^{\frac{1}{a-1}}}{a^{\left(\frac{1}{a-1}\right)}Y_2{}^{\left(\frac{b}{a-1}\right)}}\right) + (b\,\bar{X}_2{}^{a}\,\bar{Y}_2{}^{b-1} - (c+t))\left(\frac{\left(b\,\bar{X}_2{}^{a}\,\bar{Y}_2{}^{b-1}\right)^{\frac{1}{b-1}}}{b^{\left(\frac{1}{b-1}\right)}X_2{}^{\left(\frac{a}{b-1}\right)}}\right)\right]$$

$$= \underset{P_X,P_Y}{\text{maks}}\,(m+n)\left[\left\{\frac{\left(a\,\bar{X}_2{}^{a-1}\,\bar{Y}_2{}^{b}\right)^{1+\frac{1}{a-1}} - (c+t)\,(a\,\bar{X}_2{}^{a-1}\,\bar{Y}_2{}^{b})^{\frac{1}{a-1}}}{a^{\left(\frac{1}{a-1}\right)}Y_2{}^{\left(\frac{b}{a-1}\right)}}\right\} + \left\{\frac{\left(b\,\bar{X}_2{}^{a}\,\bar{Y}_2{}^{b-1}\right)^{1+\frac{1}{b-1}} - (c+t)\left(b\,\bar{X}_2{}^{a}\,\bar{Y}_2{}^{b-1}\right)^{\frac{1}{b-1}}}{b^{\left(\frac{1}{b-1}\right)}X_2{}^{\left(\frac{a}{b-1}\right)}}\right\}\right]$$

$$= \underset{P_X,P_Y}{\text{maks}}\,(m+n)\left[\left\{\frac{a^{\left(1+\frac{1}{a-1}\right)}\,X_2{}^{a}Y_2{}^{b}Y_2{}^{\left(\frac{b}{a-1}\right)} - (c+t)\,a^{\left(\frac{1}{a-1}\right)}\,X_2\,Y_2{}^{\left(\frac{b}{a-1}\right)}}{a^{\left(\frac{1}{a-1}\right)}Y_2{}^{\left(\frac{b}{a-1}\right)}}\right\} + \left\{\frac{b^{\left(1+\frac{1}{b-1}\right)}\,X_2{}^{a}X_2{}^{\left(\frac{a}{b-1}\right)}Y_2{}^{b} - (c+t)\,b^{\left(\frac{1}{b-1}\right)}\,X_2{}^{\left(\frac{a}{b-1}\right)}\,Y_2}{b^{\left(\frac{1}{b-1}\right)}X_2{}^{\left(\frac{a}{b-1}\right)}}\right\}\right]$$

$$= \underset{P_X,P_Y}{\text{maks}}\,(m+n)\left[\left\{a^{\left(1+\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a-1}\right)}\,X_2{}^{a}Y_2{}^{b}Y_2{}^{\left(\frac{b}{a-1}-\frac{b}{a-1}\right)} - (c+t)\,a^{\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a-1}\right)}\,X_2\,Y_2{}^{\left(\frac{b}{a-1}-\frac{b}{a-1}\right)}\right\} + \left\{b^{\left(1+\frac{1}{b-1}-\frac{1}{b-1}\right)}\,X_2{}^{a}X_2{}^{\left(\frac{a}{b-1}-\frac{a}{b-1}\right)}Y_2{}^{b} - (c+t)\,b^{\left(\frac{1}{b-1}-\frac{1}{b-1}\right)}X_2{}^{\left(\frac{a}{b-1}-\frac{a}{b-1}\right)}\,Y_2\right\}\right]$$

$$= \underset{P_X,P_Y}{\text{maks}}\,(m+n)\left[\left\{a\,X_2{}^{a}Y_2{}^{b} - (c+t)\,X_2\right\} + \left\{b\,X_2{}^{a}Y_2{}^{b} - (c+t)\,Y_2\right\}\right]$$

$$= \underset{P_X,P_Y}{\text{maks}}\,(m+n)\left[(a+b)\left(X_2{}^{a}Y_2{}^{b}\right) - (c+t)\,X_2 - (c+t)\,Y_2\right]$$

Jika penyedia layanan (ISP) menggunakan tipe pembiayaan *usage-based*, maka harga optimal pada saat jam sibuk adalah $P_X = a\,\bar{X}_2{}^{a-1}\,\bar{Y}_2{}^{b} - (c+t)$ dan harga optimal pada saat jam tidak sibuk adalah $P_Y = b\;\bar{X}_2{}^{a}\,\bar{Y}_2{}^{b-1} - (c+t)$ dengan keuntungan maksimum yang diperoleh sebesar :

$$(m+n)\left[(a+b)\left(\bar{X}_2{}^{a}\bar{Y}_2{}^{b}\right) - (c+t)\,\bar{X}_2 - (c+t)\bar{Y}_2\right]$$

Berdasarkan kasus ini diperoleh :

Lemma 8a :

Jika penyedia layanan (ISP) menggunakan harga *usage-based*, maka harga optimal di jam sibuk adalah $P_X = a\bar{X}_2{}^{a-1}\bar{Y}_2{}^{b} - (c+t)$ dan harga yang optimal di jam tidak sibuk adalah $P_Y = b\;\bar{X}_2{}^{a}\,\bar{Y}_2{}^{b-1} - (c+t)$. Keuntungan maksimum yang diperoleh sebesar :

$$(m+n)\left[(a+b)\left(\bar{X}_2{}^{a}\bar{Y}_2{}^{b}\right) - (c+t)\,\bar{X}_2 - (c+t)\bar{Y}_2\right]$$

Kasus 9a. Jika penyedia layanan (ISP) menggunakan harga *two-part tariff*, maka $P_X > 0$, $P_Y > 0$, dan $\text{P} > 0$, kondisi orde pertama untuk persamaan optimasi masalah konsumen tingkat pemakaian tinggi atau tingkat pemakaian rendah dengan menggunakan Persamaan (6.34), (6.35), (6.36), dan (6.37).

Jika $X_1 > X_2 \Leftrightarrow aX_1{}^{a-1}Y_1{}^b > b\,X_2{}^{b-1}Y_2{}^b$, maka $P_X = a\,X_2{}^{a-1}Y_2{}^b - (c+t)$ yang terbaik untuk ditetapkan oleh penyedia layanan (ISP) yang dapat digunakan untuk konsumen tingkat pemakaian tinggi dan tingkat pemakaian rendah. Jika menggunakan harga $P_X = aX_1{}^{a-1}Y_1{}^b - (c+t)$, maka penyedia layanan (ISP) hanya dapat menarik konsumen tingkat pemakaian tinggi saja. Begitu juga untuk jam tidak sibuk, $P_Y = b\,X_2{}^a\,Y_2{}^{b-1} - (c+t)$ adalah harga yang terbaik pada saat jam tidak sibuk.

Dengan menggunakan Kendala (6.31), diperoleh :

$$X_2{}^aY_2{}^b - P_XX_2 - P_YY_2 - PZ_2 - (c+t)\,X_2 - (c+t)\,Y_2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow X_2{}^aY_2{}^b - \left(a\,X_2{}^{a-1}Y_2{}^b - (c+t)\right)X_2 - \left(b\,X_2{}^a\,Y_2{}^{b-1} - (\mathrm{c+t})\right)Y_2 - P - (c+t)\,X_2 - (c+t)\,Y_2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow X_2{}^aY_2{}^b - aX_2{}^aY_2{}^b - bX_2{}^a\,Y_2{}^b + (c+t)X_2 + (c+t)Y_2 - P - (c+t)\,X_2 - (c+t)\,Y_2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow P \leq X_2{}^aY_2{}^b - aX_2{}^aY_2{}^b - bX_2{}^aY_2{}^b$$

jika $X_1{}^* \leq \bar{X}_1$ dan $X_2{}^* \leq \bar{X}_2$, maka $P_X = a\,\bar{X}_2{}^{a-1}\bar{Y}_2{}^b - (c+t)$, $P_Y = b\,\bar{X}_2{}^a\bar{Y}_2{}^{b-1} - (c+t)$

dan $P \leq \bar{X}_2{}^a\bar{Y}_2{}^b - a\bar{X}_2{}^a\bar{Y}_2{}^b - b\bar{X}_2{}^a\bar{Y}_2{}^b$

Optimasi masalah penyedia layanan (ISP) menjadi :

$$\underset{P,P_X,P_Y}{\text{maks}}\; m(P_X\mathrm{X}_1{}^* + P_Y\mathrm{Y}_1{}^* + P\mathrm{Z}_1{}^*) + n\,(P_X\mathrm{X}_2{}^* + P_Y\mathrm{Y}_2{}^* + P\mathrm{Z}_2{}^*)$$

$$= m\left[\left(a\bar{X}_2{}^{a-1}\bar{Y}_2{}^b - (c+t)\right)\bar{X}_1 + \left(b\bar{X}_2{}^a\bar{Y}_2{}^{b-1} - (c+t)\right)\bar{Y}_1 + \left\{\bar{X}_2{}^a\bar{Y}_2{}^b - a\bar{X}_2{}^a\bar{Y}_2{}^b - b\bar{X}_2{}^a\bar{Y}_2{}^b\right\}\right] + n\left[\left(a\bar{X}_2{}^{a-1}\bar{Y}_2{}^b - (c+t)\right)\bar{X}_2 + \left(b\bar{X}_2{}^a\bar{Y}_2{}^{b-1} - (c+t)\right)\bar{Y}_2 + \left\{\bar{X}_2{}^a\bar{Y}_2{}^b - a\bar{X}_2{}^a\bar{Y}_2{}^b - b\bar{X}_2{}^a\bar{Y}_2{}^b\right\}\right]$$

$$= m\left[\left\{\left(a\bar{X}_2{}^{a-1}\bar{Y}_2{}^b\right)\bar{X}_1 + \left(b\bar{X}_2{}^a\bar{Y}_2{}^{b-1}\right)\bar{Y}_1 - (c+t)\bar{X}_1 - (c+t)\bar{Y}_1\right\} + \left\{\bar{X}_2{}^a\bar{Y}_2{}^b - a\bar{X}_2{}^a\bar{Y}_2{}^b - b\bar{X}_2{}^a\bar{Y}_2{}^b\right\}\right] + n\left[\left\{\left(a\bar{X}_2{}^{a-1}\bar{Y}_2{}^b\right)\bar{X}_2 + \left(b\bar{X}_2{}^a\bar{Y}_2{}^{b-1}\right)\bar{Y}_2 - (c+t)X_2 - (c+t)Y_2\right\} + \left\{\bar{X}_2{}^a\bar{Y}_2{}^b - a\bar{X}_2{}^a\bar{Y}_2{}^b - b\bar{X}_2{}^a\bar{Y}_2{}^b\right\}\right]$$

$$= m\left[\left(a\bar{X}_2{}^{a-1}\bar{Y}_2{}^b\right)\bar{X}_1 + \left(b\bar{X}_2{}^a\bar{Y}_2{}^{b-1}\right)\bar{Y}_1 - (\bar{X}_1 + \bar{Y}_1)(c+t) + \left\{\bar{X}_2{}^a\bar{Y}_2{}^b - a\bar{X}_2{}^a\bar{Y}_2{}^b - b\bar{X}_2{}^a\bar{Y}_2{}^b\right\}\right] + n\left[\bar{X}_2{}^a\bar{Y}_2{}^b - (c+t)X_2 - (c+t)Y_2\right]$$

$$= m\left[\left(a\bar{X}_2{}^{a-1}\bar{Y}_2{}^b\right)(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + \left(b\bar{X}_2{}^a\bar{Y}_2{}^{b-1}\right)(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) - (\bar{X}_1 + \bar{Y}_1)(c+t)\right] - n[(\bar{X}_2 + \bar{Y}_2)(c+t)] + (m+n)\left(\bar{X}_2{}^a\,\bar{Y}_2{}^b\right)$$

Jika penyedia layanan (ISP) menggunakan harga *two-part tariff* dengan menetapkan $P_X > 0$, $P_Y > 0$, dan $P > 0$, maka penyedia dapat menetapkan harga yang optimal $P_X = a\bar{X}_2{}^{a-1}\bar{Y}_2{}^b - (c+t)$, $P_Y = b\bar{X}_2{}^a\bar{Y}_2{}^{b-1} - (c+t)$, dan biaya berlangganan P sama dengan surplus konsumen dari konsumen tingkat pemakaian rendah, sehingga keuntungan maksimum diperoleh sebesar :

$$m\left[\left(a\bar{X}_2{}^{a-1}\bar{Y}_2{}^{b}\right)(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+\left(b\bar{X}_2{}^{a}\bar{Y}_2{}^{b-1}\right)(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)-(\bar{X}_1+\bar{Y}_1)(c+t)\right]+n[(\bar{X}_2+\bar{Y}_2)(c+t)] + (m+n)\left(\bar{X}_2{}^{a}\,\bar{Y}_2{}^{b}\right)$$

Berdasarkan kasus ini diperoleh :

Lemma 9a :

Jika penyedia layanan (ISP) menggunakan harga *two-part tariff*, maka P_X dan P_Y optimal secara berurutan menjadi $a\bar{X}_2{}^{a-1}\bar{Y}_2{}^{b}-(c+t)$ dan $b\bar{X}_2{}^{a}\bar{Y}_2{}^{b-1}-(c+t)$, serta $P=\bar{X}_2{}^{a}\bar{Y}_2{}^{b}-a\bar{X}_2{}^{a}\bar{Y}_2{}^{b}-b\bar{X}_2{}^{a}\bar{Y}_2{}^{b}$ sehingga, keuntungan maksimum yang diperoleh sebesar :

$$m\left[\left(a\bar{X}_2{}^{a-1}\bar{Y}_2{}^{b}\right)(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+\left(b\bar{X}_2{}^{a}\bar{Y}_2{}^{b-1}\right)(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)-(\bar{X}_1+\bar{Y}_1)(c+t)\right]+n[(\bar{X}_2+\bar{Y}_2)(c+t)] + (m+n)\left(\bar{X}_2{}^{a}\,\bar{Y}_2{}^{b}\right)$$

Hasil analisis dari Lemma 7a, 8a, dan 9a disajikan dalam Tabel 6.3.

Tabel 6.3 Perbandingan skema pembiayaan untuk konsumen heterogen Tingkat Pemakaian Tinggi (*High-demand*) dan Tingkat Pemakaian Rendah (*Low-demand*) berdasarkan fungsi utilitas *Cobb-Douglas*.

	Lemma 7a (*Flat-Fee*)	Lemma 8a (*Usage-Based*)	Lemma 9a (*Two-Part Tariff*)
Harga yang dikenakan pada konsumen	$\bar{X}_2{}^{a}\bar{Y}_2{}^{b}-(\bar{X}_2+\bar{Y}_2)\,c$	$P_X=a\bar{X}_2{}^{a-1}\bar{Y}_2{}^{b}-(c+t)$ dan $P_Y=b\bar{X}_2{}^{a}\bar{Y}_2{}^{b-1}-(c+t)$	$P_X=a\bar{X}_2{}^{a-1}\bar{Y}_2{}^{b}-(c+t)$ dan $P_Y=b\bar{X}_2{}^{a}\bar{Y}_2{}^{b-1}-(c+t)$
Keuntungan maksimum	$(m+n)\left(\bar{X}_2{}^{a}\bar{Y}_2{}^{b}-(\bar{X}_2+\bar{Y}_2)\,c\right)$	$(m+n)\left[(a+b)\left(\bar{X}_2{}^{a}\bar{Y}_2{}^{b}\right)-(c+t)\,\bar{X}_2-(c+t)\bar{Y}_2\right]$	$m\left[\left(a\bar{X}_2{}^{a-1}\bar{Y}_2{}^{b}\right)(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+\left(b\bar{X}_2{}^{a}\bar{Y}_2{}^{b-1}\right)(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)-(\bar{X}_1+\bar{Y}_1)(c+t)\right]+n[(\bar{X}_2+\bar{Y}_2)(c+t)]+(m+n)\left(\bar{X}_2{}^{a}\,\bar{Y}_2{}^{b}\right)$

Berdasarkan Tabel 6.3, jika diketahui $X\geq 0$ dan $Y\geq 0$, maka :

$$m\left[\left(a\bar{X}_2{}^{a-1}\bar{Y}_2{}^{b}\right)(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+\left(b\bar{X}_2{}^{a}\bar{Y}_2{}^{b-1}\right)(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)-(\bar{X}_1+\bar{Y}_1)(c+t)\right]+n[(\bar{X}_2+\bar{Y}_2)(c+t)]+(m+n)\left(\bar{X}_2{}^{a}\,\bar{Y}_2{}^{b}\right)> (m+n)\left[(a+b)\left(\bar{X}_2{}^{a}\bar{Y}_2{}^{b}\right)-(c+t)\,X_2-(c+t)\,Y_2\right]>(m+n)\left(\bar{X}_2{}^{a}\bar{Y}_2{}^{b}-(\bar{X}_2+\bar{Y}_2)\,c\right)$$

Untuk itu harga *two-part tariff* lebih baik dibandingkan harga *flat fee* dan harga *usage-based* untuk masalah konsumen heterogen dengan tingkat pemakaiannya (*high-demand* dan *low-demand*).

6.4 Kesimpulan

Skema pembiayaan *usage based* memiliki solusi yang lebih optimal dibandingkan sekma pembiayaan *flat fee* dan *two part tariff* untuk konsumen homogeny dan heterogen *high-end* dan *low-end,* sedangkan untuk konsumen heterogen *high-demand* dan *low-demand* skema pembiayaan *two-part tariff* lebih optimal.

DAFTAR PUSTAKA

Chugh, S. K. (2012). Microeconomics of Consumer Theory. 10.

Curescu, C. (2005). Utility-based Optimisation of Resource Allocation for Wireless Networks.

Floyd, J. E. (2013). Topic 1: Indifference Curves. In *MICROECONOMICS*. Canada.

Hutchinson, E. (2011). Review of Utility Functions. Retrieved Mei 3, 2016, from http://web.uvic.ca/-ehutchin/resources/313/PROBLEM-SETS/TopicBll.pdf

Indrawati, Irmeilyana, Puspita, F. M., & Sanjaya, O. (2015). Internet pricing on bandwidth function diminished with increasing bandwidth utility function. *TELKOMNIKA, 13*(1), 299-304.

Pratama, B. (2013). Pengaruh Struktur Kepemilikan Perusahaan Terhadap Kualitas Audit.

Ratung, D. (2014). Penerapan Biaya Diferensial dalam Pengambilan Keputusan Membeli atau Memproduksi Sendiri Pada RM. Pangsit Tompaso. *Jurnal EMBA, Vol.2 No.3, Hal. 030-037*.

Schulzrinne, X. W. H. (2004). Incentive-Compatible Adaptation of Internet Real-Time Multimedia.

Wang, X., & Schulzrinne, H. (2001). *Pricing network resources for adaptive applications in a differentiated services network.* Paper presented at the Proceedings of IEEE INFOCOM 2001, Anchorage, AK, April 2001.

Wang, X., & Schulzrinne, H. (2001). Pricing Network Resources for Adaptive Applications in a Differentiated Services Network.

Wu, S.-y., & Banker, R. D. (2010). Best Pricing Strategy for Information Services. *Journal of the Association for Information Systems, 11*(6), 339-366.

Wu, Y., Hande, P. H., Kim, H., Chiang, M., & Tsang, D. H. K. (2010). QoS-Revenue Tradeoff with Time-Constrained ISP Pricing. Retrieved 3 August 2010, from http://scenic.princeton.edu/paper/IWQoS_Draft.pdf

Yang, W. (2004). Pricing Network Resourese in Differentiated Sevice Networks. 111.

BIOGRAFI PENGARANG

	Robinson Sitepu mendapatkan gelar Sarjana S1 bidang statistika dari Universitas Padjajaran kemudian beliau mendapatkan gelar M.Si bidang Operasi Riset di Universitas Sumatera Utara . beliau menjadi staf Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya sejak tahun 1985. Bidang minat beliau adalah termasuk operasi riset dan aplikasinya pada bidang statistika. Say ini focus riset beliau adalah pembiayaan layanan informasi yang melibatkan fungsi utilitas pada jaringan QoS dengan melibatkan biaya marginal dan biaya pengawasan.
	Fitri Maya Puspita mendapatkan gelar S.Si nya dalam Bidang Matematika dari Univeristas Sriwijaya, Sumatera Selatan, Indonesia di tahun 1997. Beliau menerima M.Sc bidang Matematika dari Curtin University of Technology (CUT) Australia Barat pada tahun 2004. Beliau mendapatkan gelar Ph.D dalam bidang Sains dan technology di tahun 2015 dari Univerisiti Sains Islam Malaysia. Beliau mulai dari Tahun 1998 sampai saat ini menjadi tenaga pendidik di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sriwijaya. Bidang minar riset beliau adalah optimasi dan aplikasinya seperti pada masalah perutean kendaraan (Vehicle Routing Problem) dan charging dalam third generation internet.
	Hadi Tanuji mendapatkan gelar S.Si pada Bidang Statistika di Tahun 1999 dan M.Si di bidang Statistika di Institut Pertanian Bogor Tahun 2002. Beliau sampai saat ini adalah Staf pengajar Statistika di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya sejak Tahun 2000 sampai sekarang. Bidang minat beliau meliputi statistika dan aplikasinya pada berbagai bidang ilmu.
	Anggi Nurul Pratiwi menerima gelar Sarjana sains bidang matematika pada tahun 2016. Bidang minat beliau adalah optimasi khususnya pengoptimalan pembiayaan bundling pada jaringan multiple QoS yang melibatkan biaya marginal dan biaya pengawasan.
	Icha Puspita Novyasti menerima gelar Sarjana sains bidang matematika pada tahun 2016. Bidang minat beliau adalah optimasi khususnya pengoptimalan pembiayaan bundling pada jaringan multiple QoS dengan melibatkan biaya marginal dan biaya pengawasan.

INDEKS