

# Estimasi Parameter Bootstrap pada Proses AR(1)

Bambang Suprihatin, Suryo Guritno, dan Sri Haryatmi

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya  
Email: [bambang@unsri.ac.id](mailto:bambang@unsri.ac.id)

## Abstrak

Menurut Freedman (1985) dan Bose (1988), estimator bootstrap  $\hat{\theta}^*$  bersifat konvergen dalam probabilitas terhadap  $\theta$ , yakni  $\hat{\theta}^* \xrightarrow{p} \theta$ . Dalam tulisan ini,  $\theta$  adalah parameter proses AR(1). Hardle *et.al.* (2003) juga menyimpulkan bahwa estimator bootstrap memiliki tingkat keakurasian yang baik ketika metode bootstrap diterapkan pada data runtun waktu. Dari simulasi Monte Carlo dengan menggunakan sampel bootstrap  $B = 25, 50, 100, \text{ dan } 200$  diperoleh estimasi standar error dari  $\hat{\theta}^*$  yang semakin kecil seiring dengan  $B$  yang semakin besar. Dengan kata lain, tingkat keakurasian estimator bootstrap  $\hat{\theta}^*$  baik. Grafik estimasi densitas distribusi dari  $\hat{\theta}^*$  juga diberikan. Dari grafik terlihat bahwa estimasi densitas mendekati fungsi densitas normal. Hasil simulasi ini sesuai dengan hasil pada Bose (1988),  $\sup_x |H_{BOOT}(x) - H_n(x)| = o(n^{-1/2})$  a.s. dengan  $H_n(x) \xrightarrow{d} N(0,1)$ .

**Kata Kunci:** Bootstrap, estimasi parameter, probabilitas cakupan, simulasi Monte Carlo

## 1. Pengantar

Beberapa permasalahan yang sering muncul dalam estimasi parameter tak diketahui  $\theta$  meliputi: (1) Estimator  $\hat{\theta}$  apa yang akan digunakan/dipilih, (2) Setelah memilih estimator  $\hat{\theta}$  tertentu, bagaimana keakurasian estimator tersebut. Untuk menjawab permasalahan ini, perlu diselidiki standar error dan konsistensi dari estimator tersebut. Standar error menyatakan keakurasian estimator yang menggambarkan seberapa jauh estimator  $\hat{\theta}$  menyimpang dari nilai parameter  $\theta$  yang sebenarnya. Sedangkan konsistensi estimator diperlukan untuk menjamin bahwa estimator  $\hat{\theta}$  konvergen ke parameter  $\theta$  yang sebenarnya. Pembahasan tentang konsistensi estimator parameter

secara detail dapat dilihat pada Serfling (1980), Shao dan Tu (1995), Lehmann (1999) dan DasGupta (2008).

Kekonvegenan dari estimator  $\hat{\theta}$  sendiri ada dua macam, yakni konvergen lemah (*weakly convergen*) apabila  $\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta$  (notasi  $\xrightarrow{p}$  menyatakan konvergen dalam probabilitas), dan konvergen kuat (*strongly convergen*) apabila  $\hat{\theta} \xrightarrow{a.s} \theta$  (notasi  $\xrightarrow{a.s}$  menyatakan konvergen hampir pasti atau *almost surely convergen*). Kekonvergenan dari estimator bootstrap dapat dilihat pada Bickel dan Freedman (1981), Freedman (1985) dan Hall (1992).

Bootstrap, merupakan metode yang berbasis pada komputer-intensif, berkembang pesat sejak diperkenalkan oleh Bradley Efron pada tahun 1979. Metode bootstrap didesain untuk bisa menjawab beberapa permasalahan di atas dengan tingkat akurasi yang tinggi (Efron dan Tibshirani, 1986). Selain itu, metode bootstrap dapat digunakan pada situasi dimana asumsi standar tidak dipenuhi, misal ukuran sampel  $n$  kecil dan data tidak berdistribusi normal [Davison dan Hinkley (2006)]. Singh (1981) menunjukkan bahwa distribusi dari mean sampel bootstrap memiliki keakurasian yang lebih tinggi dari aproksimasi limit distribusi normal. Bickel dan Freedman (1981) mempelajari aproksimasi distribusi bootstrap dari statistik penting seperti mean dan statistik- $t$  dan menyimpulkan bahwa kedua statistik adalah asimtotik. Namun demikian, bukan berarti bootstrap tidak mempunyai kelemahan. Mereka juga mengemukakan contoh kegagalan metode bootstrap. Efron dan Tibshirani (1993) memberikan contoh kegagalan metode bootstrap parametrik ketika sampel bootstrap disampling berasal dari distribusi seragam (*uniform*) pada  $(0, \hat{\theta})$ . Dalam makalah ini, metode bootstrap diterapkan pada proses AR(1) untuk estimasi parameter dan standar error versi bootstrap.

Pada bagian akhir dari makalah ini kami sajikan simulasi Monte Carlo dengan menggunakan data runtun waktu mengenai kurs (nilai tukar) mata uang dolar Amerika terhadap rupiah. Data diunduh dari situs resmi milik Bank Indonesia, yakni <http://www.bi.go.id>. Dari data yang diperoleh, dicocokkan dengan model yang sesuai. Dugaan awal, model yang tepat adalah AR(1). Untuk membuktikan kebenaran dugaan awal, diselidiki dengan menggunakan informasi AIC (*Akaike's Information Criterion*) dan korelogram PACF dari data runtun waktu tersebut. Selanjutnya diselidiki estimator

$\hat{\theta}$  untuk parameter  $\theta$  dan estimator versi bootstrap  $\hat{\theta}^*$ . Semua perhitungan dan grafik ilustrasi dalam makalah ini dikerjakan dengan menggunakan perangkat lunak S-Plus.

## 2. Prinsip Metode Bootstrap

Seperti yang telah dijelaskan pada Subbab 1, ada beberapa alasan mengapa metode bootstrap diperlukan, misalnya karena ukuran sampel  $n$  kecil dan asumsi normalitas tidak dipenuhi. Misalkan kita telah memiliki data sampel  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  yang diperoleh dengan cara sampling acak dari distribusi tak diketahui  $F$ . Sampel bootstrap  $\mathbf{X}^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$  diperoleh dengan cara sampling acak berukuran  $n$  dengan pengembalian, dari data asal  $\mathbf{X}$ . Misalkan  $\hat{F}$  adalah distribusi empirik untuk distribusi  $F$ , yang didefinisikan sebagai

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\{x_i \leq x\}, \quad (2.1)$$

dengan  $I\{A\}$  adalah fungsi indikator dari himpunan  $A$ .

Selanjutnya kita ingin mengestimasi parameter statistik  $\theta$  yang merupakan fungsional  $t$ , tepatnya  $\theta = t(X_1, X_2, \dots, X_n; F)$ . Dengan menggunakan prinsip *plug-in*, digunakan estimator bootstrap  $\hat{\theta}^* = t(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*; \hat{F})$ , dengan  $\hat{F}$  seperti pada (2.1). Bagaimana keakuratan estimator bootstrap  $\hat{\theta}^*$ ? Untuk mengukur keakuratan tersebut, diperlukan estimator variansi bootstrap,

$$\begin{aligned} v_{BOOT} &= \int \left( t_n(x) - \int t_n(y) d \prod_{i=1}^n \hat{F}(y_i) \right)^2 d \prod_{i=1}^n \hat{F}(x_i) \\ &= \text{var}_* \left( t_n(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*) \mid X_1, X_2, \dots, X_n \right). \end{aligned}$$

Notasi  $\text{var}_*(\cdot \mid X_1, X_2, \dots, X_n)$  menyatakan variansi bersyarat  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Akar kuadrat dari  $v_{BOOT}$  merupakan estimasi standar error versi bootstrap. Estimasi bootstrap dari  $se_F(\hat{\theta})$ , standar error dari statistik  $\hat{\theta}$ , adalah estimasi *plug-in* yang menggunakan distribusi empirik  $\hat{F}$  untuk mengganti distribusi tak diketahui  $F$ . Dengan kata lain, estimasi bootstrap  $se_F(\hat{\theta})$  didefinisikan sebagai  $se_{\hat{F}}(\hat{\theta}^*)$ , disebut estimasi bootstrap nonparametrik karena berasal dari distribusi empirik  $\hat{F}$ . Standar error ini mengukur keakuratan dari estimator  $\hat{\theta}^*$ . Efron dan Tibshirani (1993) menyarankan untuk

mengestimasi  $se_F(\hat{\theta})$  digunakan ukuran sampel bootstrap  $B$  antara 50 sampai 200, untuk menghasilkan estimasi yang cukup baik. Sementara untuk mengestimasi interval konfidensi mereka menyarankan  $B$  lebih besar dari 200. Interval konfidensi bootstrap ini dibahas secara khusus pada Subbab 4. Hardle *et.al.* (2003) juga menyimpulkan bahwa estimator bootstrap memiliki tingkat keakurasian yang baik ketika metode bootstrap diterapkan pada data runtun waktu (*time series*). Limit dari  $\widehat{se}_B$  untuk  $B \rightarrow \infty$  adalah estimasi bootstrap ideal dari  $se_F(\hat{\theta})$ , yakni

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \widehat{se}_B = se_{\hat{F}} = se_{\hat{F}}(\hat{\theta}^*).$$

Berikut adalah algoritma bootstrap untuk mencari estimasi standar error:

1. Kita pilih  $B$  sampel bootstrap independen  $X^{*1}, X^{*2}, \dots, X^{*B}$ , masing-masing berukuran  $n$  yang diambil secara acak tanpa pengembalian dari data asal  $X$ .
2. Dievaluasi replikasi bootstrap berkaitan dengan masing-masing sampel,

$$\hat{\theta}^*(b) = t(X^{*b}), \quad b = 1, 2, \dots, B.$$

3. Standar error  $se_F(\hat{\theta})$  diestimasi dengan standar deviasi  $B$  sampel replikasi

$$\widehat{se} = \left( \frac{\sum_{b=1}^B [\hat{\theta}^*(b) - \hat{\theta}^*(\cdot)]^2}{B-1} \right)^{1/2}, \quad (2.2)$$

$$\text{dimana } \hat{\theta}^*(\cdot) = \frac{\sum_{b=1}^B \hat{\theta}^*(b)}{B}.$$

### 3. Estimasi Parameter Bootstrap pada Proses AR(1)

Misal  $\{X_t, t = 1, 2, \dots, n\}$  adalah barisan data runtun waktu yang memenuhi proses autoregresif orde satu atau disingkat AR (1), yakni apabila  $\{X_t, t = 1, 2, \dots, n\}$  memenuhi persamaan  $X_t = \theta X_{t-1} + \varepsilon_t$  dengan  $\{\varepsilon_t\}$  adalah barisan variabel acak *white noise*  $\sim iid N(0, \sigma^2)$ . Estimasi dari parameter  $\sigma^2$  adalah  $\hat{\sigma}^2 = (1 - \hat{\rho}_1^2) s^2$ , dengan  $s^2$  adalah variansi sampel  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Asumsikan  $\{X_t, t = 1, 2, \dots, n\}$  adalah Gaussian

stasioner. Syarat kestasioneran untuk proses AR(1) adalah  $|\theta| < 1$ . Pembahasan lengkap tentang runtun waktu dapat berkonsultasi pada buku Wei(1990) dan Brockwell dan Davis (1991).

Misal diberikan data realisasi  $X_1, X_2, \dots, X_n$  yang memenuhi proses AR(1). Untuk mencocokkan model AR(1) dari data yang dimiliki, digunakan kriteria informasi AIC, yang dirumuskan sebagai

$$AIC(k) = n \ln(\hat{\sigma}_{\varepsilon,k}^2) + 2k.$$

Order autoregresif  $p$  yang sesuai merupakan nilai  $(k - 1)$  yang menyebabkan AIC minimum. Dengan kata lain hubungan antara *lag*  $k$  dan order proses autoregresif  $p$  adalah  $p = k - 1$  [Venables dan Ripley (1996)]. Selain itu, untuk menguatkan pencocokan model dilihat dari korelogram fungsi autokovariansi parsial (*partial autocorrelation function* = PACF). Untuk proses AR(1), PACF *cut-off* pada *lag* kedua dan seterusnya.

Pada proses AR(1), estimasi Yule-Walker untuk  $\theta$  adalah  $\hat{\theta} = \hat{\rho}_1$  dengan  $\hat{\rho}_1$  adalah estimasi autokorelasi *lag* pertama yang dirumuskan sebagai

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\sum_{t=2}^n X_{t-1} X_t}{\sum_{t=1}^n X_t^2}. \quad (3.1)$$

Menurut Wei (1990) dan Brockwell dan Davis (1991), estimasi standar error dari parameter  $\theta$  adalah  $\widehat{se}(\theta) = \sqrt{\frac{1 - \hat{\theta}^2}{n}}$ . Sementara itu, estimator versi bootstrap  $\hat{\theta}^*$  dari parameter  $\theta$  dikerjakan sebagai berikut [lihat Efron dan Tibshirani (1986), Bose (1988), dan Shao dan Tu (1995)]:

1. Dari data  $X_1, X_2, \dots, X_n$  yang diberikan, dilakukan pemusatan, yakni ganti  $X_i$  dengan  $X_i - \bar{X}$ .
2. Kita cocokkan data dengan model AR(1) dengan menggunakan AIC dan identifikasi korelogram PACF. Setelah pencocokkan modelnya sesuai, diperoleh estimator Yule-Walker  $\hat{\theta}$  dengan menggunakan (3.1)
3. Mendefinisikan residu  $\hat{\varepsilon}_t = X_t - \hat{\theta} X_{t-1}$  untuk  $t = 2, 3, \dots, n$ . Sampel bootstrap  $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$  diperoleh dengan cara sampling acak tanpa pengembalian dari

residu  $\varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*, \dots, \varepsilon_n^*$ . Tetapkan  $X_1^* = X_1$  sebagai sampel inisial bootstrap dan  $X_t^* = \hat{\theta} X_{t-1}^* + \varepsilon_t^*$ ,  $t = 2, 3, \dots, n$ .

4. Dari sampel bootstrap  $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$  dilakukan pemusatan kembali, yakni  $X_i^*$  diganti dengan  $X_i^* - \bar{X}^*$  dimana  $\bar{X}^* = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t^*$ . Dari sini diperoleh estimator

bootstrap  $\hat{\theta}^* = \hat{\rho}_1^* = \frac{\sum_{t=2}^n X_{t-1}^* X_t^*}{\sum_{t=1}^n X_t^{*2}}$  dengan menggunakan prinsip *plug-in* pada

(3.1) dengan sampel  $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$ . Selanjutnya dihitung estimasi standar error bootstrap  $\widehat{se}_B(\hat{\theta}^*)$  dengan menggunakan (2.2) untuk menyatakan keakuratan estimator.

Freedman (1985) dan Bose (1988) menyelidiki kekonsistenan distribusi dari  $\frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}^* - \hat{\theta})}{\hat{\sigma}}$ . Seperti yang telah kita ketahui,  $\frac{\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)}{\sigma} \rightarrow_d N(0,1)$ . Dengan menggunakan ekspansi Edgeworth, Bose (1988) menunjukkan bahwa metrik Kolmogorov

$$\sup_x |H_{BOOT}(x) - H_n(x)| = o(n^{-1/2}) \text{ a.s.},$$

dimana  $H_{BOOT}(x) = P_* \left( \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}^* - \hat{\theta})}{\hat{\sigma}} \leq x \right)$  dan  $H_n(x) = P \left( \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)}{\sigma} \leq x \right)$ . Dengan kata

lain,  $\hat{\theta}^* \rightarrow_{a.s.} \theta$  dengan laju konvergensi orde pertama  $o(n^{-1/2})$ . Notasi  $P_*$  menyatakan probabilitas dibawah distribusi empirik bootstrap.

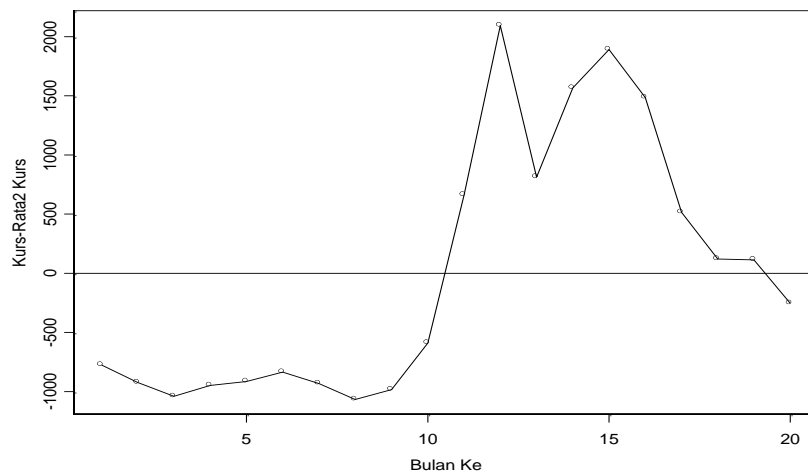
#### 4. Simulasi Monte Carlo

Simulasi Monte Carlo berikut menggunakan data runtun waktu mengenai kurs (nilai tukar) mata uang dolar Amerika terhadap rupiah. Data diunduh dari situs resmi milik Bank Indonesia, yakni <http://www.bi.go.id>. Data kurs diambil selama 20 bulan, dari bulan Januari 2008 sampai dengan Agustus 2009, sehingga diperoleh data runtun waktu berukuran  $n = 20$ . Pada setiap bulannya, data kurs diambil pada awal bulan. Data lengkapnya disajikan pada Tabel 1 berikut.

**Tabel 1** Data Kurs Dolar Amerika Terhadap Rupiah pada Bulan Januari 2008 Sampai Agustus 2009

Bulan(Thn)	Jan(08)	Feb(08)	Mar(08)	Apr(08)	Mei(08)	Jun(08)	Jul(08)
Kurs	9417	9269	9153	9245	9278	9357	9261
Bulan(Thn)	Agu(08)	Sep(08)	Okt(08)	Nop(08)	Des(08)	Jan(09)	Feb(09)
Kurs	9126	9209	9603	10854	12285	11005	11759
Bulan(Thn)	Mar(09)	Apr(09)	Mei(09)	Jun(09)	Jul(09)	Agu(09)	NA
Kurs	12083	11678	10708	10314	10306	9939	NA

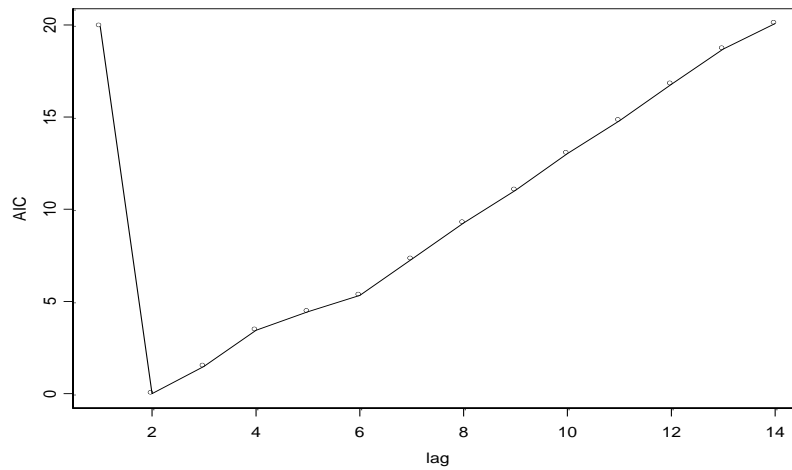
Program simulasi dikerjakan dengan menggunakan perangkat lunak S-Plus 2007. Plot dari data runtun pada Tabel 1 setelah dilakukan pemusatan terhadap rata-rata disajikan pada Grafik 1 di bawah ini. Dari grafik terlihat bahwa setelah data dipusatkan pada rata-ratanya, data menyebar di sekitar garis mendatar nol.



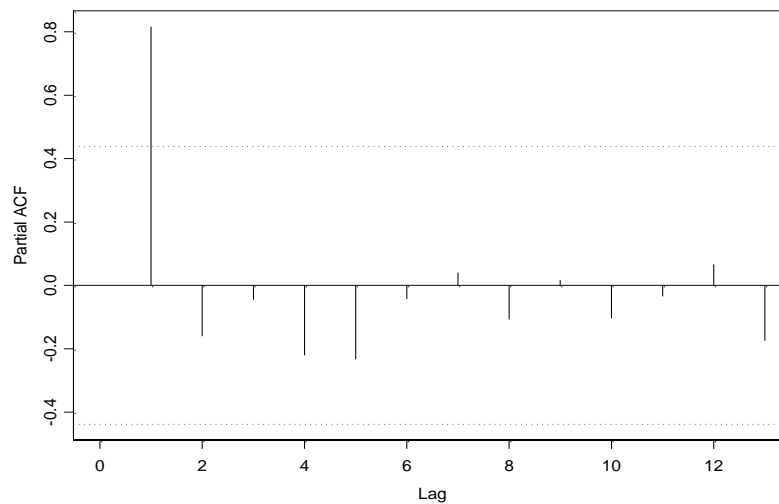
**Grafik 1** Plot Data Runtun Waktu

Selanjutnya kita identifikasi model yang sesuai dengan data tersebut. Untuk keperluan itu, kita cari dan plot kriteria informasi Akaike (AIC). Nilai-nilai AIC adalah sebagai berikut: 19,926; 0,000; 1,479; 3,438; 4,440; 5,325; 7,289; 9,257; 11,026; 13,021; 14,804; 16,781; 18,693; 20,073. Sementara plot untuk nilai-nilai AIC ini

disajikan pada Grafik 2. Dari Grafik 2 terlihat bahwa nilai AIC minimum dicapai pada  $lag\ k = 2$ . Sehingga order autoregresif yang sesuai adalah 1. Hal ini diperkuat juga dari plot PACF pada Grafik 3. Dari Grafik 3 tersebut terlihat bahwa PACF cenderung *cut-off* mulai  $lag$  kedua.



**Grafik 2** Plot Nilai-nilai AIC



**Grafik 3** Plot PACF

Berdasarkan fakta-fakta tersebut, model yang sesuai untuk data pada Tabel 1 adalah proses AR(1). Jadi, jika kita misalkan data kurs sebagai  $X_1, X_2, \dots, X_{20}$ , maka berlaku hubungan

$$X_t = \theta X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 2, 3, \dots, 20,$$

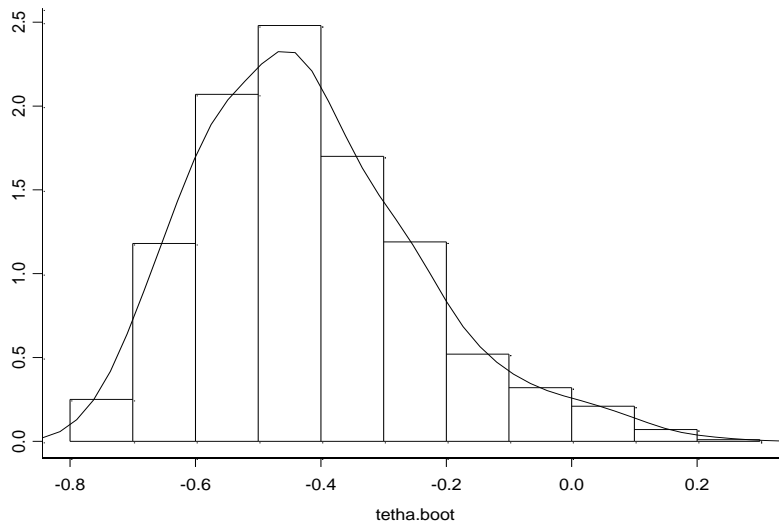


dengan  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ . Estimasi dari parameter  $\sigma^2$  adalah  $\hat{\sigma}^2 = 940.433$ , sehingga estimasi standar errornya adalah  $\sqrt{940.433} = 969,8$ . Untuk data pada Tabel 1, dengan menggunakan (3.1) diperoleh estimator Yule-Walker  $\hat{\theta}$  untuk parameter  $\theta$ , yakni sebesar -0,448 dan standar errornya adalah 0,1999. Dengan menggunakan Langkah-langkah pada Subbab 3, diperoleh estimator versi bootstrap dari  $\hat{\theta}$ . Dalam simulasi ini, digunakan sampel bootstrap  $B$  sebanyak 25, 50, 100, 200 dan 500. Dari masing-masing ukuran  $B$  tersebut, dengan menggunakan (2.2) kita hitung estimasi standar error dari  $\hat{\theta}^*$ , dinotasikan dengan  $se_{\hat{F}}(\hat{\theta}^*)$ . Hasil-hasil dari  $se_{\hat{F}}(\hat{\theta}^*)$  disajikan dalam Tabel 2. Untuk  $B = 50$ , estimasi standar error bootstrap cukup baik mendekati estimasi standar error non bootstrap. Artinya, untuk tinjauan standar error bootstrap, tidak perlu memakai ukuran sampel bootstrap  $B$  yang besar. Sementara mean dari estimator versi bootstrap adalah -0.4319, aproksimasi yang cukup baik terhadap estimator non bootstrap (estimator Yule-Walker).

**Tabel 2** Estimasi Standar Error dari  $\hat{\theta}^*$  untuk Beberapa  $B$

	$B$				
	25	50	100	200	500
$se_{\hat{F}}(\hat{\theta}^*)$	0,2003	0,1971	0,1957	0,1908	0,1839

Dari Tabel 2 terlihat bahwa semakin besar ukuran sampel bootstrap  $B$ , semakin kecil nilai estimasi standar error versi bootstrap dari estimator  $\hat{\theta}$ . Hal ini menunjukkan bahwa estimator bootstrap memiliki akurasi yang semakin baik seiring dengan meningkatnya ukuran sampel bootstrap  $B$  yang digunakan. Sementara itu, histogram densitas dari nilai-nilai estimator bootstrap  $\hat{\theta}^*$  disajikan pada Grafik 4. Dari Grafik 4 terlihat bahwa histogram yang dihasilkan mendekati grafik fungsi densitas dari distribusi normal. Hal ini mendukung apa yang telah dihasilkan dalam Freedman (1985) dan Bose (1988).



**Grafik 4** Histogram dan Estimasi Densitas Nilai-nilai Estimator Bootstrap  $\hat{\theta}^*$

## 5. Penutup

Berdasarkan hasil simulasi Monte Carlo untuk data kurs dolar Amerika terhadap rupiah pada bulan Januari 2008 sampai Agustus 2009, diperoleh model yang sesuai adalah proses AR(1). Estimator Yule-Walker  $\hat{\theta}$  untuk parameter  $\theta$  adalah -0,448 dengan standar error 0,1999. Sementara itu, dengan menggunakan metode bootstrap, diperoleh standar error versi bootstrap,  $\widehat{se}(\hat{\theta}^*)$ , sebesar 0,1908 yang berarti tingkat akurasinya lebih baik dibanding estimator Yule-Walker. Hasil ini sesuai dengan penelitian sebelumnya, misal pada Efron dan Tibshirani (1986) dan Hardle *et al.* (2003). Dari ilustrasi estimasi densitas dari  $\hat{\theta}^*$  terlihat bahwa estimasi distribusi dari  $\hat{\theta}^*$  mendekati distribusi normal. Jelas hal ini sesuai dengan Teorema Limit Pusat, yakni

$$\frac{\hat{\theta}^* - E(\hat{\theta}^*)}{\widehat{se}(\hat{\theta}^*)} \xrightarrow{d} N(0,1). \text{ Tentunya, hal ini juga sesuai dengan Teorema 1 dan 2.}$$

Namun demikian, berkaitan dengan hasil-hasil ini perlu diadakan penelitian lebih lanjut untuk mengkaji sifat konsistensi estimator bootstrap dan distribusi asimtotiknya. Pada banyak kasus, jumlah sampel  $n$  terbatas, jelas kita tidak mungkin bekerja dengan  $n \rightarrow \infty$ . Hanya jumlah sampel bootstrap  $B$  yang bisa kita buat besar ( $B \rightarrow \infty$ ) tetapi tidak mungkin  $B = \infty$ . Untuk itu, perlu diteliti juga konsistensi dan distribusi asimtotik dari estimator bootstrap untuk  $B \rightarrow \infty$ .

## DAFTAR REFERENSI

- Bickel, P. J. and Freedman, D. A. (1981) Some asymptotic theory for the bootstrap, *Ann. Statist.*, **9**, 1196-1217.
- Bose, A. (1988) Edgeworth correction by bootstrap in autoregressions, *Ann. Statist.*, **16**, 1709-1722
- Brockwell, P. J. and Davis, R. A. (1991) *Time Series: Theory and Methods*, Springer-Verlag, New York.
- DasGupta, A. (2008) *Asymptotic Theory of Statistics and Probability*, Springer, New York.
- Davison, A. C. and Hinkley, D. V. (2006) *Bootstrap Methods and Their Application*, Cambridge University Press, Cambridge.
- DiCiccio, T. J. and Romano, J. P. (1988) A review of bootstrap confidence intervals, *J. R. Statist.*, **50**, 338-354.
- DiCiccio, T. J. and Tibshirani, R. (1987) Bootstrap confidence intervals and bootstrap approximations, *J. Amer. Statist. Ass.*, **82**, 163-170.
- Efron, B. and Tibshirani, R. (1986) Bootstrap methods for standard errors, confidence intervals, and others measures of statistical accuracy, *Statistical Science*, **1**, 54-77.
- Efron, B. and Tibshirani, R. (1993) *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman & Hall, New York.
- Freedman, D. A. (1985) On bootstrapping two-stage least-squares estimates in stationary linear models, *Ann. Statist.*, **12**, 827-842.
- Hall, P. (1992) *The Bootstrap and Edgeworth Expansion*, Springer-Verlag, New York.
- Hardle, W., Horowitz, J. and Kreiss, J. P. (2003) Bootstrap methods for time series, *International Statist. Review*, **71**, 435-459.
- Lehmann, E. L. (1999) *Element of Large-Sample Theory*, Springer-Verlag, New York.
- Serfling, R. J. (1980) *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, New York.
- Shao, J. and Tu, D. (1995) *The Jackknife and Bootstrap*, Springer-Verlag, New York.
- Singh, K. (1981) On the asymptotic accuracy of Efron's bootstrap, *Ann. Statist.*, **9**, 1187-1195.
- Venables, W. N. and Ripley, B. D. (1996) *Modern Applied Statistics with S-Plus*, Springer, New York.
- Wei, W. W. S. (1990) *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods*, Addison Wesley, California.

## LAMPIRAN

### Program S-Plus untuk Simulasi Monte Carlo Estmasi Parameter Bootstrap

```
>#Data kurs 1 dolar Amerika terhadap rupiah
>data=c(9417,9269,9153,9245,9278,9357,9261,9126,9209,9603,10854,12285,
+      11005,11759,12083,11678,10708,10314,10306,9939)
>#Pemusatan data dan mengubah data menjadi objek data runtun waktu
>data.pusat=ts(data-mean(data))
>#Plot data runtun waktu
>ts.plot(data.pusat,type="o",xlab="Bulan Ke",ylab="Kurs-Rata2 Kurs")
>abline(h=0)
>#Menentukan kriteria informasi Akaike (AIC)
>AIC=ar(data.pusat)$aic
>plot(AIC,type="o",xlab="lag")
>#Plot PACF
>acf(data.pusat,type="partial")
>n=20 #Ukuran sampel
>B=200 #Ukuran sampel bootstrap
>#Menyiapkan matriks dan vektor untuk residu, X bootstrap (Xstar),
  Xstar.pusat dan tetha boot
>residu=matrix(0,B,n-1)
>Xstar=matrix(0,B,n)
>Xstar.pusat=matrix(0,B,n)
>tetha.boot=rep(0,B)
>#Menentukan tetha topi (estimator Yule-Walker dari tetha)
>for (k in 2:n) pemb.tetha=sum(data.pusat[k-1]*data.pusat[k])
>for (l in 1:n) peny.tetha=sum((data.pusat[l])^2)
>tetha.topi=pemb.tetha/peny.tetha
>#Standar error dari tetha
>se.tetha=sqrt((1-tetha.topi^2)/n)
>#Estimasi variansi dari white noise
>sigma.topi=(1-tetha.topi^2)*var(data.pusat)
>#Bootstrapping residu untuk mencari matriks X bootstrap dan tetha
  bootstrap
>for (b in 1:B)
+ {
+   residu[b,]=sample(ar(data.pusat)$resid[-1],replace=T)
+   for (t in 1:(n-1))
+     {
+       Xstar[b,1]=data.pusat[1]
+       Xstar[b,t+1]=tetha.topi*Xstar[b,t]+residu[b,t]
+       Xstar.pusat[b,]=Xstar[b,]-mean(Xstar[b,])
+     }
+   tetha.boot[b]=ar(Xstar.pusat[b,],F,1)$ar
+ }
>#Standar error dari tetha bootstrap
>se.tetha.boot=sqrt(var(tetha.boot))
>#Histogram dan estimasi densitas probabilitas dari tetha bootstrap
>hist(tetha.boot,style="old",prob=T)
>lines(density(tetha.boot))
```