

**RING REGULER YANG MEMENUHI SIFAT *STABLE RANGE ONE*
PADA HIMPUNAN MATRIKS BUJUR SANGKAR**

SKRIPSI

**Sebagai Salah Satu Syarat Memperoleh Gelar
Sarjana Sains Bidang Studi Matematika**



**Oleh
Rapianti
NIM 08121001043**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SRIWIJAYA
JULI 2017**

Lembar Pengesahan

**RING REGULER YANG MEMENUHI SIFAT *STABLE RANGE ONE* PADA
HIMPUNAN MATRIKS BUJUR SANGKAR**

SKRIPSI

**Sebagai Salah Satu Syarat Memperoleh Gelar
Sarjana Sains Bidang Studi Matematika**

Oleh :

**RAPIANTI
NIM 08121001043**

Inderalaya, Juli 2017

Pembimbing Pembantu

Pembimbing Utama



Evi Yuliza, S.Si, M.Si.
NIP. 19780727 200801 2 012



Novi Rustiana Dewi, S.Si, M.Si
NIP. 19701113 199603 2 002

**Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika**



Dra. Sugandi Yahdin, M.M
NIP. 19580727 198603 1 003

HALAMAN PERSEMBAHAN

MOTTO :

"Allah akan mengangkat (derajat) orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat (QS.Al-Mujadalah:11)"

"Maka nikmat Tuhan kamu yang manakah yang kamu dustakan? (QS.Ar-Rahman:13)"

"Jangan takut melangkah, karena jarak 1000 mil dimulai dari satu langkah"

Skripsi ini kupersembahkan kepada :

- ♥ Allah SWT dan Rasulullah SAW**
- ♥ Kedua Orang Tuaku Tercinta**
- ♥ Para Pemberi Ilmu**
- ♥ Adik-adikku Tersayang**
- ♥ Seluruh Keluarga Besarku**
- ♥ Semua Orang Yang Menyayangiku**
- ♥ Sahabat & Teman - Teman**
- ♥ Almamaterku**

KATA PENGANTAR

Assalammu'alaikum wr. wb

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT karena atas berkat rahmat, karunia, kasih sayang, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul “**Ring Reguler yang Memenuhi Sifat *Stable Range One* pada Himpunan Matriks Bujur Sangkar**” sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains Bidang Studi Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sriwijaya.

Dengan segala hormat dan kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada **Ayahanda Saidina Umar dan Ibunda Kordiah** atas segala kasih sayang, perhatian, dukungan, dan doanya. Penulisan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak baik secara langsung maupun tidak langsung, untuk itu penulis menyampaikan terima kasih sebesar-besarnya kepada :

1. Bapak **Prof. Dr. Iskhaq Iskandar, M.Sc.** selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sriwijaya.
2. Bapak **Drs. Sugandi Yahdin, M.M.** selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sriwijaya.
3. Bapak **Alfensi Faruk, M.Sc.** selaku Sekretaris Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sriwijaya.
4. Ibu **Indrawati, S.Si., M.Si.** selaku Pembimbing Akademik yang telah banyak memberikan waktu dan masukan untuk penulis.

5. Ibu **Novi Rustiana Dewi, S.Si., M.Si.** selaku Pembimbing Utama dan Ibu **Evi Yuliza, S.Si., M.Si.** selaku Pembimbing Pembantu yang telah bersedia menyediakan waktu, pikiran, motivasi dan saran serta kesabaran memberikan arahan dan bimbingan terbaik kepada penulis dalam masa perkuliahan dan penyusunan skripsi ini.
6. Bapak **Dr. Ngudiantoro, M.Si.**, Ibu **Dr. Fitri Maya Puspita, M.Sc.**, Bapak **Drs. Putra Bahtera Jaya Bangun, M.Si.** dan Bapak **Drs. Endro Setyo Cahyono, M.Si.** selaku Penguji Utama yang telah bersedia meluangkan waktu dalam memberikan tanggapan, kritik dan saran yang bermanfaat dalam perbaikan dan penyelesaian skripsi ini.
7. **Seluruh Dosen** Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sriwijaya yang telah memberikan ilmu kepada penulis selama masa perkuliahan.
8. **Adik-adikku (Deni Agusdian dan Rifkan Fadhliansyah) dan keluarga besarku** tersayang yang selalu memberikan semangat, nasehat dan doanya.
9. Sahabat karibku **Rana Sania, Islamiah, Elinda Damayanti, Titi Larastiana, Ilvinda Rezki dan Adella Rosita.** Terimakasih untuk semuanya, untuk semangatnya, untuk bantuannya, untuk hari-hari yang sudah dijalani bersama.
10. **Mbak Qia, Mbak Ani, Mbak Tias, Mbak Bunga, Mbak Wik** dan Mbak-mbak yang lainnya. Terima kasih atas dukungannya.
11. **Tri, Akbar, Emi, Nelda, Gita, Riza, Mail, Raka, Zhimi, Tama, Atoy, Cristin, dan Sika.** Terima kasih atas semuanya. Dukungan dan informasi yang bermanfaat untuk skripsi ini.

12. Sahabatku **Novika Sari, Endang Dewani, Novi Andini** dan seluruh teman sekolahku di SMAN 1 Tanjung Batu, terimakasih atas dukungannya selama ini, tetap jadi sahabat-sahabat terbaikku.
13. **Teman-teman seperjuangan dan seluruh angkatan '12.** Terimakasih atas dukungannya selama ini dan sudah menjadi bagian yang indah dalam hidupku.
14. Ibu **Hamidah** dan Kak **Irwansyah** yang telah memberikan bantuannya.
15. Untuk **semua kakak tingkat angkatan 2010 dan 2011 dan adik tingkat angkatan 2013, 2014, 2015 dan 2016** Jurusan Matematika yang tidak bisa disebutkan satu persatu, terimakasih atas bantuan dan dukungan yang telah diberikan.

Terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah disebutkan dan mohon maaf kepada semua pihak yang tidak bisa disebutkan satu per satu. Semoga skripsi ini dapat berguna dalam menambah wawasan dan pengetahuan.

Wassalammu 'alaikum wr. wb

Inderalaya, Juli 2017

Penulis

REGULAR RING SATISFYING THE STABLE RANGE ONE PROPERTIES IN THE SET OF SQUARE MATRIX

By :
RAPIANTI
08121001043

ABSTRACT

A ring R is regular rings if for every $x \in R$ there is $y \in R$ such that $x = xyx$. The set of all square matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ is the ring to the matrix addition and matrix multiplication. This research aims to observe regular ring having stable range one characteristic in the set of square matrices. From this research it is found that the set of square matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ is a regular ring if $\det(A) \neq 0$ for every $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. From research of the regular ring $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ having stable range one characteristic, it is found that the set $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ is stable range one if every entries on the main diagonal of the matrix of sum and multiplication in the form of $A + BY$ are not zero, with A , B and Y is square matrix that has special form, it is diagonal matrix, upper triangular matrix and lower triangular matrix. Regular ring $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ is a regular ring unit if $\det(X) \neq 0$ for every $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Keywords : Ring, Regular Rings, Stable Range One

**RING REGULER YANG MEMENUHI SIFAT *STABLE RANGE ONE*
PADA HIMPUNAN MATRIKS BUJUR SANGKAR**

Oleh:

RAPIANTI

08121001043

ABSTRAK

Suatu ring R disebut ring reguler jika untuk setiap $x \in R$ terdapat $y \in R$ sedemikian hingga $x = xyx$. Himpunan semua matriks-matriks bujur sangkar $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ merupakan ring terhadap operasi penjumlahan matriks dan perkalian matriks. Penelitian ini bertujuan untuk menyelidiki ring reguler yang memenuhi sifat *stable range one* pada himpunan matriks-matriks bujur sangkar. Dari penelitian ini diperoleh bahwa himpunan matriks-matriks bujur sangkar $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ merupakan ring reguler apabila $\det(A) \neq 0$ untuk setiap $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dari penyelidikan ring reguler $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ yang memenuhi sifat *stable range one* diperoleh bahwa himpunan $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ bersifat *stable range one* jika setiap entri-entri pada diagonal utama matriks hasil penjumlahan dan perkalian dalam bentuk $A + BY$ tidak bernilai nol, dengan matriks A , B dan Y merupakan matriks bujur sangkar yang memiliki bentuk khusus, yaitu matriks diagonal, matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah. Ring reguler $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ merupakan ring unit reguler jika $\det(X) \neq 0$ untuk setiap $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Kata Kunci : Ring, Ring Reguler, *Stable Range One*

DAFTAR ISI

	Halaman
Halaman Judul	i
Halaman Pengesahan	ii
Halaman Persembahan	iii
Kata Pengantar	iv
ABSTRACT	vii
ABSTRAK	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR LAMPIRAN	xi
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	3
1.3 Pembatasan Masalah	3
1.4 Tujuan	4
1.5 Manfaat	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Matriks Bujur Sangkar dan Sifat-sifat Aritmatika Matriks	5
2.2 Matriks Diagonal dan Matriks Segitiga	7
2.3 Invers Matriks	8
2.4 Grup	10
2.5 Ring Reguler	11
2.6 Ring <i>Stable Range One</i>	12

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Tempat	14
3.2 Waktu	14
3.3 Metode Penelitian	14

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Ring $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$	16
4.2 Ring Reguler $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	22
4.3 Ring Reguler $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ yang Memenuhi Sifat <i>Stable Range One</i>	23
4.4 Keterkaitan Ring Reguler $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ yang Memenuhi Sifat <i>Stable Range One</i> Merupakan Ring Unit Reguler	27

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan	38
5.2 Saran	38

DAFTAR PUSTAKA 39

LAMPIRAN 40

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1. Pembuktian Teorema 2.1.2	40
Lampiran 2. Pembuktian Teorema 2.2.1	52
Lampiran 3. Pembuktian Teorema 2.2.2	55
Lampiran 4. Pembuktian Teorema 2.3.1	56
Lampiran 5. Pembuktian Teorema 2.3.2	57
Lampiran 6. Pembuktian Teorema 2.3.6	58
Lampiran 7. Pembuktian Teorema 2.6.3	59
Lampiran 8. Pembuktian Teorema 2.6.4	60

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Informasi dalam bidang sains dan matematika seringkali ditampilkan dalam bentuk matriks. Dalam Aljabar Linier, matriks dipandang sebagai suatu objek matematis tersendiri dengan berbagai teori penting dan aplikasi yang luas.

Matriks merupakan suatu jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan yang membentuk suatu baris dan kolom. Ukuran matriks ditentukan berdasarkan jumlah baris dan jumlah kolom. Berdasarkan ukuran, matriks dapat dikelompokkan dalam sebuah himpunan tertentu. Suatu himpunan yang beranggotakan matriks-matriks bujur sangkar disebut himpunan matriks-matriks bujur sangkar.

Matriks memiliki aturan aritmatika tersendiri sebagai suatu objek matematis. Beberapa matriks juga dapat memiliki bentuk khusus, yaitu matriks diagonal dan matriks segitiga. Jika aritmatika matriks diterapkan pada bentuk-bentuk khusus ini maka akan diperoleh beberapa sifat dasar dari matriks dengan bentuk-bentuk khusus tersebut.

Beberapa operasi biner dan uner berlaku pada himpunan matriks antara lain penjumlahan, perkalian dan invers. Jika beberapa operasi biner tersebut dilengkapi pada himpunan matriks-matriks bujur sangkar maka dapat diselidiki struktur aljabar yang dipenuhi oleh himpunan matriks tersebut.

Teori ring merupakan struktur aljabar dengan dua operasi biner, yakni penjumlahan dan perkalian yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Lebih lanjut, struktur aljabar ring memiliki sifat-sifat khusus seperti terdapat elemen identitas terhadap operasi perkalian yang selanjutnya disebut ring dengan elemen satuan.

Goodearl and Menal (1988) memperkenalkan suatu struktur aljabar ring, yakni ring reguler yang merupakan sifat khusus dari ring. Chen (2000) menyelidiki suatu ring R yang memenuhi sifat *stable range one*, yakni jika $a, b \in R$ memenuhi $aR + bR = R$ maka terdapat $y \in R$ sehingga $a + by \in U(R)$. Himpunan $U(R)$ adalah himpunan semua unit dalam R .

Beberapa peneliti telah menyelidiki ring yang memenuhi sifat *stable range one*, diantaranya adalah Chen (2001), Goodearl and Menal (1988). Keterkaitan antara ring reguler R dengan sifat *stable range one* dikemukakan oleh Chen (2000). Goodearl (1991) menyelidiki keterkaitan antara ring reguler yang memenuhi sifat *stable range one* dengan unit reguler. Chen and Chin (2002) memberikan bukti lain bahwa ring reguler memenuhi sifat *stable range one* jika dan hanya jika ring tersebut merupakan unit reguler. Yuliza (2010) menyelidiki ring reguler yang memenuhi sifat *stable range one* sehingga pembuktian beberapa teorema menjadi lebih jelas dan sistematis. Willianto dkk (2016) menyelidiki ring reguler yang memenuhi sifat *stable range one* pada himpunan bilangan bulat modulo n . Dari penelitian ini diperoleh bahwa ring reguler yang memenuhi sifat *stable rang one* dan ring unit reguler pada himpunan bilangan bulat modulo n apabila n prima. Sifat-sifat ring reguler *stable range one* pada himpunan bilangan bulat modulo n berlaku sifat komutatif, sebab

himpunan bilangan bulat modulo n bersifat komutatif terhadap operasi perkalian modulo n .

Oleh karena itu, peneliti termotivasi untuk menyelidiki apakah syarat-syarat ring reguler yang memenuhi sifat *stable range one* pada himpunan matriks-matriks bujur sangkar. Kemudian akan diselidiki keberlakuan sifat *stable range one* pada himpunan matriks-matriks bujur sangkar. Himpunan matriks-matriks bujur sangkar terhadap operasi perkalian matriks tidak bersifat komutatif. Selanjutnya, ring yang dimaksud dalam penelitian ini tidak diharuskan bersifat komutatif.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dapat dirumuskan permasalahan sebagai berikut:

1. Apakah syarat-syarat ring reguler pada himpunan matriks-matriks bujur sangkar?
2. Apakah syarat-syarat ring reguler yang memenuhi sifat *stable range one* pada himpunan matriks-matriks bujur sangkar?
3. Bagaimana keterkaitan ring reguler yang memenuhi sifat *stable range one* merupakan ring unit reguler pada himpunan matriks-matriks bujur sangkar ?

1.3 Pembatasan Masalah

Penelitian ini menggunakan matriks bujur sangkar dengan entri-entrinya merupakan anggota himpunan bilangan riil \mathbb{R} .

1.4 Tujuan

Tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Menyelidiki syarat-syarat ring reguler pada himpunan matriks-matriks bujur sangkar.
2. Menyelidiki syarat-syarat ring reguler yang memenuhi sifat *stable range one* pada himpunan matriks-matriks bujur sangkar.
3. Menyelidiki keterkaitan ring reguler yang memenuhi sifat *stable range one* merupakan ring unit reguler pada himpunan matriks-matriks bujur sangkar.

1.5 Manfaat

Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Meningkatkan kemampuan pemahaman mahasiswa tentang teori ring serta memperoleh suatu kejadian khusus dari teori ring yakni ring reguler yang memenuhi sifat *stable range one* pada himpunan matriks-matriks bujur sangkar.
2. Menambah referensi, khususnya mata kuliah yang berkaitan dengan aljabar linier dan aljabar abstrak.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H., dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi*. Edisi Kedelapan Jilid 1. Jakarta : Erlangga.
- Bhattacharya, P.B., Jain, S.K. and Nagpaul, S.R. 1995. *Basic Abstract Algebra*. 2nd edition.
- Chen, H. 2000. *On Generalized Stable Rings*. Comm. Algebra (28). 1907 – 1917.
- Chen, H. 2001. *Reguler Rings with Finite Stable Range*. Comm. Algebra (29). 157 – 166.
- Chen, H., and Chin, A.Y.M. 2002. *A Note On Regulers Rings With A Stable Range one*. IJMMS.Hindawi.Com (31:7): 449 – 450
- Fraleigh, J.B. 2003. *A First Course in Abstract Algebra*. 7th edition.
- Goodearl, K. R., Menal, P. 1988. *Stable Range one for Rings with Many Units*. J Pure Applic. Algebra (54). 261 – 287.
- Goodearl, K.R. 1991. *Von Neumann Reguler Rings*. 2nd edition. Malabar. Florida : Krieger.
- Nicholson, W.K. 2001. *Elementary Linear Algebra*. First edition.
- Willianto, R., E. Yuliza dan E.S. Cahyono. 2016. *Reguler Ring Have Stable Range One Characteristic In Set Of Integer Modulo n*. *Prosiding Semirata Bidang MIPA BKS Wilayah Barat*. Palembang. ISBN:978-602-71798-1-3. Hal. 788-792.
- Yuliza, E. 2010. *Ring Reguler yang Memenuhi Sifat Stable Range one*. Jurnal Penelitian Sains. ISSN:1410-7058. Vol. 13 No. 3 September.