APLIKASI DIAGONALISASI MATRIKS DALAM MENENTUKAN PEWARISAN GENOTIP PADA TEORI GENETIKA

SKRIPSI

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
Sarjana Sains Bidang Studi Matematika

Oleh :
RAKHATAMA GUSRI
NIM 08121001018

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SRIWIJAYA
SEPTEMBER 2017

LEMBAR PENGESAHAN

APLIKASI DIAGONALISASI MATRIKS DALAM MENENTUKAN PEWARISAN GENOTIP PADA TEORI GENETIKA

SKRIPSI

Sebagai Salah Satu Syarat Memperoleh Gelar
Sarjana Sains Bidang Studi Matematika

Oleh :

RAKHATAMA GUSRI
NIM. 08121001018

Inderalaya, September 2017

Pembimbing Pembantu	**Pembimbing Utama**
Evi Yuliza, M.Si	**Indrawati, M.Si**
NIP. 19780727 200801 2 012	NIP. 19710610 199802 2 001

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Drs, Sugandi Yahdin, M.M
NIP. 19580727 198603 1 003

HALAMAN PERSEMBAHAN

MOTTO

"Barang siapa yang menempuh jalan untuk mencari suatu ilmu.
Niscaya Allah memudahkannya ke jalan menuju surga".
(HR. Turmudzi)

"Kita adalah apa yang kita pikirkan"– RtG

Kupersembahkan kepada :

Ama dan Apa tercinta

Adek-adekku Raja dan Ibnu tersayang

Keluarga dan semua orang yang menyayangiku

Teman-teman seperjuanganku

Almamater

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Puji syukur kehadirat Allah SWT Yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang atas segala limpahan rahmat, karunia, serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini sesuai dengan waktu yang telah direncanakan dengan judul **"APLIKASI DIAGONALISASI MATRIKS DALAM MENENTUKAN PEWARISAN GENOTIP PADA TEORI GENETIKA"**. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Besar kita Nabi Muhammad SAW beserta seluruh keluarga dan sahabatnya yang telah membawa kita dari zaman kebodohan ke zaman yang terang benderang.

Dengan penuh rasa hormat, cinta, kasih sayang dan kerendahan hati, penulis mempersembahkan skripsi ini khusus untuk kedua orang tua tercinta, terkasih dan tersayang **Bapak Khaidir** dan **Ibu Gusniati** yang telah merawat dan mendidik penulis dengan penuh rasa cinta dan kasih sayang, serta dukungan yang sangat berharga berupa motivasi keluarga, do'a, perhatian, semangat, serta material untuk penulis selama ini.

Penulis menyadari bahwa keberhasilan penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari bantuan pembimbing, dan berbagai pihak lain baik langsung maupun tidak langsung. Dalam kesempatan ini, penulis ingin menyampaikan terimakasih kepada :

1. Ibu **Indrawati, M.Si** selaku Dosen Pembimbing Utama yang telah bersedia meluangkan waktu dengan penuh kesabaran dan perhatian dalam memberikan banyak ide pemikiran, bimbingan, nasehat, pengarahan, serta kritik dan saran yang sangat berguna bagi penulis selama pengerjaan skripsi sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan sesuai dengan waktu yang direncanakan.

2. Ibu **Evi Yuliza, M.Si** selaku Dosen Pembimbing Pembantu dan Dosen Pembimbing Akademik yang juga telah banyak memberikan arahan dan bimbingan kepada penulis selama pengerjaan skripsi ini maupun selama belajar di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya.
3. Bapak **Drs. Sugandi Yahdin, M.M** selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya dan selaku Dosen Penguji Utama yang telah bersedia meluangkan waktunya dalam memberikan tanggapan yang bermanfaat dalam perbaikan penyelesaian skripsi ini.
4. Ibu **Irmeilyana, M.Si** selaku Dosen Penguji Utama yang telah bersedia meluangkan waktunya dalam memberikan tanggapan, kritik serta saran yang bermanfaat dalam perbaikan penyelesaian skripsi ini.

Selain itu, penulis juga mendapatkan dukungan dari pihak-pihak lain selama masa perkuliahan hingga penyelesaian skripsi ini. Oleh karena itu, penulis juga ingin mengucapkan terima kasih kepada :

1. Seluruh **Dosen di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya, Guru-Guru penulis di SMA Negeri 1 Pariaman, SMP Negeri 1 Pariaman, dan SD Negeri 13 Manggung.** Terima kasih atas ilmu yang telah diberikan untuk penulis selama proses pendidikan.
2. Adek-adeku **Raja Dwikha Gusri dan Dirra Ibnufajar Tri Gusri**, terima kasih atas semangat, do’a, motivasi dan dukungan yang telah diberikan.
3. Sahabat terbaikku **Amira Fitri Adila**, **Ahmad Junaidi**, **Defita Yolanda**, **Dewi Rakhmatia Nur**, **Ismail**, **M. Ario Wibowo**, **Azhimi**, dan **Ramadhan**

Pratama, terima kasih buat canda dan tawa kalian dan kebersamaan kita selama ini, semoga kita menjadi sahabat selamanya.

4. Sahabat-sahabat seperjuangan: **M. Isra Sahara, Achmad Fahlevy Faradibta, Rizki Hidayat, Whel Murdania, Carlina Bela, Olivia S, Akbar Yulanda**, **M. Syahrisal. A**, **Emi Widarti**, **Nelda Amelia**, **M. Allbar Pratama, Reyfaldo Tomy, Atoihilah Abdul Latif, Dian Permata Sari, Triyani, Titi Larastiana, Adela Rosita**, **Tita Adeasty, Chandra Gunawan** dan seluruh teman-teman angkatan 2012, terima kasih untuk semua canda tawa, suka duka, nasehat, semangat, dukungan, cita-cita dan harapan yang telah kita lewati bersama. Semoga persahabatan ini tidak berakhir sampai disini, tetapi terus terjalin selama-lamanya, karena kita adalah keluarga.
5. **Kakak tingkat Angkatan** 2009, 2010, 2011 serta **adik tingkat Angkatan** 2013, 2014, 2015 dan 2016 terima kasih atas segala bentuk *support* yang telah diberikan.
6. **Kak Iwan, dan Bu Hamidah** yang telah banyak membantu dalam proses administrasi.
7. **Hermin Syahidah** yang telah banyak memberikan motivasi dalam proses pembuatan skripsi.
8. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu yang telah memberikan do’a, dukungan dan masukan yang berguna untuk menyelesaikan skripsi ini. Semoga segala kebaikan dan pertolongan semuanya mendapatkan berkah dari Allah SWT.

Akhir kata dengan segala kerendahan hati, penulis mohon maaf apabila masih banyak kekurangan dalam penyusunan skripsi ini dan masih jauh dari kesempurnaan, maka saran dan kritik yang membangun dari semua pihak sangat diharapkan demi penyempurnaan selanjutnya. Semoga skripsi ini dapat menambah pengetahuan dan bermanfaat bagi semua pihak yang memerlukan. Amin.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb

Indralaya,   September 2017

Penulis

APPLICATION OF MATRIX DIAGONALIZATION IN DETERMINING GENOTYPE INHERITANCE ON GENETIC THEORY

By:

Rakhatama Gusri
08121001018

ABSTRACT

One of linear algebra application in the field of genetics is the concept of matriks diagonalization on the recursive equation. This study aims to determine the inheritance of genotype in the *n*th generation in the case of autosomal inheritance. In the case of autosomal inheritance, it is determined probability of inherits generation that inherits the parent's genotype. Then, determine the genotype distribution model in the *n*th generation. In the case of autosomal inheritance, all inherit have AA (normal homozygot) if each parents with genotype AA, Aa, aa are mated to the normal homozygot AA genotene couple. All inherit have AA (normal homoygot), Aa (normal heterozygot), and aa if each parents with genotype AA, Aa, aa are mated with normal heterozygot (Aa) geneploting couples. All inherit have aa, if each parents with genotype AA, Aa, aa are mated to the couple with the genotype of aa.

Keyword : Matrix Diagonalization, Recursive Equation, Autosomal Inheritance.

APLIKASI DIAGONALISASI MATRIKS DALAM MENENTUKAN PEWARISAN GENOTIP PADA TEORI GENETIKA

Oleh:

Rakhatama Gusri
08121001018

ABSTRAK

Salah satu aplikasi aljabar linier di bidang genetika adalah konsep diagonalisasi matriks pada persamaan rekursif. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan pewarisan genotip pada generasi ke-*n* dalam kasus pewarisan autosomal. Dalam kasus pewarisan autosomal ditentukan peluang generasi keturunan yang mewarisi genotip induk. Kemudian menentukan model distribusi genotip pada generasi ke-*n*. Pada kasus pewarisan autosomal semua keturunan bergenotip AA (normal homozygot) apabila setiap induk bergenotip AA, Aa, aa dikawinkan dengan pasangan bergenotip normal *homozygot* (AA). Semua keturunan bergenotip AA (normal homozygot), Aa (normal heterozygot), dan aa apabila setiap induk bergenotip AA, Aa, aa dikawinkan dengan pasangan bergenotip normal *heterozygot* (Aa). Semua keturunan bergenotip aa apabila setiap induk bergenotip AA, Aa, aa dikawinkan dengan pasangan bergenotip aa.

Kata Kunci : Diagonalisasi Matriks, Persamaan Rekursif, Pewarisan Autosomal.

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Genetika merupakan ilmu yang mewarisi tentang pewarisan beberapa karakteristik bentuk fisik dari kedua orangtuanya (induk). Genetika merupakan salah satu masalah yang dibahas dalam Aljabar Linear Terapan, genetika berusaha menjelaskan material pembawa informasi untuk diwariskan (bahan genetik) dan bagaimana informasi itu dipindahkan dari satu individu ke individu lain (pewarisan genetik). Salah satu aplikasi aljabar linier di bidang genetika adalah konsep diagonalisasi pada persamaan rekursif.

Menurut Warningsih (2016) Suatu komponen sifat yang menurun dan mengendalikan karakteristik dari makhluk hidup sehingga berbeda dari yang lainnya dalam satu jenis dikenal dengan gen. Gen ialah materi terkecil penyusun makhluk hidup yang menentukan sifat dan karakteristik suatu organisme. Sifat yang tampak dari makhluk hidup seperti bentuk tubuh dan warna disebut sifat fenotip. Sedangkan sifat organisme yang tidak tampak dari suatu organisme disebut sifat genotip.

Menurut Ernawati dan Purwadi (2009) pewarisan *Autosomal* merupakan pewarisan sifat keturunan yang ditentukan oleh gen pada *Autosom*, sehingga dapat dijumpai pada jantan maupun betina karena keduanya mempunyai *Autosom* yang sama. Tata cara pewarisan genotip tipe ini adalah bahwa satu individu mewariskan satu gen dari setiap induknya untuk membentuk pasangan gen tersendiri. Jika induk yang satu memiliki dua gen yang berbeda, maka keturunan akan menerima salah satu dari kedua gen itu.

Dalam perkembangannya teori genetika tidak dapat berdiri sendiri, melainkan harus bekerja dengan ilmu lainnya, diantaranya matematika. Perkembangan operasi matriks menghasilkan metode yang dapat diterapkan dalam bidang lain yakni diagonalisasi matriks.

Yuliani,dkk (2012) membahas konsep diagonalisasi matriks dan penggunaan matriks Leslie untuk memproyeksikan jumlah populasi individu perempuan dalam kurun waktu tertentu. Ernawati dan Purwadi (2009) membahas program pendeteksian distribusi pewarisan genotip suatu populasi untuk tipe pewarisan autosomal dengan metode QR. Indriani (2015) membahas tentang persamaan rekursif dan diperoleh formulasi untuk kasus pewarisan sifat pada kasus autosomal, resesif autosomal dengan gen letal aa, dan pewarisan sifat terkait-X. Wijayanto (2013) membahas tentang penerapan model persamaan diferensi dalam penentuan probabilitas genotip keturunan dengan dua sifat beda.

Pada penelitian ini dibahas aplikasi diagonalisasi matriks pada dalam menentukan pewarisan genotip pada teori genetika.

1.2. Perumusan Masalah

Permasalahan yang dibahas dalam penelitian ini adalah bagaimana menentukan pewarisan genotip pada teori genetika dengan diagonalisasi matriks.

1.3. Pembatasan Masalah

Penelitian ini dibatasi pada:

1. Persilangan antara genotip induk dibatasi hanya pada tiga kasus yaitu genotip induk disilangkan dengan genotip normal *homozygot*, genotip induk disilangkan dengan genotip normal *heterozygot*, genotip induk disilangkan dengan genotip pembawa penyakit.
2. Asumsi pewarisan sifat fenotip diatur oleh 2 gen yaitu, gen A dan gen a. Tanpa melihat faktor lain yang mempengaruhi pewarisan sifat seperti Kromosom, Alel, DNA, Poligen, Sifat Intermedier.

1.4. Tujuan

Tujuan yang diperoleh dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan pewarisan genotip dengan menggunakan diagonalisasi matriks.

1.5. Manfaat

Manfaat dari penelitian ini yaitu :

1. Dapat dijadikan referensi pada mata kuliah yang relevan seperti Aljabar Linier Terapan.
2. Dapat menambah wawasan tentang aplikasi diagonalisasi matriks.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dibahas mengenai tinjauan pustaka yang berhubungan dengan permasalahan yang dibahas pada Bab IV.

2.1. Matriks

2.1.1 Pengertian Matriks

Menurut Rorres (2004), matriks adalah susunan sekelompok bilangan dalam suatu jajaran berbentuk persegi panjang yang diatur berdasarkan baris dan kolom dan diletakkan antara dua tanda kurung. Tanda kurung yang digunakan untuk mengapit susunan anggota matriks tersebut adalah tanda kurung siku. Setiap bilangan pada matriks disebut elemen (unsur) matriks. Secara umum matriks dapat ditulis sebagai berikut :

$$M_{m\times n} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Kumpulan elemen yang tersusun secara horizontal disebut baris, sedangkan kumpulan elemen yang tersusun secara vertikal disebut kolom. Suatu matriks yang memiliki m baris dan n kolom disebut sebagai matriks yang memiliki ordo $m \times n$. Matriks dinotasikan dengan huruf kapital, sedangkan elemen-elemen dalam matriks M dengan huruf kecil yang dicetak miring.

2.1.2. Jenis Matriks

Beberapa jenis matriks menurut Imrona (2009), yaitu :

1. Matriks Bujur Sangkar

Matriks bujur sangkar yaitu matriks yang banyak barisnya sama dengan banyak kolomnya. Dalam matriks bujur sangkar dikenal diagonal utama yaitu entri-entri yang mempunyai nomor baris yang sama dengan nomor kolom. Bentuk umum matriks bujur sangkar sebagai berikut :

$$M_{n\times n} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

2. Matriks Segitiga Atas

Matriks segitiga atas adalah matriks bujur sangkar yang semua entri di bawah diagonal utama bernilai nol, sedangkan entri di atas diagonal utama paling sedikit ada satu elemen yang tak nol. Bentuk umum matriks segitiga atas sebagai berikut :

$$M_{n\times n} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

3. Matriks Segitiga Bawah

Matriks segitiga bawah adalah matriks bujur sangkar yang semua entri di atas diagonal utamanya bernilai nol, sedangkan entri di bawah diagonal utama paling sedikit ada satu elemen yang tak nol. Bentuk umum matriks segitiga bawah sebagai berikut

$$M_{n\times n} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

4. Matriks Diagonal

Matriks diagonal yaitu matriks bujur sangkar yang semua entri di luar diagonal utamanya bernilai nol. Bentuk umum matriks diagonal sebagai berikut :

$$D_{n\times n} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

5. Matriks Satuan

Matriks satuan (matriks identitas) yaitu matriks diagonal yang entri-entri pada diagonal utamanya adalah bilangan satu dan entri-entri lainnya adalah bilangan nol. Matriks satuan ini dilambangkan dengan I_n , di mana n adalah ordo matriks tersebut. Bentuk umum matriks satuan (identitas) sebagai berikut :

$$I_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

6. Matriks Skalar

Matriks skalar adalah matriks diagonal yang semua entri pada diagonal utamanya bernilai sama, misalnya c, dengan $c \neq 0$. Bentuk umum matriks skalar sebagai berikut :

$$S_{n\times n} = \begin{bmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{bmatrix}$$

Pengaruh perkalian sebarang matriks dengan matriks skalar adalah seperti mengalikan matriks sebarang tersebut dengan skalar c.

7. Matriks Nol

Matriks nol yaitu matriks yang semua entrinya adalah bilangan nol. Jika ordo dipentingkan matriks nol ini dapat ditulis beserta jumlah baris dan kolomnya. Bentuk umum matriks nol sebagai berikut :

$$O_{n\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

8. Matriks Invers

Matriks bujur sangkar M disebut mempunyai invers jika terdapat matriks N yang sedemikian rupa sehingga memenuhi $NM = MN = I$. Untuk notasi, invers matriks N biasanya dinyatakan oleh N^{-1}.

9. Matriks Simetrik

Matriks bujur sangkar disebut matriks simetrik jika $M = M^T$. Entri-entri pada diagonal utama sebagai sumbu pencerminan sedangkan entri pada baris ke-i kolom ke-j akan dicerminkan sehingga sama dengan entri kolom ke-i baris ke-j atau:

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Jika $M^T = -M$, maka matriks bujur sangkar disebut anti simetrik, yaitu matriks yang transposenya adalah negatif dari matriks tersebut, dan elemen diagonal utamanya =0.

2.1.3. Operasi Matriks

Beberapa operasi dari matriks menurut Rorres (2004) diantaranya :

1. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Jika M dan N adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama, maka jumlah $M + N$ adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri pada N dengan entri-entri yang bersesuaian pada M sedangkan selisih pengurangan $M - N$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan entri-entri pada M dengan entri-entri yang bersesuaian pada N.

2. Kelipatan Skalar

Jika M adalah matriks sebarang dan c adalah skalar sebarang, maka hasil kalinya (*product)* cM adalah matriks yang diperoleh dari perkalian setiap entri pada matriks M dengan bilangan c. Matriks cM disebut sebagai kelipatan skalar *(scalar multiple)* dari M.

3. Perkalian Matriks

Dua buah matriks dapat dikalikan apabila jumlah kolom pada matriks pertama sama dengan jumlah baris pada matriks kedua.

4. Transpos Matriks

Jika M adalah matriks $m \times n$, maka transpos dari M dinyatakan dengan M^T, yang mana M^T mempunyai ordo $n \times m$.

2.2. Diagonalisasi Matriks

Suatu matriks bujur sangkar M dikatakan dapat didiagonalisasi jika terdapat sebuah matriks P yang dapat dibalik sedemikian rupa sehingga:

$$P^{-1}MP = D \tag{2.2}$$

dengan *D* suatu matriks diagonal, matriks *P* dikatakan mendiagonalisasi *M* (Anton, 2012).

Teorema 2.1:

Jika *M* adalah sebuah matriks berukuran *n x n*, maka kedua pernyataan ini adalah ekuivalen:

1. *M* dapat didiagonalisasi
2. *M* memiliki *n* vektor eigen yang bebas linier.

Pembuktian Teorema 2.1 dapat dilihat pada lampiran 1.

Langkah – langkah yang digunakan untuk mendiagonalisasi suatu matriks *M*, yaitu :

i. Tentukan *n* vektor eigen dari *M* yang bebas linier, misalkan, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$
ii. Bentuk sebuah matriks *P* dengan $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ sebagai vektor–vektor kolomnya
iii. Matriks $P^{-1}MP$ kemudian akan menjadi matriks diagonal dengan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sebagai entri-entri diagonalnya secara berurutan, λ_i adalah nilai eigen yang berpadanan dengan $\mathbf{p}_i$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ (Anton, 2012).

2.3. Nilai dan Vektor Eigen

Definisi 2.1 Jika *M* adalah sebuah matriks *n x n*, maka sebuah vektor tak nol **x** pada $\mathbf{R}^n$ disebut vektor eigen (*eigen vektor*) dari *M* jika *M***x** adalah sebuah kelipatan skalar dari **x**, dapat ditulis:

$$M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (2.3.1)$$

Skalar λ dinamakan nilai eigen dari M dan $\mathbf{x}$ dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ. Pencarian nilai eigen matriks M yang berukuran $n \times n$ dapat dituliskan kembali sebagai:

$$M\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x} \tag{2.3.2}$$

atau secara ekuivalen

$$(\lambda I - M)\mathbf{x} = 0 \tag{2.3.3}$$

Supaya λ menjadi nilai eigen, maka haruslah ada pemecahan tak nol dari Persamaan (2.3.3). Pemecahan tersebut diperoleh jika dan hanya jika

$$|\lambda I - M| = 0 \tag{2.3.4}$$

Persamaan (2.3.4) dinamakan persamaan karakteristik M. Sedangkan skalar yang memenuhi Persamaan (2.3.4) adalah nilai eigen dari M (Anton, 2012).

Teorema 2.2:

Jika M adalah sebuah matriks $n\ x\ n$ dan λ adalah sebuah bilangan riil, maka pernyataa-pernyataan berikut ini adalah ekuivalen (Anton, 2012):

1. λ adalah sebuah nilai eigen dari M
2. Persamaan $(\lambda I - M)\mathbf{x} = 0$ memiliki solusi nontrivial
3. Terdapat sebuah vektor tak nol $\mathbf{x}$ pada $\mathbf{R}^n$ sedemikian sehingga $M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$
4. λ adalah sebuah solusi dari Persamaan karakteristik $|\lambda I - M| = 0$.

Pembuktian Teorema 2.2 dapat dilihat pada lampiran 2.

2.4. Basis

Definisi 2.2 Jika *V* adalah suatu ruang vektor sebarang dan $S = \{\mathbf{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ adalah suatu himpunan vektor-vektor pada *V*, maka S disebut basis untuk *V* jika dua syarat berikut terpenuhi:

1. *S* bebas linier.
2. *S* merentang *V*.

Teorema 2.3:

Jika $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n\}$ adalah suatu basis dari ruang vektor *V*, maka setiap vektor **v** pada *V* dapat dinyatakan dalam bentuk $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$ dengan tepat satu cara (Anton, 2012).

Pembuktian Teorema 2.3 dapat dilihat pada lampiran 3.

2.5. Persamaan Rekursif

Definisi 2.3 Persamaan rekursif:

$$\mathbf{x}^{(n)} = M\mathbf{x}^{(n-1)}, n = 1,2,3, \dots \quad (2.5.1)$$

M merupakan matriks yang dapat didiagonalisasi. Berdasarkan Persamaan (2.5.1) diperoleh:

$$\mathbf{x}^{(n)} = M^n\mathbf{x}^{(0)} \quad (2.5.2)$$

(Anton, 2009)

2.6. Genetika

Genetika tergolong dalam ilmu hayat yang mempelajari turun-temurunnya sifat-sifat induk atau orangtua kepada keturunannya. Sejak ditemukan hukum keturunan pada permulaan abad ke-20 sampai sekarang genetika mengalami kemajuan sangat pesat.

Genetika merupakan ilmu pengetahuan dasar dalam usaha meyediakan bibit tanaman dan ternak unggul di bidang pertanian dan peternakan. Di bidang kedokteran genetika mempunyai lingkup yang sangat luas, bersifat akademis dan praktis, antar lain membahhas tentang peranan kromosom, pewarisan sifat-sifat genetik dan sifat-sifat antropologik, terjadinya cacad badan dan mental yang disebabkan oleh kelainan kromosom. Timbulnya penyakit karena kesalahan metabolisme bawaan, berbagai variasi respon terhadap obat-obatan, transplantasi, penyakit autoimun dan golongan darah, aspek keturunan pada kanker. Di samping itu genetika dibidang kedokteran juga menyangkut beberapa aspek keluarga, antara lain diagnosis kelainan genetik pada bayi sebelum lahir, penyuluhan tentang kemungkinan resiko mendapatkan anak dengan kelainan genetik sehinngga erat hubungan nya dengan program keluarga berencana, identifikasi bayi tertukar dan adopsi anak (Suryo, 2012).

Penelitian tentang pewarisan sifat melalui penyilangan pertama kali dilakukan oleh Gregor Johann Mendel (1822-1884), seorang biarawan di brunn, Austria. Mendel menyilangkan berbagai tanaman kacang ercis. Hasil persilangan menunjuan adanya pewarisan dari sifat-sifat dari induk ke keturunannya (Susanto, 2011).

2.7. Hukum Mendel

Pada bidang genetika dikenal adanya hukum *Mendel.* Hukum *Mendel* ada dua yaitu :

Hukum I mendel berbunyi: “Pada waktu berlangsung pembentukan gamet, setiap pasang gen disegregasi ke dalam masing-masing gamet yang terbentuk”(Cahyono, 2010).

Sebagai contoh, individu TT akan membentuk gamet T dann individu tt akan membentuk gamet t. Pada individu Tt akan membentuk gamet T dan t, terlihat bahwa gen T dan gen t dipisahkan (disegregasi) ke dalam gamet-gamet yang terbentuk tersebut (Susanto, 2011).

Hukum II Mendel berbunyi: “segregasi suatu pasangan gen tidak bergantung kepada segregasi pasangan gen lainnya, sehingga didalam gamet-gamet yang terbentuk akan terjadi pemilihan kombinasi gen-gen secara bebas” (Cahyono, 2010).

Sebagai contoh, jika gen yang menyebabkan biji berwarna kuning dan hijau masing-masing adalah gen G dan gen g, sedangkan gen yang menyebabkan biji halus dan keriput masing-masing adalah gen W dan gen w, maka persilangan dihibrid tersebut akan menghasilkan individu keturunan pertama dengan genotip GgWw (Susanto, 2011).

2.8. Pewarisan Autosomal

Sifat autosomal adalah sifat keturunan yang ditentukan oleh gen pada autosom. Gen pada autosom mempunyai dua macam yaitu dominan dan resesif. Karena jantan dan betina mempunyai autosom yang sama, maka sifat keturunan yang ditentukan oleh gen autosomal dapat ditemukan pada jantan maupun betina (Wijayanto, 2013). Pada pewarisan autosomal suatu keturunan akan mewarisi satu gen dari pasangan gen induknya. Besarnya peluang suatu keturunan mendapatkan warisan satu gen dari pasangan gen salah satu induknya adalah sama. Jika suatu induk memiliki genotip Aa maka peluang keturunannya mewarisi gen A sama dengan peluang keturunannya mewarisi gen a. Jadi, jika induk pertama bergenotip Aa dan induk kedua bergenotip Aa maka genotip keturunan yang mungkin terjadi adalah AA, Aa, dan aa. Pada pewarisan gen autosomal dominan, jika individu heterozigotik (pembawa penyakit) kawin dengan individu normal maka dalam keturunan kemungkinan timbulnya penyakit adalah 50 %. Sedangkan sifat keturunan yang ditentukan oleh sebuah gen resesif pada autosom baru akan tampak apabila suatu individu menerima gen itu dari kedua orang tuanya. Biasanya kedua orang tua itu nampak normal meskipun mereka itu sebenarnya pembawa (carier) gen resesif yang dimaksud, berarti bahwa mereka itu masing-masing heterozigotik (Wijayanto, 2013)

2.9. Persilangan Satu Sifat Beda (Monohibrid)

Persilangan satu sifat beda didasarkan pada percobaan Mendel yang menyilangkan tanaman ercis (Pisum sativum) tinggi dan tanaman ercis pendek yang masing-masing merupakan galur murni. Wijayanto (2013) mengemukakan bahwa sebelum melakukan suatu persilangan, setiap individu menghasilkan gamet-gamet yang kandungan gennya separuh dari kandungan gen pada individu. Sebagai contoh, individu AA akan membentuk gamet A, dan individu aa akan membentuk gamet a. Pada individu Aa, yang menghasilkan gamet A dan gamet a, akan terlihat bahwa gen

A dan gen a akan dipisahkan ke dalam gamet-gamet yang terbentuk tersebut. Prinsip inilah yang kemudian dikenal sebagai hukum segregasi atau hukum I Mendel yaitu pada waktu berlangsung pembentukan gamet, tiap pasang gen akan disegregasi ke dalam masing-masing gamet yang terbentuk. Dengan demikian, menurut hukum I Mendel skema penyilangan kacang ercis tinggi dan kacang ercis pendek dapat dilihat pada skema berikut.

P : ♀ Tinggi x Pendek ♂

AA aa

Gamet A a

F1 : Tinggi

Aa

Dari keturunan pertama (F1) dapat disilangkan dengan sesamanya menghasilkan keturunan kedua yang dapat dilihat pada Tabel 2.1.

♂ \ ♀	A	A
A	AA	Aa
a	Aa	Aa

Tabel 2.1 persilangan monohibrid

Dari penjelasan di atas, dapat ditentukan frekuensi dari masing-masing gamet yang dihasilkan dari setiap individu baik yang dominan (gamet A) maupun yang resesif (gamet a) adalah sama. Secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut.

$$P(A) = P(a) = \frac{1}{2} \qquad (2.9.1)$$

Persamaan (2.9.1) sudah memenuhi sifat identitas dari peluang yaitu:

$$P(A) + P(a) = 1 \tag{2.9.2}$$

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

3.1. Tempat

Penelitian ini dilakukan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sriwijaya. Sumber referensi berasal dari buku-buku di Ruang Baca Jurusan Matematika, Perpustakaan Universitas Sriwijaya dan *browsing* internet.

3.2. Waktu

Pelaksanaan penelitian ini adalah selama 7 bulan, yaitu dari Februari 2017 sampai September 2017.

3.3. Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penellitian ini sebagai berikut:

1. Pendefinisan variabel, yaitu penjelasan tentang notasi yang digunakan serta pewarisan autosomal
2. Penentuan diagonalisasi matriks dan penurunan rumus rekursif.
3. Menentukan genotip dari persilangan individu induk untuk mendapatkan matriks M pada masing-masing kasus:
   3.1. Setiap induk bergenotip AA, Aa, aa dikawinkan dengan pasangan bergenotip normal *homozygot* (AA).

3.2. Setiap induk bergenotip AA, Aa, aa dikawinkan dengan pasangan bergenotip normal *heterozygot* (Aa).

3.3. Setiap induk bergenotip AA, Aa, aa dikawinkan dengan pasangan bergenotip aa.

4. Menentukan nilai eigen dan vektor eigen menggunakan Persamaan (2.3.3) dan Persamaan (2.3.4)
5. Membentuk matriks diagonal dengan menggunakan Persamaan (2.2).
6. Menentukan keturunan pada generasi ke-*n* dengan menggunakan Persamaan (2.5.2).
7. Menganalisis hasil dan menarik kesimpulan.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai penurunan genotip pada pewarisan genotip autosomal dengan menggunakan persamaan rekursif.

4.1 Diagonalisasi Matriks dan Persamaan Rekursif

Misalkan sebuah matriks $M_{n\times n}$ dengan entri m_{ij} dengan $i,j = 1,2, \ldots, n$, maka matriks dapat ditulis:

$$M_{n\times n} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \dots & m_{2n} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \dots & m_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{11} & m_{11} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}.$$

Misalkan matriks $M_{n\times n}$ merupakan matriks non-singular, maka matriks M memiliki $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ sebagai nilai eigen yang berpadanan dengan vektor-vektor eigen $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \ldots, \mathbf{p}_n$.

Diasumsikan $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots \geq \lambda_n$.Vektor kolom $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \ldots, \mathbf{p}_n$ dibentuk menjadi sebuah matriks $P_{n\times n}$ yang dapat ditulis $P = [\mathbf{p}_1 \;\vdots\; \mathbf{p}_2 \;\vdots\; \ldots \;\vdots\; \mathbf{p}_n]$, maka matriks $P_{n\times n}$ dapat dinyatakan dengan: $P_{n\times n} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{11} & p_{11} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$.

Misalkan $P_{n\times n}$ adalah matriks non-singular, maka ada invers dari matriks $P_{n\times n}$, yaitu $P^{-1}_{n\times n}$.

Misalkan matriks M dapat didiagonalisasi maka terdapat sebuah matriks P yang dapat dibalik sedemikian rupa sehingga $P^{-1} M P$ adalah matriks diagonal berukuran $n \times n$, yaitu:

$P^{-1} M P = D$

$P P^{-1} M P = P D$ (kedua ruas dikalikan dengan matriks P)

$I M P = P D$ (berlaku $P P^{-1} = P^{-1} P = I$; I merupakan matriks identitas)

$M P = P D$

$M P P^{-1} = P D P^{-1}$ (kedua ruas dikalikan dengan matriks P^{-1})

$M I = P D P^{-1}$

$M = P D P^{-1}$

Jadi, diperoleh matriks $M = P D P^{-1}$.

$M^2 = M M$ (dengan $M = P D P^{-1}$)

$M^2 = P D P^{-1} P D P^{-1}$

$M^2 = P D I D P^{-1}$ (berlaku $P P^{-1} = P^{-1} P = I$)

$M^2 = P D D P^{-1}$

$M^2 = P D^2 P^{-1}$ (D merupakan matriks diagonal)

dan seterusnya, sehingga secara umum, dapat dituliskan:

$M^n = P D^n P^{-1}$; untuk n =1,2,3, … (4.1.1)

Persamaan rekursif: $\mathbf{x}^{(n)} = M \mathbf{x}^{(n-1)}$, n = 1, 2, 3, …, dengan matriks $M_{n\times n}$ yang dapat didiagonalisasi maka dapat dituliskan:

- Untuk n =1:

  $\mathbf{x}^{(1)} = M \mathbf{x}^{(1-1)}$

  $\mathbf{x}^{(1)} = M \mathbf{x}^{(0)}$

- Untuk n = 2:

  $\mathbf{x}^{(2)} = M\,\mathbf{x}^{(2-1)}$

  $\mathbf{x}^{(2)} = M\,\mathbf{x}^{(1)}$, dengan $\mathbf{x}^{(1)} = M\,\mathbf{x}^{(0)}$

  $\mathbf{x}^{(2)} = M\,M\,\mathbf{x}^{(0)}$

  $\mathbf{x}^{(2)} = M^2\,\mathbf{x}^{(0)}$

- Untuk n = 3:

  $\mathbf{x}^{(3)} = M\,\mathbf{x}^{(3-1)}$

  $\mathbf{x}^{(3)} = M\,\mathbf{x}^{(2)}$, dengan $\mathbf{x}^{(2)} = M^2\,\mathbf{x}^{(0)}$

  $\mathbf{x}^{(3)} = M\,M^2\,\mathbf{x}^{(0)}$

  $\mathbf{x}^{(3)} = M^3\,\mathbf{x}^{(0)}$

dan seterusnya, secara umum dapat dituliskan:

$\mathbf{x}^{(n)} = M^n\,\mathbf{x}^{(0)}$, untuk n = 1, 2, … (4.1.2)

Dari Persamaan (4.1.1) diketahui bahwa $M^n = P\,D^n\,P^{-1}$, sehingga Persamaan (4.1.2) dapat ditulis menjadi

$\mathbf{x}^{(n)} = P\,D^n\,P^{-1}\,\mathbf{x}^{(0)}$ (4.1.3)

dengan $D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m^n \end{bmatrix}$.

Persamaan (4.1.3) dapat ditulis menjadi $\mathbf{x}^{(n)} = P\,D^n\,\alpha$; dengan $\alpha = P^{-1}\,\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$.

sehingga, $\mathbf{x}^{(n)} = P\, D^n\, P^{-1}\, \mathbf{x}^{(0)}$

$$= [\mathbf{p}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_m] \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}.$$

4.2 Pewarisan Genotip Autosomal

Diasumsikan terdapat 2 gen yang mengatur sifat fenotip pada individu, yaitu gen A dan a dan diasumsikan gen homozigot resesif (aa). Gen A merupakan gen dominan dan gen a merupakan gen resesif.

Gamet yang terbentuk dari gen A dan a, yaitu: AA, Aa, dan aa. Gamet AA merupakan gamet homozigot dominan, gamet aa merupakan gamet homozigot resesif, dan gamet Aa merupakan gamet heterozigot. Genotip AA dan Aa menghasilkan individu dengan fenotip yang sama dikarenakan gen A mendominasi gen a. Berdasarkan asumsi bahwa *mating* antara induk jantan dan induk betina adalah sama dengan *mating* antara induk betina dan *mating* induk jantan, maka kemungkinan *mating* yang terjadi ditulis pada Tabel 4.1 berikut:

Tabel 4.1 *Mating* pada Kasus Autosomal

Genotip Induk (P)	
♂	♀
AA	AA
AA	Aa
AA	Aa
Aa	Aa
Aa	Aa
aa	Aa

Berdasarkan *mating* yang terdapat pada Tabel 4.1, diperoleh keturunan generasi anak (F_1) dengan peluang yang berbeda-beda untuk tiap genotipnya.

1. *Mating* AA×AA

Induk jantan dan betina bergenotip AA.

P: ♂ ♀

AA × AA

Gamet A A

Selanjutnya, genotip keturunan diperoleh dengan cara membuat tabel persilangan sebagai berikut:

F_1:

♂ \ ♀	A	A
A	AA	AA
A	AA	AA

Peluang munculnya genotip AA adalah $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$.

Peluang munculnya genotip Aa adalah 0.

Peluang munculnya genotip aa adalah 0.

2. *Mating* AA×Aa

Induk jantan bergenotip AA dan induk betina Aa.

P: ♂ ♀

AA × Aa

Gamet A A,a

Selanjutnya, genotip keturunan diperoleh dengan cara membuat tabel persilangan sebagai berikut:

F_1:

♂ \ ♀	A	a
A	AA	Aa
A	AA	Aa

Peluang munculnya genotip AA adalah $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Peluang munculnya genotip Aa adalah $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Peluang munculnya genotip aa adalah 0.

3. *Mating* AA×aa

Induk jantan bergenotip AA dan induk betina aa.

P:	♂		♀
	AA	×	aa
Gamet	A		a

Selanjutnya, genotip keturunan diperoleh dengan cara membuat tabel persilangan sebagai berikut:

F_1:

♂ \ ♀	a	a
A	Aa	Aa
A	Aa	Aa

Peluang munculnya genotip AA adalah 0

Peluang munculnya genotip Aa adalah $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$.

Peluang munculnya genotip aa adalah 0.

4. *Mating* Aa×Aa

Induk jantan dan betina bergenotip Aa.

P:	♂		♀
	Aa	×	Aa
Gamet	A,a		A,a

Selanjutnya, genotip keturunan diperoleh dengan cara membuat tabel persilangan sebagai berikut:

F_1:

♂ \ ♀	A	a
A	AA	Aa
a	Aa	aa

Peluang munculnya genotip AA adalah $\frac{1}{4}$.

Peluang munculnya genotip Aa adalah $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Peluang munculnya genotip aa adalah $\frac{1}{4}$.

5. *M*ating Aa×aa

Induk jantan bergenotip Aa dan induk betina aa.

P:	♂		♀
	Aa	×	aa
Gamet	A,a		a

Selanjutnya, genotip keturunan diperoleh dengan cara membuat tabel persilangan sebagai berikut:

F_1:

♂ \ ♀	a	a
A	Aa	Aa
a	aa	aa

Peluang munculnya genotip AA adalah 0.

Peluang munculnya genotip Aa adalah $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

Peluang munculnya genotip aa adalah $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

6. *Mating* aa×aa

Induk jantan dan betina bergenotip aa.

P:	♂		♀
	Aa	×	aa
Gamet	A		a

Selanjutnya, genotip keturunan diperoleh dengan cara membuat tabel persilangan sebagai berikut:

F_1:

♂ \ ♀	a	a
A	aa	aa
A	aa	aa

Peluang munculnya genotip AA adalah 0.

Peluang munculnya genotip Aa adalah 0.

Peluang munculnya genotip aa adalah $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$.

Rekapitulasi hasil *mating* pada kasus *autosomal* ditampilkan pada Tabel 4.2.

Tabel 4.2 Hasil *Mating* pada Kasus Autosomal

Genotip Keturunan (F_1)	Genotip Induk (P)					
	AA×AA (1)	AA×Aa (2)	AA×aa (3)	Aa×Aa (4)	Aa×aa (5)	aa×aa (6)
AA	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0
Aa	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Aa	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
Jumlah peluang	1	1	1	1	1	1

Berdasarkan Tabel 4.2, maka terdapat beberapa kasus:

1. Terdapat minimal 1 induk bergenotip AA (normal homozigot), terjadi pada *mating*: AA×AA, AA×Aa, dan AA×aa.
2. Terdapat minimal 1 induk bergenotip Aa (karier), terjadi pada *mating*: AA×Aa, Aa×Aa, dan Aa×aa.
3. Terdapat minimal 1 induk yang memiliki genotip aa (*defect)*, terjadi pada *mating*: AA×aa, Aa×aa, dan aa×aa.
4. Kedua induk memiliki genotip yang sama, terjadi pada *mating*: AA×AA, Aa×Aa, dan aa×aa.

Penentuan genotip populasi keturunan ke-n dapat menggunakan persamaan rekursif:

$\mathbf{x}^{(n)} = M\,\mathbf{x}^{(n-1)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ (2.5.1)

- Untuk n =1:

  $\mathbf{x}^{(1)} = M\,\mathbf{x}^{(1-1)}$

  $\mathbf{x}^{(1)} = M\,\mathbf{x}^{(0)}$

- Untuk n = 2:

  $\mathbf{x}^{(2)} = M\,\mathbf{x}^{(2-1)}$

  $\mathbf{x}^{(2)} = M\,\mathbf{x}^{(1)}$, dengan $\mathbf{x}^{(1)} = M\,\mathbf{x}^{(0)}$

  $\mathbf{x}^{(2)} = M\,M\,\mathbf{x}^{(0)}$

  $\mathbf{x}^{(2)} = M^2\,\mathbf{x}^{(0)}$

- Untuk n = 3:

  $\mathbf{x}^{(3)} = M\,\mathbf{x}^{(3-1)}$

  $\mathbf{x}^{(3)} = M\,\mathbf{x}^{(2)}$, dengan $\mathbf{x}^{(2)} = M^2\,\mathbf{x}^{(0)}$

  $\mathbf{x}^{(3)} = M\,M^2\,\mathbf{x}^{(0)}$

  $\mathbf{x}^{(3)} = M^3\,\mathbf{x}^{(0)}$

dan seterusnya, sehingga secara umum, dapat dituliskan:

$\mathbf{x}^{(n)} = M^n\,\mathbf{x}^{(0)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ (4.2.1)

Kasus pewarisan autosomal memungkinkan terdapat tiga genotip yang ada pada individu, yaitu: AA, Aa, dan aa.

$\mathbf{x}^{(n)}$ merupakan fraksi individu dengan genotip AA, Aa, dan aa. Dengan demikian, $\mathbf{x}^{(n)}$ pada pewarisan genotip autosomal dapat dituliskan:

a_n = fraksi dari individu dengan genotip AA pada generasi ke-n

b_n = fraksi dari individu dengan genotip Aa pada generasi ke-n

c_n = fraksi dari individu dengan genotip aa pada generasi ke-n

untuk n = 0, 1, 2, … Sehingga

$$a_n + b_n + c_n = 1 \tag{4.2.2}$$

4.3 Permasalahan Pewarisan Autosomal

Permasalahan pewarisan *autosomal* pada penelitian ini dibahas untuk tiga kasus, yaitu setiap induk dikawinkan dengan masing-masing pasangan bergenotip normal *homozygot*, setiap induk dikawinkan dengan masing-masing pasangan bergenotip normal *heterozygot*, setiap induk dikawinkan dengan masing-masing pasangan bergenotip aa.

Kasus 1: Setiap induk bergenotip AA, Aa, aa disilangkan dengan pasangan bergenotip normal *homozygot* (AA)

Induk (bergenotip AA, Aa, aa) disilangkan dengan pasangan bergenotip AA, sehingga menghasilkan genotip keturunan yang berbeda yaitu terjadi pada kolom (1), (2), dan (3) di Tabel 4.2 seperti yang ditampilkan pada Tabel 4.3.

Tabel 4.3 Hasil Persilangan Induk Bergenotip AA,Aa,aa dengan Pasangan Bergenotip AA

Genotip Keturunan (F_1)	Genotip Induk (P)		
	AA×AA	AA×Aa	AA×aa
AA	1	$\frac{1}{2}$	0
Aa	0	$\frac{1}{2}$	1
Aa	0	0	0

Tabel 4.3 dapat ditulis dalam bentuk matriks $M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Pasangan induk AA × AA menghasilkan genotip keturunan AA, pasangan induk AA × Aa menghasilkan genotip keturunan AA dan Aa, dan pasangan induk AA × aa menghasilkan genotip keturunan Aa.

Berdasarkan Tabel 4.3 diperoleh:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + \tfrac{1}{2} b_{n-1} \\ b_n &= \tfrac{1}{2} b_{n-1} + c_{n-1} \\ c_n &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (4.3.1)$$

Distribusi keturunan untuk generasi ke-*n* dapat ditulis sebagai $\mathbf{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$

dimana $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$

Berdasarkan persamaan (4.3.1) diperoleh

$\mathbf{x}^{(n)} = M\mathbf{x}^{(n-1)}$

dimana

untuk $n = 1$ maka $\mathbf{x}^{(1)} = M\mathbf{x}^{(0)}$

untuk $n = 2$ maka $\mathbf{x}^{(2)} = M\mathbf{x}^{(1)}$

$= MM\mathbf{x}^{0}$

$= M^2\mathbf{x}^{0}$

untuk $n = 3$ maka $\mathbf{x}^{(3)} = M\mathbf{x}^{(2)}$

$= MM^2\mathbf{x}^{(0)}$

$= M^3\mathbf{x}^{(0)}$

untuk $n = 4$ maka $\mathbf{x}^{(4)} = M\mathbf{x}^{(3)}$

$= MM^3\mathbf{x}^{(0)}$

$= M^4\mathbf{x}^{(0)}$

$\vdots$

Secara umum dapat ditulis $\mathbf{x}^{(n)} = M^n\mathbf{x}^{(0)}$, dengan $n =$ banyaknya keturunan.

Kemudian dilakukan perhitungan untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks M.

dengan

$|\lambda I - M| = 0$

maka

$$\left|\lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\0 & \frac{1}{2} & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\0 & \lambda & 0\\0 & 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\0 & \frac{1}{2} & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan metode *Sarrus*, maka didapatkan

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} \lambda - 1 & -\dfrac{1}{2} & 0 & \lambda - 1 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & \lambda - \dfrac{1}{2} & -1 & 0 & \lambda - \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$(\lambda - 1)\left(\lambda - \tfrac{1}{2}\right)(\lambda) = 0$$

$$\left(\lambda^2 - \tfrac{1}{2}\lambda - \lambda + \tfrac{1}{2}\right)(\lambda) = 0$$

$$\left(\lambda^2 - \tfrac{3}{2}\lambda + \tfrac{1}{2}\right)(\lambda) = 0 \qquad (4.3.2)$$

Kemudian Persamaan (4.3.2) di faktorkan, maka nilai eigen dari matriks *M* adalah

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \frac{1}{2},\ \lambda_3 = 0$

Langkah selanjutnya adalah mencari vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen dari matriks *M*

dengan

$(\lambda I - M)\mathbf{x} = 0$

$$\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = 0$$

Untuk $\lambda_1 = 1$, $\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = 0$$

diperoleh persamaan: $-\frac{1}{2} b_n = 0$

$$\frac{1}{2} b_n - c_n = 0$$

$$c_n = 0$$

sehingga diperoleh $b_n = 0, c_n = 0,$ dan $a_n = 1$.

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 1$ adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Untuk $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, $\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = 0$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = 0$$

didapatkan persamaan:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{2} a_n - \frac{1}{2} b_n &= 0 \\ -c_n &= 0 \\ \frac{1}{2} c_n &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.3.3)$$

Dari Persamaan (4.3.3) didapatkan nilai $c_n = 0$.

Misalkan $a_n = t \Leftrightarrow -\frac{1}{2}b_n = \frac{1}{2}t$

$$\Leftrightarrow \quad -b_n = t$$

$$\Leftrightarrow \quad b_n = -t$$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Untuk $\lambda_3 = 0$, $\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = 0$$

didapatkan persamaan: $\quad -a_n - \frac{1}{2}b_n = 0$

$$-\frac{1}{2}b_n - c_n = 0$$

Misalkan $a_n = t \Leftrightarrow -t = \frac{1}{2}b_n$, $\quad -\frac{1}{2}b_n - c_n = 0$

$\Leftrightarrow -2t = b_n \quad\quad -\frac{1}{2}(-2t) = c_n$

$$t = c_n$$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 0$ adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dibentuk matrik pendiagonal dari matriks *M* adalah matriks

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari hasil perhitungan diperoleh matriks

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi $D = P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

diperoleh $D^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

sehingga $M^n = PD^nP^{-1}$.

Oleh karena

$\mathbf{x}^{(n)} = M^n\mathbf{x}^{(0)}$

$\mathbf{x}^{(n)} = PD^nP^{-1}\mathbf{x}^{(0)}$

maka

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) b_0 + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) c_0 \\ 0 + \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 + c_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + b_0 + c_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jika *n* mendekati tak hingga maka $\left(1/_2\right)^n$ menuju ke nol, yaitu:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$= 0$$

karena $a_n + b_n + c_n = 1$ pada persamaan (4.2.2), sehingga

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 0.b_0 - 0.c_0 \\ 0.b_0 + 0.c_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jadi, ini berarti semua keturunan pada generasi ke-*n* bergenotip AA yang merupakan keturunan normal *homozygot*.

Kasus 2: Setiap induk bergenotip AA, Aa, aa disilangkan dengan pasangan bergenotip normal *heterozygot* (Aa)

Induk (bergenotip AA, Aa, aa) disilangkan dengan pasangan bergenotip Aa, sehingga menghasilkan genotip keturunan yang berbeda yaitu terjadi pada kolom (2), (4), dan (5) di Tabel 4.2 seperti yang ditampilkan pada Tabel 4.4.

Tabel 4.4 Hasil Persilangan Induk Bergenotip AA,Aa,aa dengan Pasangan Bergenotip Aa

Genotip Keturunan (F_1)	Genotip Induk (P)		
	Aa×AA	Aa×Aa	Aa×aa
AA	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
Aa	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Aa	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Tabel 4.4 dapat ditulis dalam bentuk matriks $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Pasangan induk Aa × AA menghasilkan genotip keturunan AA dan Aa, pasangan induk Aa × Aa menghasilkan genotip keturunan AA, Aa dan aa, pasangan induk Aa × aa menghasilkan genotip keturunan Aa dan aa.

Berdasarkan Tabel 4.4 diperoleh:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{2}a_{n-1} + \tfrac{1}{4}b_{n-1} \\ b_n &= \tfrac{1}{2}a_{n-1} + \tfrac{1}{2}b_{n-1} + \tfrac{1}{2}c_{n-1} \\ c_n &= \tfrac{1}{4}b_{n-1} + \tfrac{1}{4}c_{n-1} \end{aligned}\right\} \qquad (4.3.4)$$

Distribusi keturunan untuk generasi ke-*n* dapat ditulis sebagai $\mathbf{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$

dimana $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} a_\mathbf{0} \\ b_\mathbf{0} \\ c_\mathbf{0} \end{bmatrix}$

Berdasarkan persamaan (4.3.4) diperoleh

$\mathbf{x}^{(n)} = M\mathbf{x}^{(n-1)}$

dimana

untuk $n = 1$ maka $\mathbf{x}^{(1)} = M\mathbf{x}^{(0)}$

untuk $n = 2$ maka $\mathbf{x}^{(2)} = M\mathbf{x}^{(1)}$

$= MM\mathbf{x}^{0}$

$= M^{2}\mathbf{x}^{0}$

untuk $n = 3$ maka $\mathbf{x}^{(3)} = M\mathbf{x}^{(2)}$

$= MM^{2}\mathbf{x}^{(0)}$

$= M^{3}\mathbf{x}^{(0)}$

untuk $n = 4$ maka $\mathbf{x}^{(4)} = M\mathbf{x}^{(3)}$

$= MM^{3}\mathbf{x}^{(0)}$

$= M^{4}\mathbf{x}^{(0)}$

$\vdots$

Secara umum dapat ditulis $\mathbf{x}^{(n)} = M^{n}\mathbf{x}^{(0)}$, dengan $n =$ banyaknya keturunan.

Kemudian dilakukan perhitungan untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks M.

dengan

$|\lambda I - M| = 0$

$$\left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix}\lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{4} & \lambda - \frac{1}{2}\end{vmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan metode *Sarrus*, maka didapatkan

$$\left[\begin{array}{ccc|cc}\lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{4} & \lambda - \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4}\end{array}\right]$$

$\lambda^3 - \frac{3}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda = 0$

$\lambda\left(\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2}\right) = 0$

Maka didapat nilai eigen dari matriks adalah sebagai berikut $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, dan $\lambda_3 = \frac{1}{2}$.

Langkah selanjutnya adalah mencari vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen dari matriks M

dengan $(\lambda I - M)\mathbf{x} = 0$

$$\left(\lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{bmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{bmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix}\lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{4} & \lambda - \frac{1}{2}\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{bmatrix} = 0$$

Untuk $\lambda_1 = 0,\begin{bmatrix}\lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{4} & \lambda - \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{bmatrix} = 0$

$$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{bmatrix} = 0$$

diperoleh persamaan
$$\left.\begin{aligned}-\frac{1}{2}a_n - \frac{1}{4}b_n &= 0\\ -\frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}b_n - \frac{1}{2}c_n &= 0\\ -\frac{1}{4}b_n - \frac{1}{2}c_n &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (4.3.5)$$

Berdasarkan Persamaan (4.3.5) didapatkan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 0$ adalah $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ 1\\ -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

Untuk $\lambda_2 = 1$, $\begin{bmatrix}\lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{4} & \lambda - \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{bmatrix} = 0$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = 0$$

didapatkan persamaan, $\frac{1}{2} a_n - \frac{1}{4} b_n = 0$

$$-\frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} b_n - \frac{1}{2} c_n = 0$$

$$-\frac{1}{4} b_n + \frac{1}{2} c_n = 0$$

Didapatkan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 1$ adalah $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Untuk $\lambda_3 = \frac{1}{2}$, $\begin{bmatrix} \lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \lambda - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = 0$$

didapatkan persamaan, $-\frac{1}{4} b_n = 0$

$$-\frac{1}{2} a_n - \frac{1}{2} c_n = 0$$

$$-\frac{1}{4} b_n = 0$$

Didapatkan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ adalah $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dibentuk matrik pendiagonal dari matriks M adalah matriks $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

Dari hasil perhitungan diperoleh invers dari matriks P adalah sebagai berikut

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Jadi $D = P^{-1}MP = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

diperoleh $D^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}$

Jika n mendekati tak hingga maka $\left(1/2\right)^n$ menuju ke nol, yaitu:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$= 0$$

sehingga matriks $D^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}$ menjadi $D^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

maka $M^n = PD^nP^{-1}$.

Oleh karena

$$\mathbf{x}^{(n)} = M^n\mathbf{x}^{(0)}$$

$$\mathbf{x}^{(n)} = PD^nP^{-1}\mathbf{x}^{(0)}$$

maka

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}a_0 + \frac{1}{4}b_0 + \frac{1}{4}c_0 \\ \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}b_0 + \frac{1}{2}c_0 \\ \frac{1}{4}a_0 + \frac{1}{4}b_0 + \frac{1}{4}c_0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dengan menggunakan $a_n + b_n + c_n = 1$ pada persamaan (4.2.2)

sehingga $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}a_0 + \frac{1}{4}b_0 + \frac{1}{4}c_0 \\ \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}b_0 + \frac{1}{2}c_0 \\ \frac{1}{4}a_0 + \frac{1}{4}b_0 + \frac{1}{4}c_0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(a_0 + b_0 + c_0) \\ \frac{1}{2}(a_0 + b_0 + c_0) \\ \frac{1}{4}(a_0 + b_0 + c_0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}.1 \\ \frac{1}{2}.1 \\ \frac{1}{4}.1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Jadi, ini berarti semua keturunan pada generasi ke-*n* bergenotip normal *homozygot* AA, bergenotip normal *heterozygot* (*carrier*) Aa, dan bergenotip aa.

Kasus 3: Setiap induk bergenotip AA, Aa, aa disilangkan dengan pasangan bergenotip aa

Induk (bergenotip AA, Aa, aa) disilangkan dengan pasangan bergenotip aa, sehingga menghasilkan genotip keturunan yang berbeda yaitu terjadi pada kolom (3), (5), dan (6) di Tabel 4.2 seperti yang ditampilkan pada Tabel 4.5.

Tabel 4.5 Hasil Persilangan Induk Bergenotip AA,Aa,aa dengan Pasangan Bergenotip aa

Genotip Keturunan (F_1)	Genotip Induk (P)		
	aa×AA	aa×Aa	aa×aa
AA	0	0	0
Aa	1	$\frac{1}{2}$	0
Aa	0	$\frac{1}{2}$	1

Tabel 4.5 dapat ditulis dalam bentuk matriks $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

Pasangan induk $aa \times AA$ menghasilkan genotip keturunan Aa, pasangan induk $aa \times Aa$ menghasilkan genotip keturunan Aa dan aa, pasangan induk $aa \times aa$ menghasilkan genotip keturunan aa.

Berdasarkan Tabel 4.5 diperoleh:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 0 \\ b_n &= a_{n-1} + \tfrac{1}{2} b_{n-1} \\ c_n &= \tfrac{1}{2} b_{n-1} + c_{n-1} \end{aligned}\right\} \qquad (4.3.6)$$

Distribusi keturunan untuk generasi ke-*n* dapat ditulis sebagai $\mathbf{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$

dimana $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$

Berdasarkan persamaan (4.3.6) diperoleh

$\mathbf{x}^{(n)} = M\mathbf{x}^{(n-1)}$

dimana

untuk $n = 1$ maka $\mathbf{x}^{(1)} = M\mathbf{x}^{(0)}$

untuk $n = 2$ maka $\mathbf{x}^{(2)} = M\mathbf{x}^{(1)}$

$= MM\mathbf{x}^0$

$= M^2\mathbf{x}^0$

untuk $n = 3$ maka $\mathbf{x}^{(3)} = M\mathbf{x}^{(2)}$

$= MM^2\mathbf{x}^{(0)}$

$= M^3\mathbf{x}^{(0)}$

untuk $n = 4$ maka $\mathbf{x}^{(4)} = M\mathbf{x}^{(3)}$

$$= MM^3\mathbf{x}^{(0)}$$

$$= M^4\mathbf{x}^{(0)}$$

$$\vdots$$

Secara umum dapat ditulis $\mathbf{x}^{(n)} = M^n\mathbf{x}^{(0)}$, dengan $n =$ banyaknya keturunan.

Kemudian dilakukan perhitungan untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks *M*.

dengan

$|\lambda I - M| = 0$

$$\left|\lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0\\ -1 & \lambda - \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda - 1\end{vmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan metode *Sarrus*, maka didapatkan

$$\left[\begin{array}{ccc|cc}\lambda & 0 & 0 & \lambda & 0\\ -1 & \lambda - \dfrac{1}{2} & 0 & -1 & \lambda - \dfrac{1}{2}\\ 0 & -\dfrac{1}{2} & \lambda - 1 & 0 & -\dfrac{1}{2}\end{array}\right]$$

$\lambda\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)(\lambda - 1)0 = 0$

$\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \lambda + \frac{1}{2}\right) = 0$

$$\lambda\left(\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2}\right) = 0 \tag{4.3.7}$$

Kemudian Persamaan (4.3.7) di faktorkan, maka nilai eigen dari matriks *M* adalah

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \frac{1}{2},\ \lambda_3 = 1$

Langkah selanjutnya adalah mencari vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen dari matriks *M*

dengan

$(\lambda I - M)\mathbf{x} = 0$

$$\left(\lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\1 & \frac{1}{2} & 0\\0 & \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{bmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\0 & \lambda & 0\\0 & 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\1 & \frac{1}{2} & 0\\0 & \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{bmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\-1 & \lambda - \frac{1}{2} & 0\\0 & -\frac{1}{2} & \lambda - 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{bmatrix} = 0$$

Untuk $\lambda_1 = 0$, $\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\-1 & \lambda - \frac{1}{2} & 0\\0 & -\frac{1}{2} & \lambda - 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{bmatrix} = 0$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\-1 & -\frac{1}{2} & 0\\0 & -\frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{bmatrix} = 0$$

diperoleh persamaan: $-a_n - \frac{1}{2}b_n = 0$

$-\frac{1}{2}b_n - c_n = 0$

sehinggga diperoleh $a_n = -\frac{1}{2}, b_n = 1,$ dan $c_n = -\frac{1}{2}$.

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 0$ adalah $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Untuk $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = 0$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = 0$$

didapatkan persamaan:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2} a_n &= 0 \\ -a_n &= 0 \\ -\frac{1}{2} b_n - \frac{1}{2} c_n &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (4.3.8)$$

Dari Persamaan (4.3.8) didapatkan nilai $a_n = 0$.

Misalkan $c_n = t \Leftrightarrow -\frac{1}{2} b_n = \frac{1}{2} t$

$\Leftrightarrow \quad b_n = t$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Untuk $\lambda_3 = 1$, $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = 0$$

didapatkan persamaan:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 0 \\ -a_n + \tfrac{1}{2}b_n &= 0 \\ -\tfrac{1}{2}b_n &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.3.9)$$

Dari Persamaan (4.3.9) didapat bahwa:

$a_n = 0$

$b_n = 0$

$c_n = 1$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 0$ adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dibentuk matrik pendiagonal dari matriks *M* adalah matriks

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari hasil perhitungan diperoleh matriks

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi $D = P^{-1}MP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

diperoleh $D^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Jika *n* mendekati tak hingga maka $\left(1/2\right)^n$ menuju ke nol, yaitu:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$= 0$$

sehingga matriks$D^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ menjadi $D^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

maka $M^n = PD^nP^{-1}$.

Oleh karena

$\mathbf{x}^{(n)} = M^n\mathbf{x}^{(0)}$

$\mathbf{x}^{(n)} = PD^nP^{-1}\mathbf{x}^{(0)}$

maka

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_0 + b_0 + c_0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dengan menggunakan $a_n + b_n + c_n = 1$ pada persamaan (4.2.2) diperoleh.

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_0 + b_0 + c_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, semua keturunan pada generasi ke-n menghasilkan keturunan yang bergenotip aa.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang dilakukan, dapat diambil beberapa kesimpulan yaitu :

Pewarisan genotip generasi ke-*n* yang terjadi pada pewarisan secara autosomal terdapat tiga jenis kasus, yaitu:

a. Pewarisan genotip pada kasus autosomal dalam jangka waktu yang sangat panjang menghasilkan semua keturunan bergenotip AA (normal *homozigot*) apabila setiap induk bergenotip AA, Aa, aa dikawinkan dengan pasangan bergenotip normal *homozygot* (AA).

b. Pewarisan genotip pada kasus autosomal dalam jangka waktu yang sangat panjang menghasilkan keturunan bergenotip AA (normal *homozygot*), Aa (normal *heterozygot*) dan aa apabila setiap induk bergenotip AA, Aa, aa dikawinkan dengan pasangan bergenotip normal *heterozygot* (Aa).

c. Pewarisan genotip pada kasus autosomal dalam jangka waktu yang sangat panjang menghasilkan semua keturunan bergenotip aa apabila setiap induk bergenotip AA, Aa, aa dikawinkan dengan pasangan bergenotip aa.

5.2 Saran

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, penulis menyarankan untuk penelitian lebih lanjut dapat mengaplikasikan konsep diagonalisasi matriks pada penentuan pewarisan genotip pada teori genetika dengan kasus dihibrid.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H dan C. Rorres. 2012. *Aljabar Linier Elementer versi Aplikasi, Jilid 1 Edisi Kedelapan.* (Terj. Refina I. Dan Irzam H.). Jakarta: Erlangga.

Anton, H dan C. Rorres. 2009. *Aljabar Linier Elementer versi Aplikasi, Jilid 2 Edisi Kedelapan.* (Terj. Irzam H. Dan Julian G.). Jakarta: Erlangga.

Ernawati. Purwadi, J. 2009. Program Pendeteksian Distribusi Pewarisan Genotip Suatu Populasi untuk Tipe Pewarisan Autosomal dengan Metode QR. *Jurnal Informatika.* 5, 32-37.

Cahyono, F. 2010. *Kombinatorial Dalam Hukum Pewarisan Mendel*. Program Studi Teknik Informatika. Sekolah Teknik Elektro dan Informatika. Institut Teknologi Bandung.

Imrona, M. 2009. *Aljabar Linear Dasar*. Jakarta: Erlangga.

Indriani, V. 2015. *Penentuan Genotip Populasi pada Generasi ke-n dengan Menggunakan Persamaan Rekursif.* Jurusan Matematika. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Sriwijaya.

Mumu, J. 2013. Pewarisan Autosomal dengan Model Diagonalizable Matrix. *Jurnal ISTECH.* 5, 92-98.

Rorres, A. 2004. *Aljabar Linear Elementer*, terjemahan oleh Pantur Silaban. Erlangga. Jakarta.

Suryo. 2012. *Genetika untuk strata 1.* Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.

Susanto, A.H. 2011. *Genetika*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Warningsih, S. 2016. *Keanekaragaman Hayati.* Jurusan Pendidikan Biologi. Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan. Universitas Muhammadiyah Metro.

Wijayanto, D.A. 2013. *Penerapan Model Penerapan Diferensi dalam Penentuan Probabilitas Genotip Keturunan dengan Dua Sifat Beda.* Jurusan Matematika. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Jember.

Yuliani, S., Rahayu B.V., Mashuri. 2012. Penerapan diagonalisasi matriks dan matriks leslie dalam memproyeksikan jumlah populasi perempuan. *UNNES Journal of Mathematics.* 2, 52-59.

LAMPIRAN

Lampiran 1: Pembuktian Teorema 2.1

Teorema 2.1:

Jika M adalah sebuah matriks berukuran *n x n*, maka kedua pernyataan ini adalah ekuivalen:

1. *M* dapat didiagonalisasi
2. *M* memiliki *n* vektor eigen yang bebas linier.

Bukti $(\mathbf{1}) \Rightarrow (\mathbf{2})$. Karena M diasumsikan dapat didiagonalisasi, maka terdapat sebuah matriks yang dapat dibalik.

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

Sedemikian rupa sehingga $P^{-1}MP$ adalah diagonal, katakanlah $P^{-1}MP = D$, dimana

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Berdasarkan rumus $P^{-1}MP = D$ bahwa $AP = PD$, jelasnya,

$$MP = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 P_{11} & \lambda_2 P_{12} & \cdots & \lambda_n P_{1n} \\ \lambda_1 P_{21} & \lambda_2 P_{22} & \cdots & \lambda_n P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 P_{n1} & \lambda_2 P_{n2} & \cdots & \lambda_n P_{nn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Ditetapkan bahwa $p_1, p_2, \ldots, p_n$ menotasikan vektor-vektor kolom dari matriks P, maka dari Persamaan (1) urutan kolom-kolom MP adalah $\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \ldots, \lambda_n p_n$, akan tetapi, urutan kolom-kolom MP adalah $Mp_1, Mp_2, \ldots, Mp_n$. Sehingga, diperoleh

$$Mp_1 = \lambda_1 p_1, \qquad Mp_2 = \lambda_2 p_2, \ldots, \qquad Mp_n = \lambda_n p_n \tag{2}$$

Karena P dapat dibalik, veektor-vektor kolomnya semua tak nol; sehingga, berdasarkan (2), $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen dari M, dan $p_1, p_2, \dots, p_n$ adalah vektor-vektor eigen yang terkait. Karena P dapat dibalik, diperoleh $p_1, p_2, \dots, p_n$bebas linier. Dengan demikian, M memiliki n vektor eigen yang bebas linier.

$\mathbf{(2) \Rightarrow (1).}$ Asumsikan bahwa M memiliki n vektor eigen $p_1, p_2, \dots, p_n$yang bebas linier. Dengan nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ yang terkait, dan misalkan

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

Adalah sebuah matriks yang vektor-vektor kolomnya adalah $p_1, p_2, \dots, p_n$. Vektor-vektor kolom dari matriks hasil kali MP adalah

$$Mp_1, Mp_2, \dots, Mp_n$$

Namun

$$Mp_1 = \lambda_1 p_1, \qquad Mp_2 = \lambda_2 p_2, \dots, \qquad Mp_n = \lambda_n p_n$$

sehingga

$$MP = \begin{bmatrix} \lambda_1 P_{11} & \lambda_2 P_{12} & \cdots & \lambda_n P_{1n} \\ \lambda_1 P_{21} & \lambda_2 P_{22} & \cdots & \lambda_n P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 P_{n1} & \lambda_2 P_{n2} & \cdots & \lambda_n P_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = PD \qquad (3)$$

Dimana D adalah matriks diagonal yang memiliki nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sebagai entri-entri diagonal utamanya. Karena vektor-vektor kolom matriks P bebas linear. P dapat dibalik; sehingga, (3) dapat dituliskan kembali sebagai $P^{-1}MP = D$; jelasnya M dapat didiagonalisasi.

Lampiran 2: Pembuktian Teorema 2.

Teorema 2.2

Jika M adalah sebuah matriks $n\ x\ n$ dan λ adalah sebuah bilangan riil, maka pernyataa-pernyataan berikut ini adalah ekuivalen (Anton, 2012):

1. λ adalah sebuah nilai eigen dari M
2. Persamaan $(\lambda I - M)x = 0$ memiliki solusi nontrivial
3. Terdapat sebuah vektor tak nol x pada R^n sedemikian sehingga $Mx = \lambda x$
4. λ adalah sebuah solusi dari Persamaan karakteristik $\det(\lambda I - M) = 0$.

Bukti.

$(1) \Rightarrow (2)$ Misal M adalah sebuah matriks $n \times n$ dengan λ adalah sebuah nilai eigen dari M yang memenuhi persamaan $M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, terdapat vektor tak nol $\mathbf{x}$ dimana $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. Dicari penyelesaian persamaan $M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, yaitu:

$$M\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$$

atau

$$(\lambda I - M)\mathbf{x} = 0 \tag{4}$$

Persamaan (4) mempunyai penyelesaian apabila

$$|\lambda I - M| = 0 \tag{5}$$

Persamaan (5) dinamakan persamaan karakteristik. Dari sini diperoleh nilai eigen λ dari matriks M, sehingga terdapat vektor tak nol dimana $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. Dengan kata lain Persamaan (4) mempunyai solusi nontrivial.

$(2) \Rightarrow (3)$ Persamaan $(\lambda I - M)\mathbf{x} = 0$ memiliki solusi nontrivial artinya terdapat vektor tak nol **x,** dimana $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ yang merupakan solusi dari Persamaan

$$(\lambda I - M)\mathbf{x} = 0$$

sehingga

$$\lambda\mathbf{x} - M\mathbf{x} = 0 \iff M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

$(3) \Rightarrow (4)$ terdapat sebuah vektor tak nol **x** pada $\mathbf{R}^n$ sehingga $M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$**.** penyelesaian Persamaan $M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ yaitu,

$$M\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$$

atau

$$(\lambda I - M)\mathbf{x} = 0$$

Agar persamaan $(\lambda I - M)\mathbf{x} = 0$ mempunyai solusi, maka $|\lambda I - M| = 0$.

Persamaan $|\lambda I - M| = 0$ dinamakan Persamaan karakteristik dan λ adalah solusi dari Persamaan karakteristik.

$(4) \Rightarrow (1)$ λ adalah solusi dari Persamaan karakteristik $|\lambda I - M| = 0$, sehingga terdapat vektor tak nol $\mathbf{x}$ dimana $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ yang memenuhi

$$M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

λ merupakan nilai eigen dari M.

Lampiran 3: Pembuktian Teorema 2.3

Teorema 2.3

Jika $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ adalah suatu basis dari ruang vektor V, maka setiap vektor $\mathbf{v}$ pada V dapat dinyatakan dalam bentuk $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n$ dengan tepat satu cara.

Bukti. Karena S merentang V, maka sesuai definisi dari suatu himpunan rentangan bahwa setiap vektor pada V dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linear dari vektor-vektor pada S. Untuk melihat bahwa hanya terdapat satu cara untuk menyatakan suatu vektor sebagai suatu kombinasi linear dari vektor-vektor pada S, maka dimisalkan beberapa vektor $\mathbf{v}$ dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n \tag{7}$$

dan juga sebagai

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n \tag{8}$$

Dengan mengurangkan Persamaan (8) dengan Persamaan (7) menghasilkan

$$\mathbf{v} = (c_1 - k_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 - k_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (c_n - k_n)\mathbf{v}_n \tag{9}$$

Karena ruas kanan dari Persamaan (9) adalah suatu kombinasi linear dari vektor-vektor pada S, kebebasan linear dari S mengimplikasikan bahwa

$c_1 - k_1 = 0, \qquad c_2 - k_2 = 0, \ldots, \qquad c_n - k_n = 0$

yaitu

$$c_1 = k_1, \qquad c_2 = k_2, \ldots, \qquad c_n = k_n$$

Jadi, kedua pernyataan untuk **v** adalah sama.