BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dibahas mengenai tinjauan pustaka yang berhubungan dengan permasalahan yang dibahas pada Bab IV.

2.1. Matriks

2.1.1 Pengertian Matriks

Menurut Rorres (2004), matriks adalah susunan sekelompok bilangan dalam suatu jajaran berbentuk persegi panjang yang diatur berdasarkan baris dan kolom dan diletakkan antara dua tanda kurung. Tanda kurung yang digunakan untuk mengapit susunan anggota matriks tersebut adalah tanda kurung siku. Setiap bilangan pada matriks disebut elemen (unsur) matriks. Secara umum matriks dapat ditulis sebagai berikut :

$$M_{m\times n}=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Kumpulan elemen yang tersusun secara horizontal disebut baris, sedangkan kumpulan elemen yang tersusun secara vertikal disebut kolom. Suatu matriks yang memiliki m baris dan n kolom disebut sebagai matriks yang memiliki ordo $m \times n$. Matriks dinotasikan dengan huruf kapital, sedangkan elemen-elemen dalam matriks M dengan huruf kecil yang dicetak miring.

2.1.2. Jenis Matriks

Beberapa jenis matriks menurut Imrona (2009), yaitu :

1. Matriks Bujur Sangkar

Matriks bujur sangkar yaitu matriks yang banyak barisnya sama dengan banyak kolomnya. Dalam matriks bujur sangkar dikenal diagonal utama yaitu entri-entri yang mempunyai nomor baris yang sama dengan nomor kolom. Bentuk umum matriks bujur sangkar sebagai berikut :

$$M_{n\times n} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

2. Matriks Segitiga Atas

Matriks segitiga atas adalah matriks bujur sangkar yang semua entri di bawah diagonal utama bernilai nol, sedangkan entri di atas diagonal utama paling sedikit ada satu elemen yang tak nol. Bentuk umum matriks segitiga atas sebagai berikut :

$$M_{n\times n} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

3. Matriks Segitiga Bawah

Matriks segitiga bawah adalah matriks bujur sangkar yang semua entri di atas diagonal utamanya bernilai nol, sedangkan entri di bawah diagonal utama paling sedikit ada satu elemen yang tak nol. Bentuk umum matriks segitiga bawah sebagai berikut

$$M_{n\times n} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

4. Matriks Diagonal

Matriks diagonal yaitu matriks bujur sangkar yang semua entri di luar diagonal utamanya bernilai nol. Bentuk umum matriks diagonal sebagai berikut :

$$D_{n\times n} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

5. Matriks Satuan

Matriks satuan (matriks identitas) yaitu matriks diagonal yang entri-entri pada diagonal utamanya adalah bilangan satu dan entri-entri lainnya adalah bilangan nol. Matriks satuan ini dilambangkan dengan I_n , di mana n adalah ordo matriks tersebut. Bentuk umum matriks satuan (identitas) sebagai berikut :

$$I_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

6. Matriks Skalar

Matriks skalar adalah matriks diagonal yang semua entri pada diagonal utamanya bernilai sama, misalnya c, dengan $c \neq 0$. Bentuk umum matriks skalar sebagai berikut :

$$S_{n\times n} = \begin{bmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{bmatrix}$$

Pengaruh perkalian sebarang matriks dengan matriks skalar adalah seperti mengalikan matriks sebarang tersebut dengan skalar c.

7. Matriks Nol

Matriks nol yaitu matriks yang semua entrinya adalah bilangan nol. Jika ordo dipentingkan matriks nol ini dapat ditulis beserta jumlah baris dan kolomnya. Bentuk umum matriks nol sebagai berikut :

$$O_{n\times n}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

8. Matriks Invers

Matriks bujur sangkar M disebut mempunyai invers jika terdapat matriks N yang sedemikian rupa sehingga memenuhi $NM = MN = I$. Untuk notasi, invers matriks N biasanya dinyatakan oleh N^{-1}.

9. Matriks Simetrik

Matriks bujur sangkar disebut matriks simetrik jika $M = M^T$. Entri-entri pada diagonal utama sebagai sumbu pencerminan sedangkan entri pada baris ke-i kolom ke-j akan dicerminkan sehingga sama dengan entri kolom ke-i baris ke-j atau:

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Jika $M^T = -M$, maka matriks bujur sangkar disebut anti simetrik, yaitu matriks yang transposenya adalah negatif dari matriks tersebut, dan elemen diagonal utamanya =0.

2.1.3. Operasi Matriks

Beberapa operasi dari matriks menurut Rorres (2004) diantaranya :

1. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Jika M dan N adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama, maka jumlah $M + N$ adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri pada N dengan entri-entri yang bersesuaian pada M sedangkan selisih pengurangan $M - N$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan entri-entri pada M dengan entri-entri yang bersesuaian pada N.

2. Kelipatan Skalar

Jika M adalah matriks sebarang dan c adalah skalar sebarang, maka hasil kalinya (*product)* cM adalah matriks yang diperoleh dari perkalian setiap entri pada matriks M dengan bilangan c. Matriks cM disebut sebagai kelipatan skalar *(scalar multiple)* dari M.

3. Perkalian Matriks

Dua buah matriks dapat dikalikan apabila jumlah kolom pada matriks pertama sama dengan jumlah baris pada matriks kedua.

4. Transpos Matriks

Jika M adalah matriks $m \times n$, maka transpos dari M dinyatakan dengan M^T, yang mana M^T mempunyai ordo $n \times m$.

2.2. Diagonalisasi Matriks

Suatu matriks bujur sangkar M dikatakan dapat didiagonalisasi jika terdapat sebuah matriks P yang dapat dibalik sedemikian rupa sehingga:

$$P^{-1}MP = D \tag{2.2}$$

dengan D suatu matriks diagonal, matriks P dikatakan mendiagonalisasi M (Anton, 2012).

Teorema 2.1:

Jika M adalah sebuah matriks berukuran n x n, maka kedua pernyataan ini adalah ekuivalen:

1. M dapat didiagonalisasi
2. M memiliki n vektor eigen yang bebas linier.

Pembuktian Teorema 2.1 dapat dilihat pada lampiran 1.

Langkah – langkah yang digunakan untuk mendiagonalisasi suatu matriks M, yaitu :

i. Tentukan n vektor eigen dari M yang bebas linier, misalkan, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$
ii. Bentuk sebuah matriks P dengan $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ sebagai vektor–vektor kolomnya
iii. Matriks $P^{-1}MP$ kemudian akan menjadi matriks diagonal dengan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sebagai entri-entri diagonalnya secara berurutan, λ_i adalah nilai eigen yang berpadanan dengan $\mathbf{p}_i$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ (Anton, 2012).

2.3. Nilai dan Vektor Eigen

Definisi 2.1 Jika M adalah sebuah matriks n x n, maka sebuah vektor tak nol $\mathbf{x}$ pada $\mathbf{R}^n$ disebut vektor eigen (*eigen vektor*) dari M jika $M\mathbf{x}$ adalah sebuah kelipatan skalar dari $\mathbf{x}$, dapat ditulis:

$$M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{2.3.1}$$

Skalar λ dinamakan nilai eigen dari M dan $\mathbf{x}$ dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ. Pencarian nilai eigen matriks M yang berukuran $n \times n$ dapat dituliskan kembali sebagai:

$$M\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x} \tag{2.3.2}$$

atau secara ekuivalen

$$(\lambda I - M)\mathbf{x} = 0 \tag{2.3.3}$$

Supaya λ menjadi nilai eigen, maka haruslah ada pemecahan tak nol dari Persamaan (2.3.3). Pemecahan tersebut diperoleh jika dan hanya jika

$$|\lambda I - M| = 0 \tag{2.3.4}$$

Persamaan (2.3.4) dinamakan persamaan karakteristik M. Sedangkan skalar yang memenuhi Persamaan (2.3.4) adalah nilai eigen dari M (Anton, 2012).

Teorema 2.2:

Jika M adalah sebuah matriks $n\ x\ n$ dan λ adalah sebuah bilangan riil, maka pernyataa-pernyataan berikut ini adalah ekuivalen (Anton, 2012):

1. λ adalah sebuah nilai eigen dari M
2. Persamaan $(\lambda I - M)\mathbf{x} = 0$ memiliki solusi nontrivial
3. Terdapat sebuah vektor tak nol $\mathbf{x}$ pada $\mathbf{R}^n$ sedemikian sehingga $M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$
4. λ adalah sebuah solusi dari Persamaan karakteristik $|\lambda I - M| = 0$.

Pembuktian Teorema 2.2 dapat dilihat pada lampiran 2.

2.4. Basis

Definisi 2.2 Jika *V* adalah suatu ruang vektor sebarang dan $S = \{\mathbf{v}_1, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ adalah suatu himpunan vektor-vektor pada *V*, maka S disebut basis untuk *V* jika dua syarat berikut terpenuhi:

1. *S* bebas linier.
2. *S* merentang *V*.

Teorema 2.3:

Jika $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n\}$ adalah suatu basis dari ruang vektor *V*, maka setiap vektor $\mathbf{v}$ pada *V* dapat dinyatakan dalam bentuk $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$ dengan tepat satu cara (Anton, 2012).

Pembuktian Teorema 2.3 dapat dilihat pada lampiran 3.

2.5. Persamaan Rekursif

Definisi 2.3 Persamaan rekursif:

$$\mathbf{x}^{(n)} = M\mathbf{x}^{(n-1)}, n = 1,2,3, \dots \quad (2.5.1)$$

M merupakan matriks yang dapat didiagonalisasi. Berdasarkan Persamaan (2.5.1) diperoleh:

$$\mathbf{x}^{(n)} = M^n\mathbf{x}^{(0)} \quad (2.5.2)$$

(Anton, 2009)

2.6. Genetika

Genetika tergolong dalam ilmu hayat yang mempelajari turun-temurunnya sifat-sifat induk atau orangtua kepada keturunannya. Sejak ditemukan hukum keturunan pada permulaan abad ke-20 sampai sekarang genetika mengalami kemajuan sangat pesat.

Genetika merupakan ilmu pengetahuan dasar dalam usaha meyediakan bibit tanaman dan ternak unggul di bidang pertanian dan peternakan. Di bidang kedokteran genetika mempunyai lingkup yang sangat luas, bersifat akademis dan praktis, antar lain membahhas tentang peranan kromosom, pewarisan sifat-sifat genetik dan sifat-sifat antropologik, terjadinya cacad badan dan mental yang disebabkan oleh kelainan kromosom. Timbulnya penyakit karena kesalahan metabolisme bawaan, berbagai variasi respon terhadap obat-obatan, transplantasi, penyakit autoimun dan golongan darah, aspek keturunan pada kanker. Di samping itu genetika dibidang kedokteran juga menyangkut beberapa aspek keluarga, antara lain diagnosis kelainan genetik pada bayi sebelum lahir, penyuluhan tentang kemungkinan resiko mendapatkan anak dengan kelainan genetik sehinngga erat hubungan nya dengan program keluarga berencana, identifikasi bayi tertukar dan adopsi anak (Suryo, 2012).

Penelitian tentang pewarisan sifat melalui penyilangan pertama kali dilakukan oleh Gregor Johann Mendel (1822-1884), seorang biarawan di brunn, Austria. Mendel menyilangkan berbagai tanaman kacang ercis. Hasil persilangan menunjuan adanya pewarisan dari sifat-sifat dari induk ke keturunannya (Susanto, 2011).

2.7. Hukum Mendel

Pada bidang genetika dikenal adanya hukum *Mendel.* Hukum *Mendel* ada dua yaitu :

Hukum I mendel berbunyi: “Pada waktu berlangsung pembentukan gamet, setiap pasang gen disegregasi ke dalam masing-masing gamet yang terbentuk”(Cahyono, 2010).

Sebagai contoh, individu TT akan membentuk gamet T dann individu tt akan membentuk gamet t. Pada individu Tt akan membentuk gamet T dan t, terlihat bahwa gen T dan gen t dipisahkan (disegregasi) ke dalam gamet-gamet yang terbentuk tersebut (Susanto, 2011).

Hukum II Mendel berbunyi: “segregasi suatu pasangan gen tidak bergantung kepada segregasi pasangan gen lainnya, sehingga didalam gamet-gamet yang terbentuk akan terjadi pemilihan kombinasi gen-gen secara bebas” (Cahyono, 2010).

Sebagai contoh, jika gen yang menyebabkan biji berwarna kuning dan hijau masing-masing adalah gen G dan gen g, sedangkan gen yang menyebabkan biji halus dan keriput masing-masing adalah gen W dan gen w, maka persilangan dihibrid tersebut akan menghasilkan individu keturunan pertama dengan genotip GgWw (Susanto, 2011).

2.8. Pewarisan Autosomal

Sifat autosomal adalah sifat keturunan yang ditentukan oleh gen pada autosom. Gen pada autosom mempunyai dua macam yaitu dominan dan resesif. Karena jantan dan betina mempunyai autosom yang sama, maka sifat keturunan yang ditentukan oleh gen autosomal dapat ditemukan pada jantan maupun betina (Wijayanto, 2013). Pada pewarisan autosomal suatu keturunan akan mewarisi satu gen dari pasangan gen induknya. Besarnya peluang suatu keturunan mendapatkan warisan satu gen dari pasangan gen salah satu induknya adalah sama. Jika suatu induk memiliki genotip Aa maka peluang keturunannya mewarisi gen A sama dengan peluang keturunannya mewarisi gen a. Jadi, jika induk pertama bergenotip Aa dan induk kedua bergenotip Aa maka genotip keturunan yang mungkin terjadi adalah AA, Aa, dan aa. Pada pewarisan gen autosomal dominan, jika individu heterozigotik (pembawa penyakit) kawin dengan individu normal maka dalam keturunan kemungkinan timbulnya penyakit adalah 50 %. Sedangkan sifat keturunan yang ditentukan oleh sebuah gen resesif pada autosom baru akan tampak apabila suatu individu menerima gen itu dari kedua orang tuanya. Biasanya kedua orang tua itu nampak normal meskipun mereka itu sebenarnya pembawa (carier) gen resesif yang dimaksud, berarti bahwa mereka itu masing-masing heterozigotik (Wijayanto, 2013)

2.9. Persilangan Satu Sifat Beda (Monohibrid)

Persilangan satu sifat beda didasarkan pada percobaan Mendel yang menyilangkan tanaman ercis (Pisum sativum) tinggi dan tanaman ercis pendek yang masing-masing merupakan galur murni. Wijayanto (2013) mengemukakan bahwa sebelum melakukan suatu persilangan, setiap individu menghasilkan gamet-gamet yang kandungan gennya separuh dari kandungan gen pada individu. Sebagai contoh, individu AA akan membentuk gamet A, dan individu aa akan membentuk gamet a. Pada individu Aa, yang menghasilkan gamet A dan gamet a, akan terlihat bahwa gen

A dan gen a akan dipisahkan ke dalam gamet-gamet yang terbentuk tersebut. Prinsip inilah yang kemudian dikenal sebagai hukum segregasi atau hukum I Mendel yaitu pada waktu berlangsung pembentukan gamet, tiap pasang gen akan disegregasi ke dalam masing-masing gamet yang terbentuk. Dengan demikian, menurut hukum I Mendel skema penyilangan kacang ercis tinggi dan kacang ercis pendek dapat dilihat pada skema berikut.

P : ♀ Tinggi x Pendek ♂

AA aa

Gamet A a

F1 : Tinggi

Aa

Dari keturunan pertama (F1) dapat disilangkan dengan sesamanya menghasilkan keturunan kedua yang dapat dilihat pada Tabel 2.1.

♂ \ ♀	A	A
A	AA	Aa
a	Aa	Aa

Tabel 2.1 persilangan monohibrid

Dari penjelasan di atas, dapat ditentukan frekuensi dari masing-masing gamet yang dihasilkan dari setiap individu baik yang dominan (gamet A) maupun yang resesif (gamet a) adalah sama. Secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut.

$$P(A) = P(a) = \frac{1}{2} \tag{2.9.1}$$

Persamaan (2.9.1) sudah memenuhi sifat identitas dari peluang yaitu:

$$P(A) + P(a) = 1 \tag{2.9.2}$$