BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai penurunan genotip pada pewarisan genotip autosomal dengan menggunakan persamaan rekursif.

4.1 Diagonalisasi Matriks dan Persamaan Rekursif

Misalkan sebuah matriks $M_{n\times n}$ dengan entri m_{ij} dengan i,j = 1,2, …, n, maka matriks dapat ditulis:

$$M_{n\times n} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2n} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \cdots & m_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{11} & m_{11} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}.$$

Misalkan matriks $M_{n\times n}$ merupakan matriks non-singular, maka matriks M memiliki $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ sebagai nilai eigen yang berpadanan dengan vektor-vektor eigen $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \ldots, \mathbf{p}_n$.

Diasumsikan $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots \geq \lambda_n$.Vektor kolom $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \ldots, \mathbf{p}_n$ dibentuk menjadi sebuah matriks $P_{n\times n}$ yang dapat ditulis $P = [\mathbf{p}_1 \ \vdots \ \mathbf{p}_2 \ \vdots \ \ldots \ \vdots \ \mathbf{p}_n]$, maka matriks $P_{n\times n}$ dapat dinyatakan dengan: $P_{n\times n} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{11} & p_{11} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}.$

Misalkan $P_{n\times n}$ adalah matriks non-singular, maka ada invers dari matriks $P_{n\times n}$, yaitu $P^{-1}_{n\times n}$.

Misalkan matriks M dapat didiagonalisasi maka terdapat sebuah matriks P yang dapat dibalik sedemikian rupa sehingga $P^{-1} M P$ adalah matriks diagonal berukuran $n \times n$, yaitu:

$P^{-1} M P = D$

$P P^{-1} M P = P D$ (kedua ruas dikalikan dengan matriks P)

$I M P = P D$ (berlaku $P P^{-1} = P^{-1} P = I$; I merupakan matriks identitas)

$M P = P D$

$M P P^{-1} = P D P^{-1}$ (kedua ruas dikalikan dengan matriks P^{-1})

$M I = P D P^{-1}$

$M = P D P^{-1}$

Jadi, diperoleh matriks $M = P D P^{-1}$.

$M^2 = M M$ (dengan $M = P D P^{-1}$)

$M^2 = P D P^{-1} P D P^{-1}$

$M^2 = P D I D P^{-1}$ (berlaku $P P^{-1} = P^{-1} P = I$)

$M^2 = P D D P^{-1}$

$M^2 = P D^2 P^{-1}$ (D merupakan matriks diagonal)

dan seterusnya, sehingga secara umum, dapat dituliskan:

$M^n = P D^n P^{-1}$; untuk n =1,2,3, … (4.1.1)

Persamaan rekursif: $\mathbf{x}^{(n)} = M \mathbf{x}^{(n-1)}$, n = 1, 2, 3, …, dengan matriks $M_{n \times n}$ yang dapat didiagonalisasi maka dapat dituliskan:

- Untuk n =1:

  $\mathbf{x}^{(1)} = M \mathbf{x}^{(1-1)}$

  $\mathbf{x}^{(1)} = M \mathbf{x}^{(0)}$

- Untuk n = 2:

  $\mathbf{x}^{(2)} = M\,\mathbf{x}^{(2-1)}$

  $\mathbf{x}^{(2)} = M\,\mathbf{x}^{(1)}$, dengan $\mathbf{x}^{(1)} = M\,\mathbf{x}^{(0)}$

  $\mathbf{x}^{(2)} = M\,M\,\mathbf{x}^{(0)}$

  $\mathbf{x}^{(2)} = M^2\,\mathbf{x}^{(0)}$

- Untuk n = 3:

  $\mathbf{x}^{(3)} = M\,\mathbf{x}^{(3-1)}$

  $\mathbf{x}^{(3)} = M\,\mathbf{x}^{(2)}$, dengan $\mathbf{x}^{(2)} = M^2\,\mathbf{x}^{(0)}$

  $\mathbf{x}^{(3)} = M\,M^2\,\mathbf{x}^{(0)}$

  $\mathbf{x}^{(3)} = M^3\,\mathbf{x}^{(0)}$

dan seterusnya, secara umum dapat dituliskan:

$$\mathbf{x}^{(n)} = M^n\,\mathbf{x}^{(0)} \text{ , untuk } n = 1, 2, \ldots \tag{4.1.2}$$

Dari Persamaan (4.1.1) diketahui bahwa $M^n = P\,D^n\,P^{-1}$, sehingga Persamaan (4.1.2) dapat ditulis menjadi

$$\mathbf{x}^{(n)} = P\,D^n\,P^{-1}\,\mathbf{x}^{(0)} \tag{4.1.3}$$

dengan $D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m^n \end{bmatrix}$.

Persamaan (4.1.3) dapat ditulis menjadi $\mathbf{x}^{(n)} = P\,D^n\,\alpha$; dengan $\alpha = P^{-1}\,\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$.

sehingga, $\mathbf{x}^{(n)} = P\, D^n\, P^{-1}\, \mathbf{x}^{(0)}$

$$= [\mathbf{p}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_m] \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}.$$

4.2 Pewarisan Genotip Autosomal

Diasumsikan terdapat 2 gen yang mengatur sifat fenotip pada individu, yaitu gen A dan a dan diasumsikan gen homozigot resesif (aa). Gen A merupakan gen dominan dan gen a merupakan gen resesif.

Gamet yang terbentuk dari gen A dan a, yaitu: AA, Aa, dan aa. Gamet AA merupakan gamet homozigot dominan, gamet aa merupakan gamet homozigot resesif, dan gamet Aa merupakan gamet heterozigot. Genotip AA dan Aa menghasilkan individu dengan fenotip yang sama dikarenakan gen A mendominasi gen a. Berdasarkan asumsi bahwa *mating* antara induk jantan dan induk betina adalah sama dengan *mating* antara induk betina dan *mating* induk jantan, maka kemungkinan *mating* yang terjadi ditulis pada Tabel 4.1 berikut:

Tabel 4.1 *Mating* pada Kasus Autosomal

Genotip Induk (P)	
♂	♀
AA	AA
AA	Aa
AA	Aa
Aa	Aa
Aa	Aa
aa	Aa

Berdasarkan *mating* yang terdapat pada Tabel 4.1, diperoleh keturunan generasi anak (F_1) dengan peluang yang berbeda-beda untuk tiap genotipnya.

1. *Mating* AA×AA

Induk jantan dan betina bergenotip AA.

P: ♂ ♀

AA × AA

Gamet A A

Selanjutnya, genotip keturunan diperoleh dengan cara membuat tabel persilangan sebagai berikut:

F_1:

♂ \ ♀	A	A
A	AA	AA
A	AA	AA

Peluang munculnya genotip AA adalah $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$.

Peluang munculnya genotip Aa adalah 0.

Peluang munculnya genotip aa adalah 0.

2. *Mating* AA×Aa

Induk jantan bergenotip AA dan induk betina Aa.

P: ♂ ♀

AA × Aa

Gamet A A,a

Selanjutnya, genotip keturunan diperoleh dengan cara membuat tabel persilangan sebagai berikut:

F$_1$:

♀ / ♂	A	a
A	AA	Aa
A	AA	Aa

Peluang munculnya genotip AA adalah $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

Peluang munculnya genotip Aa adalah $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

Peluang munculnya genotip aa adalah 0.

3. *Mating* AA×aa

Induk jantan bergenotip AA dan induk betina aa.

P:	♂		♀
	AA	×	aa
Gamet	A		a

Selanjutnya, genotip keturunan diperoleh dengan cara membuat tabel persilangan sebagai berikut:

F$_1$:

♀ / ♂	a	a
A	Aa	Aa
A	Aa	Aa

Peluang munculnya genotip AA adalah 0

Peluang munculnya genotip Aa adalah $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$.

Peluang munculnya genotip aa adalah 0.

4. *Mating* Aa×Aa

Induk jantan dan betina bergenotip Aa.

P:	♂		♀
	Aa	×	Aa
Gamet	A,a		A,a

Selanjutnya, genotip keturunan diperoleh dengan cara membuat tabel persilangan sebagai berikut:

F$_1$:

♂ \ ♀	A	a
A	AA	Aa
a	Aa	aa

Peluang munculnya genotip AA adalah $\frac{1}{4}$.

Peluang munculnya genotip Aa adalah $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Peluang munculnya genotip aa adalah $\frac{1}{4}$.

5. *M*ating Aa×aa

Induk jantan bergenotip Aa dan induk betina aa.

P:	♂		♀
	Aa	×	aa
Gamet	A,a		a

Selanjutnya, genotip keturunan diperoleh dengan cara membuat tabel persilangan sebagai berikut:

F_1:

♂ \ ♀	a	a
A	Aa	Aa
a	aa	aa

Peluang munculnya genotip AA adalah 0.

Peluang munculnya genotip Aa adalah $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

Peluang munculnya genotip aa adalah $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

6. *Mating* aa×aa

Induk jantan dan betina bergenotip aa.

P:	♂		♀
	Aa	×	aa
Gamet	A		a

Selanjutnya, genotip keturunan diperoleh dengan cara membuat tabel persilangan sebagai berikut:

F_1:

♂ \ ♀	a	a
A	aa	aa
A	aa	aa

Peluang munculnya genotip AA adalah 0.

Peluang munculnya genotip Aa adalah 0.

Peluang munculnya genotip aa adalah $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$.

Rekapitulasi hasil *mating* pada kasus *autosomal* ditampilkan pada Tabel 4.2.

Tabel 4.2 Hasil *Mating* pada Kasus Autosomal

Genotip Keturunan (F_1)	Genotip Induk (P)					
	AA×AA (1)	AA×Aa (2)	AA×aa (3)	Aa×Aa (4)	Aa×aa (5)	aa×aa (6)
AA	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0
Aa	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Aa	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
Jumlah peluang	1	1	1	1	1	1

Berdasarkan Tabel 4.2, maka terdapat beberapa kasus:

1. Terdapat minimal 1 induk bergenotip AA (normal homozigot), terjadi pada *mating*: AA×AA, AA×Aa, dan AA×aa.
2. Terdapat minimal 1 induk bergenotip Aa (karier), terjadi pada *mating*: AA×Aa, Aa×Aa, dan Aa×aa.
3. Terdapat minimal 1 induk yang memiliki genotip aa (*defect)*, terjadi pada *mating*: AA×aa, Aa×aa, dan aa×aa.
4. Kedua induk memiliki genotip yang sama, terjadi pada *mating*: AA×AA, Aa×Aa, dan aa×aa.

Penentuan genotip populasi keturunan ke-*n* dapat menggunakan persamaan rekursif:

$\mathbf{x}^{(n)} = M\,\mathbf{x}^{(n-1)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ (2.5.1)

- Untuk n =1:

  $\mathbf{x}^{(1)} = M\,\mathbf{x}^{(1-1)}$

  $\mathbf{x}^{(1)} = M\,\mathbf{x}^{(0)}$

- Untuk $n = 2$:

  $\mathbf{x}^{(2)} = M\,\mathbf{x}^{(2-1)}$

  $\mathbf{x}^{(2)} = M\,\mathbf{x}^{(1)}$, dengan $\mathbf{x}^{(1)} = M\,\mathbf{x}^{(0)}$

  $\mathbf{x}^{(2)} = M\,M\,\mathbf{x}^{(0)}$

  $\mathbf{x}^{(2)} = M^2\,\mathbf{x}^{(0)}$

- Untuk $n = 3$:

  $\mathbf{x}^{(3)} = M\,\mathbf{x}^{(3-1)}$

  $\mathbf{x}^{(3)} = M\,\mathbf{x}^{(2)}$, dengan $\mathbf{x}^{(2)} = M^2\,\mathbf{x}^{(0)}$

  $\mathbf{x}^{(3)} = M\,M^2\,\mathbf{x}^{(0)}$

  $\mathbf{x}^{(3)} = M^3\,\mathbf{x}^{(0)}$

dan seterusnya, sehingga secara umum, dapat dituliskan:

$\mathbf{x}^{(n)} = M^n\,\mathbf{x}^{(0)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ (4.2.1)

Kasus pewarisan autosomal memungkinkan terdapat tiga genotip yang ada pada individu, yaitu: AA, Aa, dan aa.

$\mathbf{x}^{(n)}$ merupakan fraksi individu dengan genotip AA, Aa, dan aa. Dengan demikian, $\mathbf{x}^{(n)}$ pada pewarisan genotip autosomal dapat dituliskan:

a_n = fraksi dari individu dengan genotip AA pada generasi ke-*n*

b_n = fraksi dari individu dengan genotip Aa pada generasi ke-*n*

c_n = fraksi dari individu dengan genotip aa pada generasi ke-*n*

untuk $n = 0, 1, 2, \ldots$ Sehingga

$$a_n + b_n + c_n = 1 \tag{4.2.2}$$

4.3 Permasalahan Pewarisan Autosomal

Permasalahan pewarisan *autosomal* pada penelitian ini dibahas untuk tiga kasus, yaitu setiap induk dikawinkan dengan masing-masing pasangan bergenotip normal *homozygot*, setiap induk dikawinkan dengan masing-masing pasangan bergenotip normal *heterozygot*, setiap induk dikawinkan dengan masing-masing pasangan bergenotip aa.

Kasus 1: Setiap induk bergenotip AA, Aa, aa disilangkan dengan pasangan bergenotip normal *homozygot* (AA)

Induk (bergenotip AA, Aa, aa) disilangkan dengan pasangan bergenotip AA, sehingga menghasilkan genotip keturunan yang berbeda yaitu terjadi pada kolom (1), (2), dan (3) di Tabel 4.2 seperti yang ditampilkan pada Tabel 4.3.

Tabel 4.3 Hasil Persilangan Induk Bergenotip AA,Aa,aa dengan Pasangan Bergenotip AA

Genotip Keturunan (F_1)	Genotip Induk (P)		
	AA×AA	AA×Aa	AA×aa
AA	1	$\frac{1}{2}$	0
Aa	0	$\frac{1}{2}$	1
Aa	0	0	0

Tabel 4.3 dapat ditulis dalam bentuk matriks $M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Pasangan induk AA × AA menghasilkan genotip keturunan AA, pasangan induk AA × Aa menghasilkan genotip keturunan AA dan Aa, dan pasangan induk AA × aa menghasilkan genotip keturunan Aa.

Berdasarkan Tabel 4.3 diperoleh:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + \tfrac{1}{2} b_{n-1} \\ b_n &= \tfrac{1}{2} b_{n-1} + c_{n-1} \\ c_n &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.3.1)$$

Distribusi keturunan untuk generasi ke-*n* dapat ditulis sebagai $\mathbf{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$

dimana $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$

Berdasarkan persamaan (4.3.1) diperoleh

$$\mathbf{x}^{(n)} = M\mathbf{x}^{(n-1)}$$

dimana

untuk $n = 1$ maka $\mathbf{x}^{(1)} = M\mathbf{x}^{(0)}$

untuk $n = 2$ maka $\mathbf{x}^{(2)} = M\mathbf{x}^{(1)}$

$= MM\mathbf{x}^{0}$

$= M^{2}\mathbf{x}^{0}$

untuk $n = 3$ maka $\mathbf{x}^{(3)} = M\mathbf{x}^{(2)}$

$= MM^{2}\mathbf{x}^{(0)}$

$= M^{3}\mathbf{x}^{(0)}$

untuk $n = 4$ maka $\mathbf{x}^{(4)} = M\mathbf{x}^{(3)}$

$= MM^{3}\mathbf{x}^{(0)}$

$= M^{4}\mathbf{x}^{(0)}$

$\vdots$

Secara umum dapat ditulis $\mathbf{x}^{(n)} = M^{n}\mathbf{x}^{(0)}$, dengan $n =$ banyaknya keturunan.

Kemudian dilakukan perhitungan untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks M.

dengan

$|\lambda I - M| = 0$

maka

$$\left|\lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\0 & \frac{1}{2} & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\0 & \lambda & 0\\0 & 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\0 & \frac{1}{2} & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \lambda-\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan metode *Sarrus*, maka didapatkan

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} \lambda-1 & -\dfrac{1}{2} & 0 & \lambda-1 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & \lambda-\dfrac{1}{2} & -1 & 0 & \lambda-\dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$(\lambda-1)\left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right)(\lambda) = 0$$

$$\left(\lambda^2-\tfrac{1}{2}\lambda-\lambda+\tfrac{1}{2}\right)(\lambda) = 0$$

$$\left(\lambda^2-\tfrac{3}{2}\lambda+\tfrac{1}{2}\right)(\lambda) = 0 \qquad (4.3.2)$$

Kemudian Persamaan (4.3.2) di faktorkan, maka nilai eigen dari matriks *M* adalah

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \frac{1}{2},\ \lambda_3 = 0$

Langkah selanjutnya adalah mencari vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen dari matriks *M*

dengan

$(\lambda I - M)\mathbf{x} = 0$

$$\left(\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix}\lambda-1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \lambda-\frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{bmatrix}=0$$

Untuk $\lambda_1 = 1$, $\begin{bmatrix}\lambda-1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \lambda-\frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{bmatrix}=0$

$$\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{bmatrix}=0$$

diperoleh persamaan: $-\frac{1}{2}b_n = 0$

$$\frac{1}{2}b_n - c_n = 0$$

$$c_n = 0$$

sehingga diperoleh $b_n = 0, c_n = 0,$ dan $a_n = 1$.

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 1$ adalah $\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$

Untuk $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, $\begin{bmatrix}\lambda-1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \lambda-\frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{bmatrix}=0$

$$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{bmatrix}=0$$

didapatkan persamaan:

$$\left.\begin{aligned}-\frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}b_n &= 0\\ -c_n &= 0\\ \frac{1}{2}c_n &= 0\end{aligned}\right\} \tag{4.3.3}$$

Dari Persamaan (4.3.3) didapatkan nilai $c_n = 0$.

Misalkan $a_n = t \Leftrightarrow -\frac{1}{2}b_n = \frac{1}{2}t$

$$\Leftrightarrow \quad -b_n = t$$

$$\Leftrightarrow \quad b_n = -t$$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Untuk $\lambda_3 = 0$, $\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = 0$$

didapatkan persamaan: $\quad -a_n - \frac{1}{2}b_n = 0$

$$-\frac{1}{2}b_n - c_n = 0$$

Misalkan $a_n = t \Leftrightarrow -t = \frac{1}{2}b_n$, $\qquad -\frac{1}{2}b_n - c_n = 0$

$\Leftrightarrow -2t = b_n \qquad -\frac{1}{2}(-2t) = c_n$

$$t = c_n$$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 0$ adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dibentuk matrik pendiagonal dari matriks M adalah matriks

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari hasil perhitungan diperoleh matriks

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi $D = P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

diperoleh $D^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

sehingga $M^n = PD^nP^{-1}$.

Oleh karena

$\mathbf{x}^{(n)} = M^n\mathbf{x}^{(0)}$

$\mathbf{x}^{(n)} = PD^nP^{-1}\mathbf{x}^{(0)}$

maka

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) b_0 + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) c_0 \\ 0 + \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 + c_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + b_0 + c_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jika *n* mendekati tak hingga maka $\left({}^{1}/_{2}\right)^{n}$ menuju ke nol, yaitu:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$= 0$$

karena $a_n + b_n + c_n = 1$ pada persamaan (4.2.2), sehingga

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 0.b_0 - 0.c_0 \\ 0.b_0 + 0.c_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jadi, ini berarti semua keturunan pada generasi ke-*n* bergenotip AA yang merupakan keturunan normal *homozygot*.

Kasus 2: Setiap induk bergenotip AA, Aa, aa disilangkan dengan pasangan bergenotip normal *heterozygot* (Aa)

Induk (bergenotip AA, Aa, aa) disilangkan dengan pasangan bergenotip Aa, sehingga menghasilkan genotip keturunan yang berbeda yaitu terjadi pada kolom (2), (4), dan (5) di Tabel 4.2 seperti yang ditampilkan pada Tabel 4.4.

Tabel 4.4 Hasil Persilangan Induk Bergenotip AA,Aa,aa dengan Pasangan Bergenotip Aa

Genotip Keturunan (F_1)	Genotip Induk (P)		
	Aa×AA	Aa×Aa	Aa×aa
AA	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
Aa	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Aa	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Tabel 4.4 dapat ditulis dalam bentuk matriks $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Pasangan induk Aa × AA menghasilkan genotip keturunan AA dan Aa, pasangan induk Aa × Aa menghasilkan genotip keturunan AA, Aa dan aa, pasangan induk Aa × aa menghasilkan genotip keturunan Aa dan aa.

Berdasarkan Tabel 4.4 diperoleh:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{2}a_{n-1} + \tfrac{1}{4}b_{n-1} \\ b_n &= \tfrac{1}{2}a_{n-1} + \tfrac{1}{2}b_{n-1} + \tfrac{1}{2}c_{n-1} \\ c_n &= \tfrac{1}{4}b_{n-1} + \tfrac{1}{4}c_{n-1} \end{aligned}\right\} \qquad (4.3.4)$$

Distribusi keturunan untuk generasi ke-*n* dapat ditulis sebagai $\mathbf{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$

dimana $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} a_\mathbf{0} \\ b_\mathbf{0} \\ c_\mathbf{0} \end{bmatrix}$

Berdasarkan persamaan (4.3.4) diperoleh

$\mathbf{x}^{(n)} = M\mathbf{x}^{(n-1)}$

dimana

untuk $n = 1$ maka $\mathbf{x}^{(1)} = M\mathbf{x}^{(0)}$

untuk $n = 2$ maka $\mathbf{x}^{(2)} = M\mathbf{x}^{(1)}$

$= MM\mathbf{x}^{0}$

$= M^{2}\mathbf{x}^{0}$

untuk $n = 3$ maka $\mathbf{x}^{(3)} = M\mathbf{x}^{(2)}$

$= MM^{2}\mathbf{x}^{(0)}$

$= M^{3}\mathbf{x}^{(0)}$

untuk $n = 4$ maka $\mathbf{x}^{(4)} = M\mathbf{x}^{(3)}$

$= MM^{3}\mathbf{x}^{(0)}$

$= M^{4}\mathbf{x}^{(0)}$

$\vdots$

Secara umum dapat ditulis $\mathbf{x}^{(n)} = M^{n}\mathbf{x}^{(0)}$, dengan $n =$ banyaknya keturunan.

Kemudian dilakukan perhitungan untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks M.

dengan

$|\lambda I - M| = 0$

$$\left|\lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\right|=0$$

$$\begin{vmatrix}\lambda-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{4} & \lambda-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=0$$

Dengan menggunakan metode *Sarrus*, maka didapatkan

$$\left[\begin{array}{ccc|cc}\lambda-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \lambda-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{4} & \lambda-\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4}\end{array}\right]$$

$\lambda^3-\frac{3}{2}\lambda^2+\frac{1}{2}\lambda=0$

$\lambda\left(\lambda^2-\frac{3}{2}\lambda+\frac{1}{2}\right)=0$

Maka didapat nilai eigen dari matriks adalah sebagai berikut $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, dan $\lambda_3=\frac{1}{2}$.

Langkah selanjutnya adalah mencari vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen dari matriks M

dengan $(\lambda I-M)\mathbf{x}=0$

$$\left(\lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{bmatrix}=0$$

$$\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{bmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix}\lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{4} & \lambda - \frac{1}{2}\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{bmatrix} = 0$$

Untuk $\lambda_1 = 0$, $\begin{bmatrix}\lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{4} & \lambda - \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{bmatrix} = 0$

$$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{bmatrix} = 0$$

diperoleh persamaan
$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{2}a_n - \frac{1}{4}b_n &= 0\\ -\frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}b_n - \frac{1}{2}c_n &= 0\\ -\frac{1}{4}b_n - \frac{1}{2}c_n &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (4.3.5)$$

Berdasarkan Persamaan (4.3.5) didapatkan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 0$ adalah $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ 1\\ -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

Untuk $\lambda_2 = 1$, $\begin{bmatrix}\lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{4} & \lambda - \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{bmatrix} = 0$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = 0$$

didapatkan persamaan, $\frac{1}{2}a_n - \frac{1}{4}b_n = 0$

$$-\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n - \frac{1}{2}c_n = 0$$

$$-\frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n = 0$$

Didapatkan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 1$ adalah $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Untuk $\lambda_3 = \frac{1}{2}$, $\begin{bmatrix} \lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \lambda - \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = 0$$

didapatkan persamaan, $-\frac{1}{4}b_n = 0$

$$-\frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}c_n = 0$$

$$-\frac{1}{4}b_n = 0$$

Didapatkan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ adalah $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dibentuk matrik pendiagonal dari matriks M adalah matriks $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

Dari hasil perhitungan diperoleh invers dari matriks P adalah sebagai berikut

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Jadi $D = P^{-1}MP = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

diperoleh $D^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}$

Jika n mendekati tak hingga maka $\left(1/2\right)^n$ menuju ke nol, yaitu:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$= 0$$

sehingga matriks $D^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}$ menjadi $D^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

maka $M^n = PD^nP^{-1}$.

Oleh karena

$\mathbf{x}^{(n)} = M^n \mathbf{x}^{(0)}$

$\mathbf{x}^{(n)} = PD^n P^{-1} \mathbf{x}^{(0)}$

maka

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} a_0 + \frac{1}{4} b_0 + \frac{1}{4} c_0 \\ \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2} b_0 + \frac{1}{2} c_0 \\ \frac{1}{4} a_0 + \frac{1}{4} b_0 + \frac{1}{4} c_0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dengan menggunakan $a_n + b_n + c_n = 1$ pada persamaan (4.2.2)

sehingga $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} a_0 + \frac{1}{4} b_0 + \frac{1}{4} c_0 \\ \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2} b_0 + \frac{1}{2} c_0 \\ \frac{1}{4} a_0 + \frac{1}{4} b_0 + \frac{1}{4} c_0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} (a_0 + b_0 + c_0) \\ \frac{1}{2} (a_0 + b_0 + c_0) \\ \frac{1}{4} (a_0 + b_0 + c_0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}.1 \\ \frac{1}{2}.1 \\ \frac{1}{4}.1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Jadi, ini berarti semua keturunan pada generasi ke-*n* bergenotip normal *homozygot* AA, bergenotip normal *heterozygot* (*carrier*) Aa, dan bergenotip aa.

Kasus 3: Setiap induk bergenotip AA, Aa, aa disilangkan dengan pasangan bergenotip aa

Induk (bergenotip AA, Aa, aa) disilangkan dengan pasangan bergenotip aa, sehingga menghasilkan genotip keturunan yang berbeda yaitu terjadi pada kolom (3), (5), dan (6) di Tabel 4.2 seperti yang ditampilkan pada Tabel 4.5.

Tabel 4.5 Hasil Persilangan Induk Bergenotip AA,Aa,aa dengan Pasangan Bergenotip aa

Genotip Keturunan (F_1)	Genotip Induk (P)		
	aa×AA	aa×Aa	aa×aa
AA	0	0	0
Aa	1	$\frac{1}{2}$	0
Aa	0	$\frac{1}{2}$	1

Tabel 4.5 dapat ditulis dalam bentuk matriks $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

Pasangan induk aa $\times$ AA menghasilkan genotip keturunan Aa, pasangan induk aa $\times$ Aa menghasilkan genotip keturunan Aa dan aa, pasangan induk aa $\times$ aa menghasilkan genotip keturunan aa.

Berdasarkan Tabel 4.5 diperoleh:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 0 \\ b_n &= a_{n-1} + \tfrac{1}{2} b_{n-1} \\ c_n &= \tfrac{1}{2} b_{n-1} + c_{n-1} \end{aligned}\right\} \qquad (4.3.6)$$

Distribusi keturunan untuk generasi ke-*n* dapat ditulis sebagai $\mathbf{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$

dimana $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$

Berdasarkan persamaan (4.3.6) diperoleh

$\mathbf{x}^{(n)} = M\mathbf{x}^{(n-1)}$

dimana

untuk $n = 1$ maka $\mathbf{x}^{(1)} = M\mathbf{x}^{(0)}$

untuk $n = 2$ maka $\mathbf{x}^{(2)} = M\mathbf{x}^{(1)}$

$$= MM\mathbf{x}^0$$

$$= M^2\mathbf{x}^0$$

untuk $n = 3$ maka $\mathbf{x}^{(3)} = M\mathbf{x}^{(2)}$

$$= MM^2\mathbf{x}^{(0)}$$

$$= M^3\mathbf{x}^{(0)}$$

untuk $n = 4$ maka $\mathbf{x}^{(4)} = M\mathbf{x}^{(3)}$

$$= MM^3\mathbf{x}^{(0)}$$

$$= M^4\mathbf{x}^{(0)}$$

$$\vdots$$

Secara umum dapat ditulis $\mathbf{x}^{(n)} = M^n\mathbf{x}^{(0)}$, dengan $n =$ banyaknya keturunan.

Kemudian dilakukan perhitungan untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks *M*.

dengan

$|\lambda I - M| = 0$

$$\left|\lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\1 & \frac{1}{2} & 0\\0 & \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\0 & \lambda & 0\\0 & 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\1 & \frac{1}{2} & 0\\0 & \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0\\-1 & \lambda - \frac{1}{2} & 0\\0 & -\frac{1}{2} & \lambda - 1\end{vmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan metode *Sarrus*, maka didapatkan

$$\left[\begin{array}{ccc|cc}\lambda & 0 & 0 & \lambda & 0\\-1 & \lambda - \frac{1}{2} & 0 & -1 & \lambda - \frac{1}{2}\\0 & -\frac{1}{2} & \lambda - 1 & 0 & -\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

$\lambda\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)(\lambda - 1)0 = 0$

$\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \lambda + \frac{1}{2}\right) = 0$

$$\lambda\left(\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2}\right) = 0 \tag{4.3.7}$$

Kemudian Persamaan (4.3.7) di faktorkan, maka nilai eigen dari matriks M adalah

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \frac{1}{2},\ \lambda_3 = 1$

Langkah selanjutnya adalah mencari vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen dari matriks M

dengan

$(\lambda I - M)\mathbf{x} = 0$

$$\left(\lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{bmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{bmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ -1 & \lambda - \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda - 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{bmatrix} = 0$$

Untuk $\lambda_1 = 0$, $\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ -1 & \lambda - \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda - 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{bmatrix} = 0$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{bmatrix} = 0$$

diperoleh persamaan: $-a_n - \frac{1}{2}b_n = 0$

$-\frac{1}{2}b_n - c_n = 0$

sehinggga diperoleh $a_n = -\frac{1}{2}, b_n = 1,$ dan $c_n = -\frac{1}{2}$.

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 0$ adalah $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Untuk $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = 0$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = 0$$

didapatkan persamaan:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} a_n &= 0 \\ -a_n &= 0 \\ -\frac{1}{2} b_n - \frac{1}{2} c_n &= 0 \end{aligned} \right\} \qquad (4.3.8)$$

Dari Persamaan (4.3.8) didapatkan nilai $a_n = 0$.

Misalkan $c_n = t \Leftrightarrow -\frac{1}{2} b_n = \frac{1}{2} t$

$$\Leftrightarrow \quad b_n = t$$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Untuk $\lambda_3 = 1$, $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = 0$$

didapatkan persamaan:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 0 \\ -a_n + \tfrac{1}{2} b_n &= 0 \\ -\tfrac{1}{2} b_n &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.3.9)$$

Dari Persamaan (4.3.9) didapat bahwa:

$a_n = 0$

$b_n = 0$

$c_n = 1$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 0$ adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dibentuk matrik pendiagonal dari matriks *M* adalah matriks

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari hasil perhitungan diperoleh matriks

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi $D = P^{-1}MP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

diperoleh $D^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Jika *n* mendekati tak hingga maka $\left(1/_2\right)^n$ menuju ke nol, yaitu:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$= 0$$

sehingga matriks$D^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ menjadi $D^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

maka $M^n = PD^nP^{-1}$.

Oleh karena

$\mathbf{x}^{(n)} = M^n\mathbf{x}^{(0)}$

$\mathbf{x}^{(n)} = PD^nP^{-1}\mathbf{x}^{(0)}$

maka

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_0 + b_0 + c_0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dengan menggunakan $a_n + b_n + c_n = 1$ pada persamaan (4.2.2) diperoleh.

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_0 + b_0 + c_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, semua keturunan pada generasi ke-n menghasilkan keturunan yang bergenotip aa.