LAMPIRAN

Lampiran 1: Pembuktian Teorema 2.1

Teorema 2.1:

Jika M adalah sebuah matriks berukuran *n x n*, maka kedua pernyataan ini adalah ekuivalen:

1. *M* dapat didiagonalisasi
2. *M* memiliki *n* vektor eigen yang bebas linier.

Bukti $(\mathbf{1}) \Rightarrow (\mathbf{2})$. Karena M diasumsikan dapat didiagonalisasi, maka terdapat sebuah matriks yang dapat dibalik.

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

Sedemikian rupa sehingga $P^{-1}MP$ adalah diagonal, katakanlah $P^{-1}MP = D$, dimana

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Berdasarkan rumus $P^{-1}MP = D$ bahwa $AP = PD$, jelasnya,

$$MP = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 P_{11} & \lambda_2 P_{12} & \cdots & \lambda_n P_{1n} \\ \lambda_1 P_{21} & \lambda_2 P_{22} & \cdots & \lambda_n P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 P_{n1} & \lambda_2 P_{n2} & \cdots & \lambda_n P_{nn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Ditetapkan bahwa $p_1, p_2, \dots, p_n$ menotasikan vektor-vektor kolom dari matriks P, maka dari Persamaan (1) urutan kolom-kolom MP adalah $\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \dots, \lambda_n p_n$, akan tetapi, urutan kolom-kolom MP adalah $Mp_1, Mp_2, \dots, Mp_n$. Sehingga, diperoleh

$$Mp_1 = \lambda_1 p_1, \qquad Mp_2 = \lambda_2 p_2, \dots, \qquad Mp_n = \lambda_n p_n \tag{2}$$

Karena P dapat dibalik, veektor-vektor kolomnya semua tak nol; sehingga, berdasarkan (2), $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen dari M, dan $p_1, p_2, \dots, p_n$ adalah vektor-vektor eigen yang terkait. Karena P dapat dibalik, diperoleh $p_1, p_2, \dots, p_n$bebas linier. Dengan demikian, M memiliki n vektor eigen yang bebas linier.

$(\mathbf{2}) \Rightarrow (\mathbf{1})$. Asumsikan bahwa M memiliki n vektor eigen $p_1, p_2, \dots, p_n$yang bebas linier. Dengan nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ yang terkait, dan misalkan

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

Adalah sebuah matriks yang vektor-vektor kolomnya adalah $p_1, p_2, \dots, p_n$. Vektor-vektor kolom dari matriks hasil kali MP adalah

$$Mp_1, Mp_2, \dots, Mp_n$$

Namun

$$Mp_1 = \lambda_1 p_1, \qquad Mp_2 = \lambda_2 p_2, \dots, \qquad Mp_n = \lambda_n p_n$$

sehingga

$$MP = \begin{bmatrix} \lambda_1 P_{11} & \lambda_2 P_{12} & \cdots & \lambda_n P_{1n} \\ \lambda_1 P_{21} & \lambda_2 P_{22} & \cdots & \lambda_n P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 P_{n1} & \lambda_2 P_{n2} & \cdots & \lambda_n P_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = PD \tag{3}$$

Dimana D adalah matriks diagonal yang memiliki nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sebagai entri-entri diagonal utamanya. Karena vektor-vektor kolom matriks P bebas linear. P dapat dibalik; sehingga, (3) dapat dituliskan kembali sebagai $P^{-1}MP = D$; jelasnya M dapat didiagonalisasi.

Lampiran 2: Pembuktian Teorema 2.

Teorema 2.2

Jika M adalah sebuah matriks $n\ x\ n$ dan λ adalah sebuah bilangan riil, maka pernyataa-pernyataan berikut ini adalah ekuivalen (Anton, 2012):

1. λ adalah sebuah nilai eigen dari M
2. Persamaan $(\lambda I - M)x = 0$ memiliki solusi nontrivial
3. Terdapat sebuah vektor tak nol *x* pada R^n sedemikian sehingga $Mx = \lambda x$
4. λ adalah sebuah solusi dari Persamaan karakteristik $\det(\lambda I - M) = 0$.

Bukti.

$(1) \Rightarrow (2)$ Misal M adalah sebuah matriks $n \times n$ dengan λ adalah sebuah nilai eigen dari M yang memenuhi persamaan $M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$**,** terdapat vektor tak nol $\mathbf{x}$ dimana $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. Dicari penyelesaian persamaan $M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$**,** yaitu:

$$M\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$$

atau

$$(\lambda I - M)\mathbf{x} = 0 \tag{4}$$

Persamaan (4) mempunyai penyelesaian apabila

$$|\lambda I - M| = 0 \tag{5}$$

Persamaan (5) dinamakan persamaan karakteristik. Dari sini diperoleh nilai eigen λ dari matriks M, sehingga terdapat vektor tak nol dimana $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. Dengan kata lain Persamaan (4) mempunyai solusi nontrivial.

$(2) \Rightarrow (3)$ Persamaan $(\lambda I - M)\mathbf{x} = 0$ memiliki solusi nontrivial artinya terdapat vektor tak nol **x,** dimana $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ yang merupakan solusi dari Persamaan

$$(\lambda I - M)\mathbf{x} = 0$$

sehingga

$$\lambda\mathbf{x} - M\mathbf{x} = 0 \iff M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

$(3) \Rightarrow (4)$ terdapat sebuah vektor tak nol **x** pada $\mathbf{R}^n$ sehingga $M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$**.** penyelesaian Persamaan $M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ yaitu,

$$M\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$$

atau

$$(\lambda I - M)\mathbf{x} = 0$$

Agar persamaan $(\lambda I - M)\mathbf{x} = 0$ mempunyai solusi, maka $|\lambda I - M| = 0$.

Persamaan $|\lambda I - M| = 0$ dinamakan Persamaan karakteristik dan λ adalah solusi dari Persamaan karakteristik.

$(4) \Rightarrow (1)$ λ adalah solusi dari Persamaan karakteristik $|\lambda I - M| = 0$, sehingga terdapat vektor tak nol $\mathbf{x}$ dimana $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ yang memenuhi

$$M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

λ merupakan nilai eigen dari M.

Lampiran 3: Pembuktian Teorema 2.3

Teorema 2.3

Jika $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ adalah suatu basis dari ruang vektor V, maka setiap vektor $\mathbf{v}$ pada V dapat dinyatakan dalam bentuk $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n$ dengan tepat satu cara.

Bukti. Karena S merentang V, maka sesuai definisi dari suatu himpunan rentangan bahwa setiap vektor pada V dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linear dari vektor-vektor pada S. Untuk melihat bahwa hanya terdapat satu cara untuk menyatakan suatu vektor sebagai suatu kombinasi linear dari vektor-vektor pada S, maka dimisalkan beberapa vektor $\mathbf{v}$ dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n \tag{7}$$

dan juga sebagai

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n \tag{8}$$

Dengan mengurangkan Persamaan (8) dengan Persamaan (7) menghasilkan

$$\mathbf{v} = (c_1 - k_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 - k_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (c_n - k_n)\mathbf{v}_n \tag{9}$$

Karena ruas kanan dari Persamaan (9) adalah suatu kombinasi linear dari vektor-vektor pada S, kebebasan linear dari S mengimplikasikan bahwa

$c_1 - k_1 = 0, \qquad c_2 - k_2 = 0, \ldots, \qquad c_n - k_n = 0$

yaitu

$$c_1 = k_1, \qquad c_2 = k_2, \ldots, \qquad c_n = k_n$$

Jadi, kedua pernyataan untuk **v** adalah sama.