

Telaah Gerak Parabola: Sifat Ellips dalam Gerak Parabola

Hamdi Akhsan dan Supardi*

Abstrak

Telaah dilakukan telaah gerak parabola pada kecepatan awal konstan dengan memvariasikan sudut elevasi. Hasil yang diperoleh sangat menarik, dimana garis hubung dari titik-titik puncak parabola untuk berbagai sudut elevasi membentuk ellips. Ellips yang terbentuk ternyata mempunyai bentuk yang sama untuk nilai-nilai kecepatan awal yang diberikan berbeda, yaitu mempunyai panjang sumbu mayor sama dengan dua kali panjang sumbu minor atau dengan kata lain mempunyai eksentrisitas yang konstan yaitu $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Kata-kata kunci: gerak peluru, gerak parabola, titik puncak

Pendahuluan

Gerak suatu benda yang merupakan hasil perpaduan antara gerak lurus berubah beraturan (GLBB) dalam arah vertikal (sumbu z) dan gerak lurus beraturan (GLB) dalam arah bidang horizontal (sumbu x,y) disebut dengan gerak peluru atau gerak proyektil [1]. Dalam banyak kasus gerak ini akan diperumit oleh kehadiran hambatan udara, efek gerak perputaran bumi, dan variasi percepatan gravitasi bumi [2]. Dalam makalah ini akan dibahas gerak peluru dengan asumsi-asumsi bahwa hambatan udara dan efek gerak perputaran bumi diabaikan, dan percepatan gravitasi bumi dianggap tetap. Serta akan digunakan anggapan bahwa gerak yang terjadi hanya dalam dua dimensi, yaitu arah sumbu x, yang merupakan GLB dalam gerak mendatar dan arah sumbu y, yang merupakan GLBB dalam arah vertikal [3].

Secara garis besar makalah ini akan dibahas mengenai pengertian gerak peluru yang telah diberikan pada pendahuluan di atas. Pada bagian teori dijelaskan mengenai cara memperoleh hubungan antar titik puncak gerak parabola secara grafik. Dan hubungan antar titik puncak parabola akan dibahas secara analitik pada bagian hasil dan diskusi. Serta sifat-sifat ellips yang terbentuk oleh garis hubung antar puncak parabola akan diberikan pada bagian kesimpulan.

Teori

Dalam gerak peluru, apabila hambatan udara dan efek gerak perputaran bumi diabaikan, serta percepatan gravitasi dianggap tetap, maka komponen gaya yang bekerja hanyalah gaya gravitasi bumi yang dialami oleh benda atau yang seringkali disebut dengan gaya berat benda. Dalam kasus ini, gaya berat benda adalah konstan, baik besar maupun arahnya. Akibatnya, bila pembahasan mengenai gerak hanya dilakukan dalam dua dimensi, yaitu arah

sumbu x (mendatar) dan sumbu y (vertikal), maka komponen gerak yang memperoleh pengaruh gaya hanya dalam arah vertikal saja. Oleh karena itu, gerak peluru seperti ini mengalami gerak GLB dalam arah sumbu x dan gerak GLBB dalam arah sumbu y.

Posisi benda yang mengalami gerak peluru (dua dimensi) dengan kecepatan awal \vec{v}_0 , dapat diberikan dalam masing-masing komponen geraknya, yaitu :

$$x = v_0 \cos \alpha t, \quad (1)$$

$$y = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (2)$$

Dalam persamaan (1) dan (2) di atas, vektor kecepatan awal benda \vec{v}_0 diwakili oleh besar kecepataannya v_0 , dan arah kecepataannya diwakili oleh α , yang menyatakan sudut elevasi gerak terhadap sumbu x. Dan g menyatakan percepatan gravitasi bumi.

Dalam pembahasan mengenai gerak peluru, terdapat dua posisi yang istimewa yang sering dibahas di banyak buku teks, yaitu posisi puncak (posisi tertinggi yang dicapai benda, arah vertikal) dan posisi terjauh yang bisa dicapai benda (arah horizontal). Makalah ini akan difokuskan pada pembahasan titik puncak. Titik puncak gerak peluru akan dicapai bila komponen kecepatan gerak peluru dalam arah vertikal sama dengan nol, yaitu posisi dimana benda akan mengalami gerakan membalik. Sebagaimana diketahui bahwa kecepatan benda adalah diferensial pertama posisi terhadap waktu [4], maka diperoleh

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - g t = 0. \quad (3)$$

Atau dari persamaan (3) di atas dapat pula ditentukan lamanya waktu yang dibutuhkan oleh

benda yang mengalami gerak peluru untuk mencapai titik puncak, yang diberikan oleh

$$t_p = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \quad (4)$$

Selanjutnya bila persamaan (4) disubstitusi ke persamaan (1) dan (2), menghasilkan posisi titik puncak gerak peluru, yaitu

$$x_p = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}, \quad (5)$$

dan

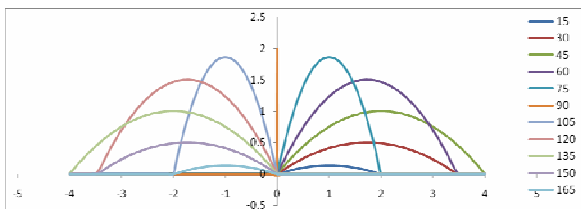
$$y_p = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (6)$$

Lebih lanjut, posisi benda yang mengalami gerak peluru yang diberikan oleh persamaan (1) dan (2), dapat pula diungkapkan menjadi sebuah persamaan yang merupakan fungsi y terhadap x , tanpa melibatkan variabel waktu t , yaitu

$$y = x \tan \alpha - \frac{g \sec^2 \alpha}{2v_0^2} x^2. \quad (7)$$

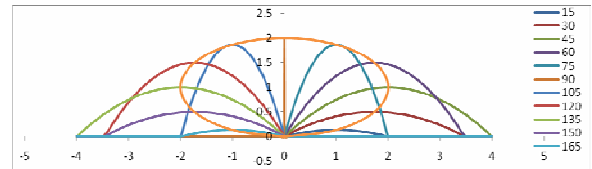
Pada persamaan (3), terlihat dengan jelas bahwa hubungan antara fungsi y terhadap x merupakan persamaan parabola [5]. Oleh karena itu gerak peluru seringkali disebut sebagai gerak parabola. Dan untuk seterusnya dalam makalah ini digunakan istilah gerak parabola.

Bila dilakukan telaah pada gerak parabola dengan menggambarkan grafik fungsi y terhadap x pada keadaan dimana kecepatan awal benda v_0 , dipilih konstan dan sudut elevasi α divariasikan dalam selang $(0, \pi)$. Pada makalah ini dipilih kondisi dimana $v_0^2 = 4g$ dan tiap gambar berselang 15° . Grafik fungsi y terhadap x pada kondisi di atas diberikan oleh gambar 1 di bawah ini



Gambar 1. Gambar gerak parabola pada kasus $v_0^2 = 4g$ dan sudut elevasi bervariasi

Hal menarik akan diperoleh bila titik puncak-titik puncak gerak parabola yang diberikan oleh gambar 1 dihubungkan satu sama lain sehingga membentuk garis yang mulus, ternyata terbentuk grafik seperti pada gambar 2 di bawah ini



Gambar 2. Grafik garis hubung antar titik puncak gerak parabola pada kasus $v_0^2 = 4g$ dan sudut elevasi bervariasi

Dari gambar 2, terlihat bahwa garis hubung antar titik puncak dari gerak parabola pada kasus yang ditinjau menghasilkan bentuk elips (grafik berwarna orange pada gambar 2). Tapi benarkah bentuknya elips? Bila benar, bagaimana sifatnya? Ini yang akan menjadi kajian utama dalam makalah ini.

Hasil dan diskusi

Hubungan antar titik puncak pada gerak parabola, dapat diturunkan secara analitik dengan menuliskan kembali titik puncak gerak parabola yang diberikan oleh persamaan (5) dan (6) dalam sudut rangkap sebagai berikut

$$\begin{aligned} x_p &= v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha / g \\ x_p &= v_0^2 2 \sin \alpha \cos \alpha / 2g \\ x_p &= v_0^2 \sin 2\alpha / 2g \end{aligned}$$

atau

$$\sin 2\alpha = \frac{x_p}{v_0^2 / 2g}, \quad (8)$$

dan ordinat puncaknya

$$\begin{aligned} y_p &= v_0^2 \sin^2 \alpha / 2g \\ y_p &= v_0^2 2 \sin^2 \alpha / 4g \\ y_p &= -v_0^2 (\cos 2\alpha - 1) / 4g \end{aligned}$$

atau

$$\cos 2\alpha = -\frac{y_p - v_0^2 / 4g}{v_0^2 / 4g}. \quad (9)$$

Selanjutnya dengan menjumlahkan kuadrat dari persamaan (8) dan (9), akan diperoleh

$$\frac{x_p^2}{a^2} + \frac{(y_p - b)^2}{b^2} = 1, \quad (10)$$

yang merupakan persamaan elips [6] dengan panjang setengah sumbu mayor $a (= v_0^2 / 2g)$, dan panjang setengah sumbu minor

$b (= v_0^2/4g)$, serta berpusat di $(0,b)$. Dan eksentrisitas ellips (10) dapat dicari sebagai berikut

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - (b/a)^2} = \sqrt{1 - (1/2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}. \quad (11)$$

Ternyata eksentrisitas ellips yang terbentuk berupa konstanta. Jadi bentuk ellips yang diperoleh akan tetap, tidak bergantung pada kecepatan awal benda maupun percepatan gravitasi bumi. Perbedaan nilai kecepatan awal benda hanya akan membuat perbedaan ukuran ellips yang terbentuk tetapi tidak merubah bentuk ellipsnya.

Pendekatan ini akan sangat menarik bila digunakan dalam pembelajaran gerak peluru karena memberikan variasi dan nuansa berbeda dari kebanyakan pembahasan yang ada di buku-buku teks.

Kesimpulan

Bila gerak parabola diplot pada kecepatan awal konstan sedangkan sudut elevasi divariasi maka garis hubung antara titik puncak-titik puncak parabola membentuk ellips yang bentuknya tetap dan mempunyai sifat-sifat sebagai berikut :

1. Panjang sumbu mayor ellips sama dengan dua kali panjang sumbu minor ellips, yang nilai-nilainya bergantung pada kecepatan awal benda dan percepatan gravitasi bumi.
2. Eksentrisitas ellips yang terbentuk adalah $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, yang merupakan suatu konstanta, sehingga bentuk ellipsnya tetap.

Referensi

- [1] Tri Kuntoro Priyambodo dan Bambang Murdika Eka Jati, "Fisika Dasar", ANDI, Yogyakarta, Cetakan Pertama, 2009, p. 57
- [2] Paul A. Tripler, "Fisika", Erlangga, Edisi Ketiga, Jilid 1, Alih Bahasa Lea Prasetio dan Rahmad W. Adi, Jakarta, 1998, p. 65
- [3] Francis W. Sears, Mark W. Zemansky, dan Hugh D. Young, "Fisika Universitas", Erlangga, Edisi Keenam Jilid 1, Alih Bahasa Sri Jatno W. Dan Soegeng, Jakarta, 1987, p. 130
- [4] Daniel Kleppner and Robert J. Kolenkow, "An Introduction to Mechanics", McGraw-Hill, Boston, 1973, p. 14
- [5] James Stewart, "Calculus", Brooks/Cole Publishing Company, Pasific Grove, Fourth Edition, 1999, Appendix C, A18
- [6] James Stewart, "Calculus", Brooks/Cole Publishing Company, Pasific Grove, Fourth Edition, 1999, Appendix C, A19

Hamdi Akhsan
Program Studi Pendidikan Fisika
FKIP Universitas Sriwijaya
hamdiakhsan@yahoo.co.id

Supardi*
Jurusan Fisika
FMIPA Universitas Sriwijaya
supardimsi@yahoo.co.id

*Corresponding author