

**SOLUSI PERSAMAAN KLEIN-GORDON DI DALAM
RUANG-WAKTU ROBERTSON-WALKER**

SKRIPSI

*Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
di bidang studi Fisika Fakultas Mipa*



**OLEH :
LIZARDO ANDREAS PUTRA
08021281520053**

**JURUSAN FISIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SRIWIJAYA
2019**

LEMBAR PENGESAHAN
SOLUSI PERSAMAAN KLEIN-GORDON DI DALAM
RUANG-WAKTU ROBERTSON-WALKER

SKRIPSI

Oleh
LIZARDO ANDREAS PUTRA
NIM. 08021281520053

Indralaya, November 2019

Pembimbing II.



Drs. Pradanto P. DEA.
NIP. 195807241985031012

Pembimbing I



Dr. Supardi, S.Pd., M.Si.
NIP. 197112112002121002

Mengetahui,

Ketua Jurusan Fisika




Dr. Fikriyah Mirgo, S.Si., M.T.
NIP. 197009101994121001

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

*Menuntut Ilmu adalah Taqwa
Menyampaikan ilmu adalah Ibadah
Mengulang Ilmu adalah Zikir
Mencari Ilmu adalah Jihad
(Imam Al-Ghazali)*

*Ilmu itu bukan yang dihafal, tapi yang memberi manfaat
(Imam Syafi'i)*

*Sangat ironi sebagai kader fisikawan alergi terhadap hal-
hal Teoritis
(Dr. Akhmad Aminuddin Bama)*

Skripsi Ku persembahkan kepada

- ❖ *Papah, Mamah, dan Adikku yang telah memberikan support secara materi, psikis, dan rohani. Tanpa mereka diriku tidak ada artinya hingga saat ini.*
- ❖ *Almamater-Ku Khususnya Jurusan Fisika Fakultas MIPA yang telah memberikan Kesempatan untuk menimba ilmu baik eksakta maupun non eksakta dikala diriku hampir putus asa.*
- ❖ *Mawar Merah-Ku yang berdurir namun indah dilihat yang aku rawat terus dengan kasih sayang. Semoga kelak tidak akan layu kelopakmu.*

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur Penulis ucapkan kehadirat Allah SWT, karena berkat rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini. Adapun Tugas Akhir ini berjudul “SOLUSI PERSAMAAN KLEIN-GORDON MENGGUNAKAN RUANG WAKTU ROBERTSON-WALKER” yang akan dilaksanakan di Lingkungan Jurusan Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sriwijaya.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan dan jauh dari sempurna yang disebabkan oleh keterbatasan pengetahuan yang dimiliki oleh penulis. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik, saran agar Tugas Akhir ini dapat menjadi lebih baik.

Selanjutnya, penulis mengucapkan banyak terimakasih kepada semua pihak yang selalu memberi dukungan, memotivasi, dan memberi bantuan serta arahan sehingga Tugas Akhir ini terselesaikan. Semoga Tugas Akhir ini dapat memberikan manfaat bagi setiap pembaca maupun penulis sendiri nantinya. Aamiin. Secara khusus penulis menghaturkan terima kasih dan penghargaan sebesar-besarnya kepada :

1. Bapak Prof. Dr. Iskhaq Iskandar, M.Sc., selaku Dekan di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sriwijaya
2. Bapak Dr. Frinsyah Virgo, M.T., selaku Ketua Jurusan Fisika dan bapak Khairul Saleh, S.Si., M.Si. selaku sekretaris Jurusan Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sriwijaya;
3. Bapak Dr. Supardi, S.Pd., M.Si., selaku Dosen Pembimbing I Skripsi dan Bapak Drs. Pradanto Poerwono, DEA., selaku Dosen Pembimbing II Skripsi yang telah banyak memberikan bimbingan, bantuan, arahan, waktu, pikiran, dan kesabaran dalam membantu penulis untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini;
4. Bapak Dr. Akhmad Aminuddin Bama, M.Si., Ibu Drs Jorena Bangun, M.Si., dan Ibu Erni, S.Si., M.Si., selaku Dosen Penguji yang telah memberikan saran, masukan, dan bertukar pikiran sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini;

5. Bapak Drs. Arsali. M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Akademik dan orang tua yang telah banyak memberikan nasihat dan masukan selama penulis kuliah di Jurusan Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sriwijaya;
6. Bapak dan Ibu dosen selaku staf pengajar Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sriwijaya yang telah banyak sekali memberikan ilmunya;
7. Segenap pegawai jurusan Fisika atas bantuan administrasinya;
8. Ahmad adha Khomeini selaku teman seperjuangan Tugas Akhir, teman diskusi dari yang penting sampai tidak penting;
9. Sepri, Harry, Beler, Riko, Fiqi, Erik, Bayumi, Dudy, Boy, Johan, nanda, selaku keluarga Beler Family yang sudah menemani selama penulis kuliah, bercanda Bersama, bermain Bersama, dan sudah mau susah senang bersama. Semoga kedepannya kita semua dapat mewujudkan apa yang kita inginkan;
10. Teman - teman seperjuangan dari KBI Teori Material dan Fisika Angkatan 15 (mohon maaf tidak dapat disebutkan satu per satu);

Indralaya, November 2019

Lizardo Andreas Putra

SOLUSI PERSAMAAN KLEIN-GORDON DI DALAM RUANG-WAKTU ROBERTSON-WALKER

OLEH
LIZARDO ANDREAS PUTRA
08021281520053

ABSTRAK

Persamaan Gelombang Schrodinger dapat dimodifikasi dengan prinsip momentum dan energi relativistik seperti yang dilakukan oleh Klein-Gordon, Dirac, dan Weyl. Sehingga secara berturut-turut menghasilkan Persamaan Klein-Gordon, Persamaan Dirac, dan Persamaan Weyl. Ketiga teori tersebut diturunkan dalam konteks teori relativitas khusus dalam ruang-waktu datar (ruang Minkowski). Disamping itu, teori relativitas (umum) menghasilkan ruang-waktu lain seperti ruang-waktu Robertson-Walker. Penelitian dengan judul “Solusi Persamaan Klein-Gordon di dalam Ruang-Waktu Robertson-Walker”, memiliki rumusan masalah bagaimana bentuk solusi matematis Persamaan Klein-Gordon di dalam Ruang-waktu Robertson-Walker. Tujuan penelitian ini adalah menambah khasanah pengetahuan pada fisika relativistik khususnya bentuk solusi matematis Persamaan Klein-Gordon di dalam Ruang-waktu Robertson-Walker.

Penelitian ini menggunakan metode Studi Literatur dan Kalkulasi Matematis. Dari penelitian ini didapatkan kesimpulan bahwa solusi yang didapatkan masih berupa fungsi gelombang untuk kasus ruang datar ($k = 0$) dengan asumsi *mass less*, dan *power law function* dengan dominasi Materi dan berdasarkan fungsi yang didapat bergantung pada bilangan kuantum magnetik dan bilangan kuantum orbital.

Kata Kunci : Persamaan Klein-Gordon, Ruang-waktu Robertson-Walker, *Mass less*, dominasi materi, ruang datar.

THE SOLUTION OF KLEIN-GORDON EQUATION INSIDE OF ROBERTSON-WALKER SPACE-TIME

By
Lizardo Andreas Putra
08021281520053

ABSTRACT

Schrodinger wave equation can be viewed with momentum principles and relativistic energy as done by Klein-Gordon, Dirac, and Weyl. So that it would be give the result Klein-Gordon equation, Dirac equation and Weyl equation. These three theories were derived in the context of special relativity theory in flat spacetime (Minkowski space). Moreover, in addition, the theory of relativity (general) produced other spacetime such as spacetime of Robertson-Walker. Reaserch with the title “solution of the Klein-Gordon equations in the Robertson-Walker space time”, featured a problem version of how a mathematical solution of Klein-Gordon equations in the Robertson-Walker spacetime. The Study’s goals are adding knowledge on the arm of the relativistic science in specifically a mathematical solution form of the Klein-Gordon equation in Roberson-Walke spacetime.

These studies use literature and calculated studies method mathematical. From these research it contends that a solution obtained still a wave function for a flat space case ($k = 0$) of the host less mass, and the power function law with the dominance of material radiation, and based on its function resulting on their magnetic quantum numbers and orbital quantum numbers.

Key word : The Klein-Gordon Equation, Robertson-Walker spacetime. Mamss less, domination material, flat space

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN	i
KATA PENGANTAR	ii
ABSTRAK	iv
ABSTRACT	v
DAFTAR ISI	vi
DAFTAR SIMBOL	viii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	2
1.3 Tujuan Penelitian	2
1.4 Manfaat Penelitian	3
1.5 Batasan Masalah	3
1.6 Sistematika Penulisan	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Paradigma Fisika Kuantum	4
2.2 Paradigma Fisika Relativistik	4
2.3 Persamaan Klein Gordon	5
2.4 Ruang-waktu Robertson-Walker	8
BAB III METODOLOGI PENELITIAN	9
3.1 Tempat Penelitian	9
3.2 Waktu Penelitian	9
3.3 Metode Penelitian	9
3.4 Diagram Alir Penelitian	9
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	11
4.1 Ruang-waktu Robertson-Walker	11
4.2 Persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu	12
4.3 Separasi variabel	14
4.4 Penyelesaian Umum untuk suku (θ, ϕ)	15

4.5	Penyelesaian Umum untuk suku (t,r)	18
BAB V KESIMPULAN		24
5.1	Kesimpulan.....	24
5.2	Saran.....	24
DAFTAR PUSTAKA.....		25
LAMPIRAN.....		I

DAFTAR SIMBOL

E	Energi
c	Kelajuan Cahaya
$\hat{p}$	Operator Momentum
$\hat{E}$	Operator Energi
$\hbar$	Konstanta Planck
∇^2	Fungsi Laplacian
$\square$	Fungsi D'Alembertian
$a^2(t)$	Faktor skala yang bergantung waktu
$g_{\mu\nu}$	Tensor Metrik Kovarian
$g^{\mu\nu}$	Tensor Metrik Kontravarian
ψ	Fungsi Gelombang
k	Konstanta Satuan Panjang ⁻²
r	Jari-jari Lingkaran
m	Bilangan Kuantum Magnetik
ℓ	Bilangan Kuantum Orbital
P_ℓ^m	Polynomial Legendre
ds	Elemen Jarak ruang-waktu
Z	Kombinasi linear Persamaan Bessel
Y_ℓ^m	Fungsi Harmonik Bola Ternormalisasi

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Fisika Relativistik Einstein merupakan paradigma kontemporer bagi sistem yang kelajuan penyusun sistem itu dibandingkan dengan kelajuan cahaya (berkelajuan tinggi, relativitas khusus) atau menyangkut gerak benda di sekitar materi yang cukup massif (Relativitas Umum). Secara umum teori relativitas dibangun atas dua asas yakni asas kovariansi (keseragaman) berbagai hukum fisika, dan tak berhingganya nilai batas atas kelajuan cahaya (Bama, 2015).

Dengan menerima ke dua asas teori relativitas tersebut, berarti kita harus mengorbankan pandangan bahwa waktu merupakan besaran mutlak atau absolut (berlawanan dengan mekanika klasik). Dengan kata lain kita harus mengorbankan pandangan mengenai keserempakan, dimana peristiwa yang terjadi secara serempak terhadap seorang pengamat pertama tidaklah serempak terhadap pengamat kedua yang bergerak relatif terhadap pengamat. Hal tersebut dapat diartikan sebagai "*waktu adalah besaran relatif*"; bergantung pada keadaan gerak pengamat.

Berdasarkan asas di atas memunculkan konsep ruang-waktu yang terajut sedemikian rupa, yang merupakan ruang waktu berdimensi empat datar (dikenal dengan ruang Minkowski). Teori yang diajukan Einstein ini sangat revolusioner dan mengubah cara berfikir orang tentang alam semesta saat ini. Alam Newton yang menempatkan ruang dan waktu sebagai dua entitas yang terpisah dan absolut digoyahkan oleh konsep ruang-waktu Einstein ini. Melengkapi atau menyempurnakan teori relativitas khususnya, pada tahun 1916, Albert Einstein mempublikasikan teori relativitas umum yang menyangkut gerak benda di sekitar materi yang cukup massif. Menurut Einstein, ruang di sekitar benda merupakan medan gaya berat seperti halnya medan magnet di sekitar batang magnet; kemudian kemunculan medan gaya berat itu disebabkan oleh ruang waktu berdimensi empat di sekitar benda melengkung (Bama 2015).

Prinsip relativitas khusus yang digagas oleh Einstein secara umum telah diterima di dalam ranah fisika. Oleh karena itu, tanpa terkecuali, teori kuantum yang benar juga harus memenuhinya. Prinsip yang paling mendasarnya adalah hukum gerak yang sah pada suatu system inersial harus dapat dirumuskan ke dalam bentuk Kovarian Lorentz. Oleh karena itu, dengan menggunakan konsep momentum dan energi relativistik, dilakukan modifikasi persamaan gelombang Schrodinger, di antaranya dilakukan oleh Klein-Gordon, Dirac, dan Weyl yang menghasilkan persamaan secara berturut-turut dikenal dengan Persamaan Klein-Gordon, Persamaan Dirac, dan Persamaan Weyl. Persamaan-persamaan tersebut selanjutnya membangun teori kuantum relativistik, yang akhirnya dieksplorasi lebih lanjut melalui Teori Medan Kuantum (*Quantum Field Theory*).

Terkait dengan ketiga teori di atas, yakni Persamaan Klein-Gordon, Persamaan Dirac, dan Persamaan Weyl, ketiganya (dalam literatur resmi atau buku-buku teks) diturunkan dalam konteks teori relativitas khusus di ruang-waktu datar (ruang Minkowski).

Di samping itu, teori relativitas (umum) menghasilkan ruang-waktu lain baik datar maupun lengkung, misal ruang Rieman, Ruang Robertson-Walker, Ruang Bianchi dan sebagainya. Atas pertimbangan itu dalam Tugas Akhir ini diturunkan Persamaan Klein-Gordon di dalam ruang-waktu Robertson-Walker, yaitu ruang yang ber-metrik

$$g^{\mu\nu} = \left\{ 1 - \left(1 - kr^2/R^2(t) \right), -R^{-2}(t)r^{-2}, -R^{-2}(t)r^{-2} \sin^2 \theta \right\}$$

1.2 Perumusan Masalah

Bagaimana bentuk solusi matematis persamaan Klein-Gordon didalam ruang-waktu Robertson-Walker.

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan bentuk solusi matematis persamaan Klein-Gordon di dalam ruang waktu Robertson-Walker.

1.4 Manfaat Penelitian

Menambah hasanah pengetahuan pada Fisika Relativistik khususnya bentuk solusi matematis persamaan Klein-Gordon didalam ruang waktu Robertson-Walker.

kemudian dapat menjadi rujukan untuk penyelesaian solusi matematis persamaan Klein-Gordon di dalam ruang-waktu yang lain.

1.5 Batasan Masalah

Pada penelitian ini terbatas pada penggunaan persamaan Klein-Gordon dan ruang-waktu Robertson-Walker untuk kasus ruang datar ($k = 0$) dengan menggunakan asumsi untuk kasus *Mass less*, dan menggunakan *power law function* dominasi materi.

1.6 Sistematika Penulisan

Bab 1 berisi pendahuluan yang meliputi: latar belakang permasalahan, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, dan sistematika penulisan. Bab 2 berisi tinjauan pustaka yang meliputi paradigma Fisika Kuantum, paradigma Fisika Relativistik, persamaan Klein-Gordon, dan metrik Robertson-Walker. Sementara bab 3 berisi tentang metodologi penelitian yang meliputi: waktu dan tempat penelitian, metode penelitian, dan diagram alir penelitian. Untuk bab 4 berisi tentang hasil dan pembahasan mengenai solusi persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu Robertson-Walker. Dan terakhir pada bab 5 berisikan tentang kesimpulan yang didapat pada penelitian ini beserta saran untuk pengembangan lebih lanjut dari penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

- Bama, A.A., 1995, *Studi Analisis Prilaku Kuantum Partikel Relativistik (Persamaan Dirac)*, Surabaya : Institut Teknologi Sepuluh November.
- Bama, A.A., 2015, *Mengenal Fisika dari Paradigma, Metodologi, Hingga Implementasi*. Palembang: SIMETRI.
- Bell, W.W., 1968, *Special Functions For Scientists And Engineers*. Aberdeen : University of Aberdeen.
- Beiser, A dan Berg, I., 2003, *Concepts of Modern Physics Sixth Edition*. New York : McGraw-Hill
- Boas, M.L., 1983, *Mathematical Methods In The Physical Sciences*. Chicago : DePaul University.
- Carmeli, M., 1982, *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory*. Beer Sheva : Ben Gurion University.
- Greiner, W., 1987, *Relativistic Quantum Mechanics Wave Equations*. Frankfurt : Universität Frankfurt.
- Mandl, F dan Graham, S., 1986, *Quantum Field Theory*. Manchester: The University Manchester.
- Mohajan, K. H., 2013, *Friedmann, Robertson-Walker (FRW) Models in Cosmology*. Journal of Environmental Treatment Techniques 3(1): 158.
- NQZ, R. A., 2003, *Pengantar Teori Relativitas*. Yogyakarta : Universitas Gajah Mada.
- Purwanto, A., 2006, *Fisika Kuantum*. Yogyakarta : Gava Media.
- Ryder, L. H., 1985, *Quantum Field Theory*. Mealbourne : University of Cambridge.
- Risko, dkk., 2013, *Aplikasi Persamaan Einstein Hyperbolic Geometric Flow pada Lintasan Cahaya di Alam Semesta*. Prisma Fisika. 3(1) : 123.
- Suroso, A., 2017, *Teori Relativitas Khusus*. Bandung : Institut Teknologi Bandung.

Weinberg, S., 1995, *The Quantum Theory of Fields*. Mealbourne: University of Cambridge.

Young and Freedman. 2003. *Physics University*. Jakarta: Erlangga.