METODA PEMBUKTIAN DALAM MATEMATIKA

Dr. Julan Hernadi[1]
julan hernadi@yahoo.com

ABSTRAK

Di dalam matematika, bukti adalah serangkaian argumen logis yang menjelaskan kebenaran suatu pernyataan. Argumen-argumen ini dapat berasal dari premis pernyataan itu sendiri, teorema-teorema lainnya, definisi, dan akhirnya dapat berasal dari postulat dimana sistem matematika tersebut berasal. Yang dimaksud logis di sini, adalah semua langkah pada setiap argumen harus dijustifikasi oleh langkah sebelumnya. Jadi kebenaran semua premis pada setiap deduksi sudah dibuktikan atau diberikan sebagai asumsi. Pada tulisan sederhana ini dibahas sekilas tentang bukti dalam matematika dan beberapa metoda pembuktiannya.

Pendahuluan

Sebelumnya mari kita simak kata-kata bijak berikut :
"It is with logic that one proves, it is with intuition that one invents" (Henri Poincar´e).

Matematika sebagai ilmu pengetahuan dengan penalaran deduktif mengandalkan logika dalam meyakinkan akan kebenaran suatu pernyataan. Faktor intuisi dan pola berpikir induktif banyak berperan pada proses awal dalam merumuskan suatu konjektur (*conjecture*) yaitu dugaan awal dalam matematika. Proses penemuan dalam matematika dimulai dengan pencarian pola dan struktur, contoh kasus dan objek matematika lainnya. Selanjutnya, semua informasi dan fakta yang terkumpul secara individual ini dibangun suatu koherensi untuk kemudian disusun suatu konjektur. Setelah konjektur dapat dibuktikan kebenarannya atau ketidakbenaranya maka selanjutnya ia menjadi suatu teorema.

Pernyataan-pernyataan matematika seperti definisi, teorema dan pernyataan lainnya pada umumnya berbentuk kalimat logika, dapat berupa implikasi, biimplikasi, negasi, atau berupa kalimat berkuantor. Operator logika seperti and, or, not, xor juga sering termuat dalam suatu pernyataan matematika. Jadi membuktikan kebenaran suatu teorema tidak lain adalah membuktikan kebenaran suatu kalimat logika.

---

[1]*Alumni Prodi Pendidikan Matematika FKIP UNSRI*

Materi logika sudah diberikan sejak di bangku SLTA. Namun selama ini, sebagian siswa atau guru masih menganggap logika sebagai materi hapalan, khususnya menghapal tabel kebenaran. Belum tahu mengapa dan untuk apa logika dipelajari. Tanpa menguasai logika maka sulit untuk terbentuknya apa yang disebut dengan *logically thinking*. Apa yang terbentuk pada siswa, mahasiswa, guru atau bahkan dosen selama ini lebih dominan pada *algorithm thinking* atau berpikir secara algoritma. Cara berpikir algoritmis dalam belajar matematika ini lebih ditekankan pada memahami langkah-langkah dalam menyelesaikan suatu soal, tanpa melihat lebih dalam mengapa langkah-langkah tersebut dapat dilakukan. Bila pendekatan ini mendominasi dalam pembelajaran matematika, misalnya di sekolah menengah maka akibatnya siswa akan menjadi ”robot matematika”. Mereka mampu dan cepat menyelesaikan soal yang mirip (*similar*) dengan contoh sebelumnya, tetapi tidak berkutik bilamana soal tersebut dimodifikasi sedikit, sehingga tidak tampak secara kasat mata kemiripannya dengan soal yang sudah ada, walaupun sesungguhnya materinya tetap sama.

Pada tahap awal, pekerjaan memahami bukti bukanlah sesuatu yang menarik karena kita lebih banyak bergelut dengan simbol dan pernyataan logika ketimbang berhadapan dengan angka-angka yang biasanya dianggap sebagai karakter matematika. Kenyataan inilah menjadikan salah satu alasan orang malas untuk memahami bukti dalam matematika. Alasan lainnya adalah pekerjaan membuktikan lebih sulit dan tidak penting. Padahal banyak manfaat yang dapat diperoleh pada pengalaman membuktikan ini, salah satunya adalah melatih *logically thinking* dalam belajar matematika. Pada artikel ini disajikan beberapa metoda pembuktian sederhana dengan menggunakan aturan-aturan logika dasar. Namun sebelumnya disajikan dulu beberapa motivasi pembuktian dalam matematika.

Mengapa kita perlu membuktikan ?

Dalam artikel *making mathematics* yang berjudul Proof, dapat diakses pada http:/www2.edc.org/makingmath, dijelaskan secara rinci mengenai bukti dalam matematika yang meliputi *what is proof, why do we prove, what do we prove, dan how do we prove*. Menurut artikel tersebut, paling tidak terdapat enam motivasi mengapa orang membuktikan, yaitu *to establish a fact with certainty, to gain understanding, to communicate an idea to others, for the challenge, to create something beautiful, to construct a large mathematical theory*.

To establish a fact with certainty merupakan motivasi paling dasar mengapa orang perlu membuktikan suatu pernyataan matematika, yaitu untuk meyakinkan bahwa apa yang selama ini dianggap benar adalah memang benar. Tidak dapat dipungkiri selama ini banyak kebenaran fakta di dalam matematika hanya dipercaya begitu saja tanpa adanya kecurigaan terhadap kebenaran tersebut, tidak berusaha membuktikan sendiri, termasuk fakta-fakta yang sangat sederhana. Kita hanya menggunakan fakta tersebut karena sudah ada dalam buku (*it was in the text*), atau karena sudah pernah disampaikan oleh guru kita.

Memang tidak semua fakta matematika yang dipelajari harus dipahami buktinya. Faktor kepadatan materi dan keterbatasan waktu masih merupakan kendala klasik yang dihadapi oleh pengampu matematika. Namun beberapa fakta sederhana pun sering diabaikan pembuktiannya. Suatu ilustrasi ketika kita mengajar tentang himpunan bilangan real kita pasti menyampaikan bahwa himpunan bilangan real yang disimbolkan dengan R terpecah menjadi dua himpunan bagian yang saling asing, yaitu himpunan bilangan rasional Q dan himpunan bilangan irrasional R/Q.

Sangat mudah dipahami untuk definisi bilangan rasional, tetapi tidak begitu jelas pada definisi bilangan irrasional. Bilangan irrasional hanya didefinisikan sebagai bilangan real yang bukan rasional. Pertanyaannya, pernahkah kita membuktikan bahwa $\sqrt{2}$, π dan e merupakan bilangan irrasional? Bila bilangan irrasional dapat dicirikan oleh tidak berulangnya angka-angka desimalnya maka bukti ini bersifat temporer. Misalkan seorang siswa dapat menunjukkan bahwa 100 digit angka pada bentuk desimal bilangan π tidak berulang maka siswa tersebut menyimpulkan bahwa π irrasional. Tapi begitu ada siswa lain yang dapat menunjukkan terdapatnya pola pengulangan, misalnya mulai dari digit ke- 150 maka klaim siswa pertama tadi gugur dan harus disimpulkan bahwa π rasional. Kesimpulan siswa pertama di atas didasarkan pada intuisi bukan didasarkan pada metoda pembuktian yang sahih. Banyak pembuktian yang tidak hanya membuktikan suatu fakta tetapi juga memberikan penjelasan tentang fakta tersebut. Disinilah, pembuktian teorema berfungsi untuk mendapatkan pemahaman (*to gain understanding*). Seorang pemenang medali ”field”, Pierre Deligne meyatakan bahwa

> ”*I would be grateful if anyone who has understood this demonstration would explain it to me.*”

Pernyataan ini mengandung makna bahwa bilamana seseorang dapat menjelaskan kembali apa yang sudah dijabarkan oleh Pierre Deligne maka dapat dipastikan bahwa orang tersebut telah memahaminya, mungkin saja penjelasan yang telah disajikan oleh Pierre ada bagian-bagian yang belum jelas. Terkadang, beberapa orang mempunyai pendirian sangat kuat bahwa suatu konjektur adalah benar. Keyakinan ini mungkin berasal dari penjelasan informal atau dari beberapa kasus yang ditemuinya. Bagi mereka tidak ada keraguan terhadap keyakinan itu, tapi belum tentu berlaku untuk orang dari kelompok lain. Disinilah bukti dapat dijadikan sarana untuk meyakinkan orang lain akan kebenaran suatu idea. Akan tetapi untuk menyusun bukti formal terhadap kebenaran suatu fakta tidaklah mudah. Mengikuti bukti yang sudah ditemukan dan disusun orang lain saja tidak mudah apalagi menyusun sendiri. Membuktikan merupakan tantangan sendiri para matematikawan, membuat penasaran dan begitu terselesaikan maka diperoleh kepuasan intelektual. Ibarat seni, matematika itu indah. Ini paling tidak pendapat para matematika. Bagi orang awam keindahan matematika terlihat dari pola dan struktur objek matematika, seperti bilangan, bangun geometri, simulasi matematika pada komputer. Namun bagi mereka yang sudah mencapai begawan matematika, keindahan sesungguhnya dari matematika (*the real beauty of mathematics*) terletak pada pola penalaran yang berupa interkoneksi argumen-argumen logis. Ini tercermin pada pembuktian teorema. Keberhasilan memformulasikan satu konjektur, kemudian dapat membuktikannya maka satu masalah dalam matematika terselesaikan. Penelitian matematika pada level yang lebih lanjut menuntut dihasilkannya suatu teorema baru yang buktinya dapat diuji oleh orang lain. Berbeda dengan motto PERUM Pegadaian ”mengatasi masalah tanpa masalah”, maka dalam matematika setiap kali berhasil memecahkan suatu masalah maka akan muncul masalah baru. Masalah-masalah baru ini biasanya muncul melalui langkah-langkah dalam pembuktian teorema baik langsung maupun tidak langsung. Mungkin motto pada PERUM Pegadaian bila diadaptasikan pada matematika berbunyi sebagai berikut: ”memecahkan masalah dengan menimbulkan masalah baru”. Masalah dalam matematika tidak bermakna negatif, tapi malah menambah keindahan dan tantangan orang-orang yang menekuni matematika.

Metoda Pembuktian

Definisi memainkan peranan penting di dalam matematika. Topik-topik baru matematika selalu diawali dengan membuat definisi baru. Sebagai contoh, teori fungsi kompleks diawali dengan mendefinisikan bilangan imajiner i, yaitu $i^2 = -1$. Berangkat dari definisi dihasilkan sejumlah teorema beserta akibat-akibatnya. Teorema-teorema inilah yang perlu dibuktikan. Pada kasus sederhana, kadangkala teorema pada suatu buku ditetapkan sebagai definisi pada buku yang lain, begitu juga sebaliknya. Selanjutnya, untuk memahami materi selanjutnya dibutuhkan prasyarat pengetahuan logika matematika.

1. Bukti langsung

Bukti langsung ini biasanya diterapkan untuk membuktikan teorema yang berbentuk implikasi $p \Rightarrow q$. Di sini p sebagai hipotesis digunakan sebagai fakta yang diketahui atau sebagai asumsi. Selanjutnya, dengan menggunakan p kita harus menunjukkan berlaku q. Secara logika pembuktian langsung ini ekuivalen dengan membuktikan bahwa pernyataan $p \Rightarrow q$ benar dimana diketahui p benar.

Contoh Buktikan, jika x bilangan ganjil maka x^2 bilangan ganjil.

Bukti. Diketahui x ganjil, jadi dapat ditulis sebagai $x = 2n - 1$ untuk suatu bilangan bulat n. Selanjutnya,

$$x^2 = (2n - 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2\,\underbrace{(2n^2 + 2)}_{m} + 1 = 2m + 1:$$

Karena m merupakan bilangan bulat maka disimpulkan x^2 ganjil.

2. Bukti taklangsung

Kita tahu bahwa nilai kebenaran suatu implikasi $p \Rightarrow q$ ekuivalen dengan nilai kebenaran kontraposisinya $\neg q \Rightarrow \neg p$. Jadi pekerjaan membuktikan kebenaran pernyataan implikasi dibuktikan lewat kontraposisinya.

Contoh Buktikan, jika x^2 bilangan ganjil maka x bilangan ganjil.
Bukti. Pernyataan ini sangat sulit dibuktikan secara langsung. Mari kita coba saja. Karena x^2 ganjil maka dapat ditulis $x = 2m + 1$ untuk suatu bilangan asli m. Selanjutnya $x = \sqrt{2m+1}$ tidak dapat disimpulkan apakah ia ganjil atau tidak. Sehingga bukti langsung tidak dapat digunakan. Kontraposisi dari pernyataan ini adalah

”Jika x genap maka x^2 genap”.

Selanjutnya diterapkan bukti langsung pada kontraposisinya. Diketahui x genap, jadi dapat ditulis $x = 2n$ untuk suatu bilangan bulat n. Selanjutnya,

$$x^2 = (2n)^2 = 2\,\underbrace{(2n^2)}_{m} = 2m$$

yang merupakan bilangan genap.

3. Bukti kosong

Bila hipotesis p pada implikasi $p \Rightarrow q$ sudah bernilai salah maka implikasi $p \Rightarrow q$ selalu benar apapun nilai kebenaran dari q. Jadi jika kita dapat menunjukkan bahwa p salah maka kita telah berhasil membuktikan kebenaran $p \Rightarrow q$.

Contoh Didalam teori himpunan kita mengenal definisi berikut :

> Diberikan dua himpunan A dan B. Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari B, ditulis $A \subset B$ jika pernyataan berikut dipenuhi : ”jika $x \in A$ maka $x \in B$”. Suatu himpunan dikatakan himpunan kosong jika ia tidak mempunyai anggota.

Buktikan, himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari himpunan apapun.

Bukti. Misalkan $A = \{\ \}$ suatu himpunan kosong dan B himpunan sebarang. Kita akan tunjukkan bahwa pernyataan ”jika $x \in A$ maka $x \in B$” bernilai benar. Karena A himpunan kosong maka pernyataan p yaitu x 2 A selalu bernilai salah karena tidak mungkin ada x yang menjadi anggota himpunan kosong. Karena p salah maka terbuktilah kebenaran pernyataan ”jika $x \in A$ maka $x \in B$”, yaitu $A \subset B$. Karena B himpunan sebarang maka bukti selesai.

4. Bukti trivial

Bila pada implikasi $p \Rightarrow q$, dapat ditunjukkan bahwa q benar maka implikasi ini selalu bernilai benar apapun nilai kebenaran dari p. Jadi jika kita dapat menunjukkan bahwa
q benar maka kita telah berhasil membuktikan kebenaran $p \Rightarrow q$.

Contoh 4. Buktikan, jika $0 < x < 1$ maka $0 < \frac{|x|}{|x|+1}$

Bukti. Karena pernyataan q, yaitu $0 < \frac{|x|}{|x|+1}$ selalu benar untuk setiap x bilangan real termasuk x di dalam interval (0,1) maka secara otomatis kebenaran pernyataan ini terbukti.

5. Bukti dengan kontradiksi

Metoda ini mempunyai keunikan tersendiri, tidak mudah diterima oleh orang awam. Dalam membuktikan kebenaran implikasi $p \Rightarrow q$ kita berangkat dari diketahui p dan $\neg q$. Berangkat dari dua asumsi ini kita akan sampai pada suatu kontradiksi. Suatu kontradiksi terjadi bilamana ada satu atau lebih pernyataan yang bertentangan.
Contoh pernyataan kontradiksi : 1 = 2, $-1 < a < 0$ dan $0 < a < 1$, ”m dan n dua bilangan bulat yang relatif prime”dan”m dan n keduanya bilangan genap”.

Contoh 5. Misalkan himpunan A didefinisikan sebagai interval setengah terbuka
$A := [0,1)$. Buktikan maksimum A tidak ada.
Bukti. Pernyataan ini dapat dinayatakan dalam bentuk implikasi berikut

”jika $A := [0,1)$ maka maksimum A tidak ada.”

Andaikan maksimum A ada, katakan p. Maka haruslah $0 < p < 1$, dan akibatnya $\frac{1}{2}p < \frac{1}{2}$ dan $\frac{1}{2}(p+1) < 1$. Diperoleh

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p \\ &< \frac{1}{2}p + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(p+1) < 1 \end{aligned}$$

Diperoleh dua pernyataan berikut :

- p maksimum A, yaitu elemen terbesar himpunan A.
- ada $q \in A$ (yaitu $q := \frac{1}{2}(p+1)$) yang lebih besar dari p.

Kedua pernyataan ini kontradiktif, jadi pengandaian A mempunyai maksimum adalah salah, jadi haruslah tidak ada maksimum.

Contoh 6. Tidak ada bilangan bulat positif x dan y yang memenuhi persamaan Diophantine $x^2 - y^2 = 1$.

Bukti. Misalkan ada bilangan bulat positif x dan y yang memenuhi $x^2 - y^2 = 1$. Maka pada ruas kiri dapat difaktorkan sehingga diperoleh

$$(x - y)(x + y) = 1:$$

Karena x, y bulat maka persamaan terakhir ini hanya dapat terjadi bilamana $x - y = 1$ dan $x + y = 1$ atau $x - y = -1$ dan $x + y = -1$. Pada kasus pertama akan dihasilkan $x = -1$ dan $y = 0$, sedangkan pada kasus kedua dihasilkan $x = 1$ dan $y = 0$. Hasil pada kedua kasus ini bertentangan dengan hipotesis bahwa x dan y bulat positif.

Bila dicermati ada kemiripan bukti dengan kontradiksi dan bukti dengan kontraposisi. Untuk menjelaskan perbedaan kedua metoda ini kita perhatikan struktur pada keduanya sebagai berikut :

- Pada metoda kontradiksi, kita mengasumsikan p dan $\neg q$, kemudian membuktikan adanya kontradiksi.
- Pada bukti dengan kontraposisi, kita mengasumsikan $\neg q$, lalu membuktikan $\neg p$.

Asumsi awal kedua metoda ini sama, pada metoda kontraposisi tujuan akhirnya sudah jelas yaitu membuktikan kebenaran *:p*, sedangkan pada metoda kontradiksi tujuan akhirnya tidak pasti pokoknya sampai bertemu kontradiksi. Secara khusus jika kita sampai pada pernyataan *:p* maka kontradiksi sudah ditemukan. Jadi metoda kontraposisi merupakan kasus khusus dari metoda kontraposisi.

6. Bukti eksistensial

Ada dua tipe bukti eksitensial ini, yaitu konstruktif dan takkonstruktif. Pada metoda konstruktif, eksistensinya ditunjukkan secara eksplisit. Sedangkan pada metoda takkonstruktif, eksistensinya tidak diperlihatkan secara eksplisit.

Contoh 7. Buktikan, ada bilangan irrasional *x* dan *y* sehingga *xy* rasional.

Bukti. Kita sudah mengetahui bahwa $\sqrt{2}$ irrasional, anggaplah kita sudah dapat membuktikannya. Sekarang perhatikan $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ Bila ternyata $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ rasional maka bukti selesai, dalam hal ini diambil $x = y = \sqrt{2}$. Bila $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ bukan rasional (yaitu irrasional), diperhatikan bahwa $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ = 2 merupakan bilangan rasional.

Jadi salah satu pasangan (*x*,*y*), dengan $x = y = \sqrt{2}$, atau $x = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ dan $y = \sqrt{2}$ pasti memenuhi pernyataan yang dimaksud.

Pada bukti ini hanya ditunjukkan eksistensi bilangan irrasional *x* dan *y* tanpa memberikannya secara eksplisit. Ini dikenal dengan istilah pembuktian eksistensi non konstruktif.

Contoh 8. (Bartle and Sherbert, 1994). Bila a dan b bilangan real dengan $a < b$ maka terdapat bilangan rasional r dengan $a < r < b$.

Bukti. Diperhatikan bahwa $\frac{1}{b-a}$ suatu bilangan real positif. Menurut sifat Archimedes terdapat bilangan asli n sehingga $n > \frac{1}{b-a}$. Untuk n ini berlaku

$$nb - na > 1 \qquad (*)$$

Sekarang ambil m sebagai bilangan bulat pertama yang lebih besar dari na, dan berlaku

$$m - 1 \leq na < m \qquad (**)$$

Dari (*) dan (**) diperoleh
$na < m \leq na + 1 < nb$:
Bentuk terakhir ini dapat ditulis $na < m < nb$, dan dengan membagi semua ruas dengan n, didapat

$$a < \frac{m}{n} < b$$

dan dengan mengambil $r := \frac{m}{n}$ maka bukti Teorema selesai.

Dalam membuktikan eksistensi bilangan rasional r, ditempuh dengan langkah-langkah konstruktif sehingga bilangan rasional yang dimaksud dapat dinyatakan secara eksplisit. Ini bukti eksistensial dengan konstruktif. Melalui langkah-langkah pembuktian ini kita dapat membangun algortima untuk melakukan komputasi numerik. Perhatikan contoh berikut :

Contoh 9. Tentukan 3 buah bilangan rasional diantara $\sqrt{2}$ dan $\frac{3}{2}$

Penyelesaian.

- Diketahui $a = \sqrt{2} \approx 1{,}4142$, $b = \frac{3}{2} = 1{,}5$
- $d = \dfrac{1}{1{,}5 - 1{,}4142} \approx 11{,}6569$
- Jadi bilangan asli yang yang dapat diambil adalah n = 12, 13, 14, 15, 16.
- Untuk n = 12 diperoleh $na \approx (12)(\sqrt{2}) \approx 16{,}9706$ maka diambil m = 17. Untuk n = 13, $na \approx (13)(\sqrt{2}) \approx 18{,}3848$ dan diambil m = 19. Untuk n = 14 maka $na \approx (14)(\sqrt{2}) \approx 19{,}7990$ dan diambil m = 20.
- Jadi bilangan rasional $r = \frac{17}{2}, \frac{19}{13}\, dan \frac{20}{14}$ terletak diantara $\sqrt{2}$ dan $\frac{3}{2}$.

Pada kalkulus kita mempelajari butki pada teorema nilai rata-rata baik untuk bentuk diferensial maupun bentuk integral. Eksistensi titik c pada kedua teorema ini tidak diberikan secara eksplisit tetapi dapat diyakinkan bahwa ia ada. Termasuk, ada berapa banyak keberadaan mereka bukan merupakan issue penting dalam pembuktian eksistensial. Dalam pembuktian eksistensial, terkadang diperlukan mengenai jaminan ketunggalannya. Ini menjadi pekerjaan sendiri dalam pembuktian.

7. Bukti ketunggalan

Dalam membuktikan ketunggalan, pertama harus ditunjukkan eksistensi suatu objek, katakan objek itu x. Ada dua pendekatan yang dapat ditempuh untuk membuktikan bahwa x hanya satu-satunya objek yang memenuhi, yaitu

- Diambil objek sebarang, katakan y maka ditunjukkan $y = x$, atau
- Misalkan y objek sebarang lainnya dengan $y \neq y$, ditunjukkan adanya suatu kontradiksi. cara ini tidak lain menggunakan metoda kontradiksi seperti yang sudah dibahas sebelumnya.

Contoh 10. Pada pengantar analisis real, biasanya kita menggunakan definisi limit barisan sebegai berikut :

> Misalkan $(x_n : n \in \mathbb{N})$ suatu barisan bilangan real. Bilangan real x dikatakan limit dari $(x_n : n \in \mathbb{N})$, dan ditulis
>
> $$\lim(x_n) = x$$
>
> jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat bilangan asli K sehingga
>
> $$|x_n - x| < \varepsilon \text{ untuk setiap } n \geq K:$$

Kemudian, disusun teorema berikut

"Jika limit barisan (xn) ada maka ia tunggal."

Bukti. Di sini tidak diperlukan bukti eksistensi karena kita hanya akan membahas barisan yang mempunyai limit, atau eksistensinya sudah diasumsikan. Sekarang kita gunakan pendekatan kedua. Andaikan barisan $X := (x_n)$ mempunyai dua limit yang berbeda, katakan x_a dan x_b dengan $x_a \neq x_b$. Diberikan $\varepsilon := \frac{1}{3}|x_b - x_a|$

Karena $\lim(x_n) = x_a$ maka untuk ε ini terdapat K_a sehingga

$$|x_n - x_a| < \varepsilon \text{ untuk setiap } n \geq K_a:$$

Juga, karena $\lim(x_n) = x_b$ maka terdapat K_b sehingga

$$|x_n - x_b| < \varepsilon \text{ untuk setiap } n \geq K_b:$$

Sekarang untuk $n \geq$ maks $\{K_a, K_b\}$ maka berlaku

$$\begin{aligned} |x_a - x_b| &= |x_a - x_n + x_n - x_b| \\ &\leq |x_n - x_a| + |x_n - x_b| \\ &< \varepsilon + \varepsilon \\ &= \frac{2}{3}|x_a - x_b| \end{aligned}$$

Akhirnya diperoleh $|x_a - x_b| < \frac{2}{3}|x_a - x_b|$ suatu pernyataan yang kontradikstif. Pengandaian $x_a \neq x_b$ salah dan haruslah $x_a = x_b$, yaitu limitnya mesti tunggal.

8. Bukti dengan *counter example*

Untuk membuktikan suatu konjektur terkadang kita membutuhkan penjabaran yang cukup panjang dan sulit. Tapi bila kita dapat menemukan satu saja kasus yang tidak memenuhi konjektur tersebut maka selesailah urusannya.

Contoh 11. Misalkan ada konjektur berikut :

”Untuk setiap n bilangan asli maka 2^{2^n} + 1 merupakan bilangan prima”

Bukti. Pernyataan ini berlaku untuk setiap bilangan asli n. Tapi bila bila ditemukan satu bilangan asli, katakan n_0 dan $2^{2^{n_0}}$ + 1 tidak prima (komposit) maka konjektur ini tidak benar. Diperhatikan beberapa kasus berikut, untuk $n = 1$ diperoleh bilangan 5, $n = 2$ menghasilkan 17, $n = 3$ menghasilkan 257 dan $n = 4$ menghasilkan 65537. Keempat bilangan ini prima. Coba perhatikan untuk $n = 5$, diperoleh

$$2^{25} + 1 = 4294967297 = (641)(6700417).$$

Ternyata bukan prima. Nah, $n = 5$ merupakan contoh penyangkalan (*counter example*). Akhirnya disimpulkan bahwa konjektur ini salah.

Contoh menarik lainnya berasal dari kalkulus atau pengantar analisis real. Kita mengenal dengan baik teorema yang mengatakan bahwa setiap fungsi yang terdiferensial selalu kontinu. Sebaliknya, apakah setiap fungsi kontinu selalu terdiferensial ? Kita biasa mengambil fungsi $f(x) = |x|$ dan titik $x_0 = 0$. Jelas f kontinu di x_0, tetapi tidak terdiferensial di x_0. Jadi kebalikan teorema ini tidak berlaku.

9. Bukti dengan induksi matematika

Secara umum penalaran di dalam matematika menggunakan pendekatan deduktif. Tidak dapat dibayangkan bagaimana orang dapat membuktikan kebenaran pernyataan yang memuat kalimat "untuk setiap $\varepsilon > 0$ . . . ", "untuk setiap bilangan asli n . . .", "untuk setiap fungsi kontinu f . . .", dan lain-lain. Tidak mungkin dapat ditunjukkan satu per satu untuk menunjukkan kebenaran pernyataan tersebut. Tapi ada salah satu pola penalaran pada matematika yang menggunakan prinsip induksi, biasanya disebut induksi matematika. Prinsip induksi matematika ini adalah untuk inferensi terhadap pernyataan tentang n dimana n berjalan pada himpunan bilangan bulat, biasanya himpunan bilangan asli N atau pada himpunan bagian bilangan asli, $N_1 \subset N$. Biasanya pernyataan tentang bilangan asli n dinyatakan dengan $P(n)$.

Contoh 12. Untuk setiap $n \in$ N, berlaku $1+2+3+......+n = \frac{1}{2}n\,(n+1)$. Diperoleh

$P(1) : 1 = \frac{1}{2}(1)(1 + 1)$

$P(3) : 1 + 2 + 3 = \frac{1}{2}\ (3)(3 + 1)$

$P(6) : 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \frac{1}{2}(6)(6 + 1)$

Teorema 1. *Misalkan S himpunan bagian dari* N *yang mempunyai sifat-sifat berikut*
(i) $1 \in S$
(ii) $k \in S \Rightarrow k + 1 \in S$.
Maka S = N.

Bukti. Lihat (Bartle dan Sherbet, 1994).

Bila $P(n)$ suatu pernyataan tentang n bilangan asli maka $P(n)$ dapat bernilai benar pada beberapa kasus atau salah pada kasus lainnya. Diperhatikan $P(n)$: bahwa $n^2 \geq 2^n$ hanya benar untuk $P(2)$; $P(3)$; $P(4)$ tetapi salah untuk kasus lainnya. Prinsip induksi matematika dapat diformulasikan sebagai berikut :

> Misalkan untuk tiap *n 2* N menyatakan pernyataan tentang n. Jika
> (i) $P(1)$ benar,
> (ii) jika $P(k)$ benar maka $P(k + 1)$ benar,
> maka $P(n)$ benar untuk setiap $n \in$ N.

Kembali kita dituntut membuktikan kebenaran implikasi $p \Rightarrow q$ pada (ii). Di sini kita perlu membuktikan kebenaran pernyataan $P(k+1)$ dengan diketahui kebenaran $P(k)$.

Contoh 13. (Ketidaksamaan Bernoulli). Jika $x > -1$ maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx: \text{ (KB)}$$

Bukti. Dibuktikan dengan induksi matematika. Untuk $n = 1$ kedua ruas pada (KB) menjadi kesamaan. Diasumsikan berlaku untuk $n = k$, yaitu berlaku $(1+x)^k \geq 1+kx$. Untuk $n = k + 1$, diperoleh

$$\begin{aligned} (1 + x)^k &\geq 1 + kx \text{ [diketahui]} \\ (1 + x)^{k+1} = (1 + x)^k(1 + x) &\geq (1 + kx)(1 + x) \\ &= 1 + (k + 1)x + kx^2 \\ &\geq 1 + (k + 1)x: \end{aligned}$$

Jadi berlaku untuk $n = k + 1$. Perhatikan pada baris kedua, kedua ruas dikalikan dengan $(1+ x)$ suatu bilangan positif karena $x > -1$. Jadi tanda ketidaksamaan tidak berubah.

Satu lagi varian metoda induksi adalah dikenal dengan prinsip induksi kuat yang dinyatakan sebagai berikut :

Misalkan untuk tiap $n \in \mathbb{N}$ menyatakan pernyataan tentang n. Jika

(i) $P(1)$ benar,
(ii) jika $P(1), P(2),...., P(k)$ benar maka $P(k + 1)$ benar,
maka $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Contoh 14. Diberikan barisan (x_n) yang didefinisikan secara rekursif berikut

$$x_1 := 1; \; x_2 := 1;$$
$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + x_{n-1}\right) \text{ untuk } n > 1:$$

Misalkan $P(n) : 1 \leq xn \leq 2$. Buktikan $P(n)$ berlaku untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Bukti. Kita terapkan prinsip induksi matematika kuat.

i. Untuk $n = 1$, diketahui $x_1 = 1$. Jadi $P(1)$ benar.
ii. Diasumsikan $P(1), P(2),....., P(k)$ benar, yaitu berlaku $1 \leq x_1 \leq 2$, $1 \leq x_2 \leq 2$, $1 \leq x_3 \leq 2, . . . , 1 \leq x_{k-1} \leq 2$, $1 \leq x_k \leq 2$. Dari kedua ketaksamaan terakhir $1 \leq x_{k-1} \leq 2$, $1 \leq x_k \leq 2$, bila dijumlahkan diperoleh

$$2 \leq \left(x_k + x_{k-1}\right) \leq 4, \; 1 \leq \frac{1}{2}\left(x_k + x_{k-1}\right) = x_{k+1} \leq 2$$

Ini berarti $P(k + 1)$ benar. Jadi terbukti $P(n)$ berlaku untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

10. Bukti dua arah

Ada kalanya suatu pernyataan berupa bi-implikasi, $p \Leftrightarrow q$. Ada dua kemungkinan bi-implikasi bernilai benar $p \Leftrightarrow q$ yaitu p benar dan q benar, atau p salah dan q salah. Dalam prakteknya, pernyataan ini terdiri dari $p \Rightarrow q$ dan $q \Rightarrow p$. Membuktikan kebenaran bi-implikasi $p \Leftrightarrow q$ berarti membuktikan kebenaran kedua implikasi $p \Rightarrow q$ dan $q \Rightarrow p$. Selanjutnya dapat menggunakan bukti langsung, taklangsung atau mungkin dengan kontradiksi.

Contoh 15. Buktikan, suatu bilangan habis dibagi sembilan jika hanya jika jumlah angka-angka pembangunnya habis dibagi sembilan.

Bukti. Sebelum kita buktikan, dijelaskan terlebih dulu maksud dari pernyataan ini dengan contoh berikut. Ambil bilangan 135, 531, 351, 513, 315, 153, maka semuanya habis dibagi 9. Coba periksa satu per satu. Misalkan p suatu bilangan bulat, maka dapat disajikan dalam bentuk

$$p = x_n x_{n-1} x_{n-2} \ldots\ldots x_2 x_1 x_0$$

dimana $x_n \neq 0; x_{n-1},\ldots\ldots,x_0$ bilangan bulat taknegatif.
Sedangkan nilai p ini dapat ditulis dalam bentuk berikut :

$$p = x_0 + x_1 10^1 + x_2 10^2 + \ldots + x_n 10^n$$

Jumlah angka-angka pembangunnya adalah

$$s = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Pertama dibuktikan ($\Rightarrow$), yaitu diketahui p habis dibagi 9, dibuktikan s habis dibagi 9. Karena p habis dibagi 9 maka dapat ditulis $p = 9k$ untuk suatu bilangan bulat k. Diperhatikan selisih $p - s$,

$$\begin{aligned} p - s &= x_0 + x_1 10^1 + x_2 10^2 + \ldots + x_n 10^n - (x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \\ &= (10 - 1)x^1 + (10^2 - 1)x^2 + \ldots + (10^n - 1)x^n \end{aligned}$$

Diperhatikan bilangan pada ruas kanan selalu habis dibagi sembilan, misalnya ditulis $9m$ untuk suatu bilangan bulat m. Jadi diperoleh

$$9k - s = 9m \Rightarrow s = 9(k - m)$$

yaitu s habis dibagi 9. Selanjutnya dibuktikan ($\Leftarrow$), yaitu diketahui s habis dibagi 9, dibuktikan p habis dibagi 9. Diperhatikan

$$\begin{aligned} p &= x_0 + x_1 10^1 + x_2 10^2 + \ldots + x_n 10^n \\ &= x_0 + x_1 (10^1 - 1) + x_2 (10^2 - 1) + \ldots + x_n (10^n - 1) + x_1 + x_2 + \ldots + x_n. \\ &= \underbrace{[x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n]}_{s} + [x_1 (10^1 - 1) + x_2 (10^2 - 1) + \ldots + x_n (10^n - 1)] \end{aligned}$$

Karena bilangan pada kelompok pertama dan kelompok kedua habis dibagi 9 maka terbukti p habis dibagi 9.

Penutup

Belajar matematika dengan cara memahami bukti tidaklah mudah. Dibutuhkan waktu untuk memahami matematika sebagai bahasa logika. Juga, dibutuhkan wawasan matematika yang luas untuk belajar membuktikan fakta-fakta yang lebih rumit. Di dalam bukti termuat nilai-nilai strategis yang dapat melatih kita berpikir secara logis. Keindahan matematika juga banyak terdapat pada harmonisasi penalaran-penalaran dalam bukti. Dengan memahami bukti kita dapat mengikuti alur berpikir para ahli yang pertama kali menemukannya, yang berdampak pada kekaguman terhadap para *inventor* matematika dan pada akhirnya menyenangi matematika itu sendiri. Berlatih memahami bukti merupakan modal utama untuk dapat melakukan riset matematika.

DAFTAR PUSTAKA

http:/www2.edc.org/makingmath

http:/www.cut-the-knot.org

Bartle, Robert G and D.R. Sherbet, 1994. *Introduction to real analysis,* second edition, John Willey & sons, New York.

Julan H, 2007. Materi kuliah Logika Matematika, jurusan matematika FMIPA, UAD, Yogyakarta.

Rinovia S dan Nana Nawawi G, 2005. Materi kuliah Matematika Diskrit, jurusan matematika ITB, Bandung.