MODEL STATISTIKA UNTUK FERTILITAS PERKAWINAN DENGAN PENDEKATAN EKSPONENSIAL

Endang Sri Kresnawati
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya
endangsrikresnawati@yahoo.co.id

Abstrak

Fertilitas perkawinan dipengaruhi oleh faktor fertilitas alami dan perilaku hentian. Kedua faktor tersebut dapat dibangun melalui pengembangan Model Coale-Trussell dengan pendekatan eksponensial menjadi model statistika. Tingkat fertilitas alami (m) dan tingkat perilaku hentian (M) diperoleh dengan memaksimumkan model statistika tersebut dengan *maximum likelihood*. Pensubstitusian penaksir $\hat{m}$ dan $\hat{M}$ ke Model Coale-Trussell menghasilkan Model Coale-Trussell eksponensial.
Kata kunci: fertilitas perkawinan, eksponensial, *maximum likelihood*

1. PENDAHULUAN

Model adalah gambaran suatu objek yang disusun dengan tujuan tertentu. Model yang menggunakan lambang, rumus, dan notasi matematika dalam menyajikan perilaku objek disebut model matematika. Model matematika digolongkan atas model deterministik dan model probabilistik. Model deterministik untuk mengukur perilaku atau gejala amatan derajat kepastian yang cukup tinggi, sedangkan model probabilistik digunakan untuk menggambarkan amatan yang bersifat stokastik atau probabilistik (statistik) dan tergantung pada variabel waktu. Variabel waktu model statistik terbagi atas variabel diskrit dan kontinu. Salah satu penerapan model statistik adalah untuk menaksir angka kelahiran, angka kematian, dan besaran pertumbuhan penduduk. Banyak model pertumbuhan penduduk yang biasa digunakan dalam kependudukan, antara lain model linier, geometri, dan eksponensial. Ketiganya menggunakan variable diskrit, sehingga penaksiran pertumbuhan penduduk hanya dilakukan pada waktu-waktu tertentu yang integer. Pada masa sekarang, pertumbuhan penduduk semakin pesat dan "ekstrim". Suatu waktu tertentu terjadi lonjakan kelahiran, namun pada waktu lainnya terjadi kematian masal yang menurunkan laju pertumbuhan.

Fertilitas memiliki pola pertumbuhan alami, di mana pertumbuhan penduduk semakin lama akan semakin berkurang sampai akhirnya terhenti pada suatu titik setelah sebelumnya telah melewati fase lonjakan pertumbuhan. Pola fertilitas juga dipengaruhi oleh faktor biologi, psikologi, ideologi, politik, sosial, ekonomi, budaya, dan faktor religi yang dianut. Berbagai faktor tersebut melahirkan berbagai sikap manusia dalam membuat keputusan mengenai jumlah kelahiran. Secara teori, tingkat fertilitas ditentukan dari dua faktor utama, yaitu penjarangan kelahiran dan pembatasan kelahiran. Kompleksnya faktor yang mempengaruhi kelahiran menyebabkan penaksiran angka kelahiran menggunakan model fertilitas diskrit tidak mampu lagi menggambarkan arah dan tingkat fertilitas. Model fertilitas kontinu lebih dapat menggambarkan fenomena fertilitas saat ini melalui keluasan jangkauan pembahasan yang dimilikinya. Model statistik yang tepat untuk pola tersebut adalah distribusi eksponensial, karena pola fertilitas alami mengikuti kurva eksponensial. Pada kajian fertilitas lebih lanjut, Model Coale-Trussell khusus digunakan untuk menaksir fertilitas perkawinan. Fertilitas perkawinan adalah banyaknya jumlah anak yang dilahirkan wanita menikah pada waktu tertentu. Model Coale-Trussell adalah model fertilitas perkawinan yang menggunakan bilangan eksponensial, untuk itu pengembangannnya mengikuti pola distribusi-distribusi dengan bilangan bilangan pokok e (seperti Distribusi Poisson dan Eksponensial).

Sumarno, 1997 telah melakukan pengembangan Model Coale-Trussell menggunakan Distribusi Poisson. Pada Sumarno, 1997 model dikembangkan berdasarkan variable diskrit, ssehingga perhitungannya hanya dilakukan di titik-titik waktu integer tertentu. Angka fertilitas perkawinan tergantung pada usia ibu saat menikah dan lamanya masa subur. Pengamatan dilakukan setiap waktu untuk menentukan selang dedah, masa jedah antara kelahiran terakhir dan kehamilan berikutnya, agar diperoleh ukuran yang akurat. Karena itu, Kresnawati, 1999 melakukan pengembangan Model Coale-Trussell dengan pendekatan eksponensial yang bervariabel acak kontinu.

Pemodelan ini bertujuan memberikan pola fertilitas perkawinan penduduk wanita Indonesia tahun 1990. Manfaat yang diperoleh adalah taksiran angka kelahiran dari wanita menikah di Indonesia tahun 1990.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini bersifat studi literatur yang dilakukan pada tahun 1999. Pada tahun tersebut data sensus terakhir adalah Sensus Penduduk 1990. Bahan-bahan yang digunakan adalah *textbook*, jurnal ilmiah, dan artikel-artikel yang mendukung. Penyelesaian masalah dilakukan melalui tahapan: pengumpulan data, pengolahan data, menetapkan model fertilitas perkawinan yaitu Model Coale-Trussell, transformasi distribusi Poisson ke Distribusi Gamma, transformasi distribusi Gamma ke Distribusi Eksponensial, membuat fungsi gabungan likelihood, menentukan nilai m dan M dengan menentukan penaksir $\hat{m}$ dan $\hat{M}$ menggunakan maximum likelihood, mensubstitusikan penaksir tersebut ke model Coale-Trussell awal menjadi model fertilitas perkawinan eksponensial.

3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Model statistika adalah gambaran sederhana dari data, biasanya dibangun dari hubungan matematika atau numeriK terdefinisi. Model statistika juga dapat dinyatakan sebagai formula yang mendefinisikan bagian struktur model, yaitu data apa yang dimodelkan, dengan data lain apa, dan dalam bentuk apa. Model statistika harus memiliki tiga poin, yaitu: variabel acak, parameter konstan yang tidak diketahui, dan suatu fungsi $g(.)$ yang menggambarkan fungsi densitas dari variabel acak untuk setiap objek. Salah satu penerapan model statistika adalah untuk menentukan fertilitas perkawinan.

3.1. Model Coale-Trussell

Fertilitas menunjukkan kemampuan secara nyata dari seorang wanita atau sekelompok wanita untuk melahirkan yang terjadi dalam masa reproduksi antara 15 tahun sampai 49 tahun. Fertilitas adalah ukuran kesuburan. Fertilitas yang diukur dari wanita menikah disebut fertilitas perkawinan. Kenyataannya tidak semua wanita yang berada dalam masa reproduksi secara potensial mampu melahirkan bayi. Keadaan ini disebabkan beberapa faktor.

Population Index, 1974 memberikan salah satu model yang digunakan untuk menjelaskan fertilitas perkawinan yaitu Model Coale-Trussel

$$\frac{r(a)}{n(a)} = Meks[mv(a)] \qquad (1)$$

Di mana $r(a)/n(a)$ menyatakan rasio fertilitas menurut umur, $r(a)$, dengan fertilitas alami, $n(a)$. M adalah suatu konstanta yang menyatakan fertilitas alami, m adalah konstanta untuk perilaku hentian, dan $v(a)$ menyatakan perilaku hentian.

Sumarno, 1977 menotasikan $r(a)$ dengan $ASMFR(a)$ (*Age Specific Marital Fertility Rate*). Model ini menyatakan bahwa pola pertilitas dipengaruhi oleh perilaku hentian. Ada dua perilaku hentian, yaitu penjarangan kelahiran dan pembatasan jumlah anak yang dilahirkan. Dua faktor ini menjadi pendorong tidak terjadinya kelahiran. Berdasarkan itu, Model Coale-Trussell pada persamaan (1) dapat ditulis sebagai berikut:

$$ASMFR(a) = Meks[mv(a)] \tag{2}$$

M dan m berbanding terbalik. Jika M besar, maka m kecil dan sebaliknya. Model Coale-Trussell masuk dalam keluarga eksponensial, pengembangannya ke distribusi eksponensial adalah dalam rangka mendapatkan angka taksiran yang mendekati angka sebenarnya dengan galat sekecil mungkin.

Tahapan berikutnya yang dilakukan dalam menyususn model (2) menjadi model eksponensial adalah dengan mentransformasi Distribusi Gamma ke Ditribusi Eksponensial dan menentukan penaksir *Maximum Likelihood* untuk M dan m.

3.2. Transformasi Distribusi Gamma ke Distribusi Eksponensial

Distribusi Eksponensial diperoleh dari Distribussi Gamma dengan nilai parameter tertentu. Distribusi Gamma sendiri berasal dari transformasi Poisson. Distribusi Gamma adalah model peluang untuk waktu tunggu yang merupakan variabel acak.

Dimisalkan variabel acak Y_j sebagai umur wanita ke-j ($j = 1,2,3,..., N_w$. N_w : jumlah wanita) saat ia melangsungkan perkawinan pertama. Umur yang dibutuhkan untuk memperoleh fertilitas adalah y_j, dinotasikan dengan t, di mana t adalah bilangan bulat positif.

Distribusi Y_j adalah:

$$G(y_j) = \Pr(Y_j \leq y_j) = 1 - \Pr(Y_j > y_j) \tag{3}$$

Untuk kejadian yang kurang dari total t dalam umur ke-y wanita ke-j, jika variabel acak K adalah angka kelahiran alami dalam umur y_j, maka:

$$\Pr(Y_j > y_j) = \sum_{k=0}^{t-1} \Pr(K = k)$$

Di mana

$$\sum_{k=0}^{t-1} \Pr(K = k)$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \Pr(Y_j > y_j) &= \sum_{k=0}^{t-1} \Pr(K = k) \\ &= \sum_{k=0}^{t-1} \frac{(np)^k e^{-np}}{k!} \qquad (4) \\ &\approx \sum_{j=1}^{N_w} \frac{\mu_{y_j} e^{-\mu_{y_j}}}{B(y_j)!} \end{aligned}$$

Lalu persamaan (4) ditransformasi guna memperoleh Distrubusi Gamma, hasilnya sebagai berikut:

$$\sum_{k=0}^{t-1} \frac{(np)^k e^{-np}}{k!} = \int_{np}^{\infty} \frac{\mu^{t-1} e^{-\mu}}{(t-1)!}$$

Di mana $k = t - 1 = B_{y_j}$ dan $\mu = np = \mu_{y_j}$ menjadi:

$$\int_{np}^{\infty} \frac{\mu_{y_j}{}^{B_{y_j}} e^{-\mu_{y_j}}}{B(y_j)!} d\mu_{y_j} \qquad (5)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (5) ke persamaan (3):

$$G(y_j) = 1 - \int_{np}^{\infty} \frac{\mu_{y_j}{}^{B_{y_j}} e^{-\mu_{y_j}}}{B(y_j)!} d\mu_{y_j}$$

Dimisalkan: $(y_j)! = \Gamma(B_{y_j}) = \Gamma(t-1)$

Maka:

$$G(y_j) = 1 - \int_{np}^{\infty} \frac{\mu_{y_j}{}^{B_{y_j}} e^{-\mu_{y_j}}}{\Gamma(By_j)} d\mu_{y_j} = \int_{0}^{np} \frac{\mu_{y_j}{}^{B_{y_j}} e^{-\mu_{y_j}}}{\Gamma(By_j)} d\mu_{y_j}$$

Untuk $y_j \le 0$ dan $G(y_j) = 0$. Jika kita ubah μ_{y_j} dengan memisalkan $\mu_{y_j} = p_{y_j} S_{y_j}$, maka:

$$G(y_j) = \int_0^{np} \frac{p_{y_j}{}^{B_{y_j}-1} s_{y_j}{}^{B_{y_j}} e^{-p_{y_j} s_{y_j}}}{\Gamma(By_j)} d\mu_{y_j}\ ,\ y_j > 0$$

Akhirnya diperoleh fungsi densitas peluang dari Y_j, yaitu:

$$g(y_j) = G'_{y_j} = \frac{p_{y_j}{}^{B_{y_j}-1} n_{y_j}{}^{B_{y_j}} e^{-n_{y_j} p_{y_j}}}{\Gamma(By_j)}\ ,\ 0 < y_j < 49 \qquad (6)$$

Y_j berdistribusi Gamma dengan $\alpha = B_{y_j} - 1$, $\beta = \frac{1}{p}$. Jika $B_{y_j} = 1$, maka fungsi densitas peluang dari Y_j adalah:

$$g(y_j) = \frac{n_{y_j} e^{-n_{y_j} p_{y_j}}}{\Gamma(1)} = n_{y_j} e^{-n_{y_j} p_{y_j}}\ , \Gamma(1) = 1$$

Dinamakan f.d.p. Poisson dengan:

$$\mu_{y_j} = 0{,}89MT(y_j)\exp\left\{-\left(\frac{y_j - 29{,}88}{14{,}77}\right)^4 - 0{,}02y_j - 0{,}44m\left(\frac{y_j}{30}\right)^{6,4}\exp\left(\frac{(y_j/30)^{7,4}}{15{,}21}\right)\right\} \qquad (7)$$

Di mana:

n_{y_j} : jumlah anak yang dilahirkan oleh wanita ke-*j* yang menikah pada usia ke-*y*

p_{y_j} : peluang jumlah anak yang akan dilahirkan oleh wanita ke-*j* yang menikah di usia ke-*y*

μ_{y_j} : rata-rata kelahiran yang dihasilkan wanita ke-*j* yang menikah di usia ke-*y*

Model di atas belum sepenuhnya dapat digunakan, sebelumnya harus dibuat ke bentuk gabungan, dimaksimumkan, dan dicari penaksirnya.

3.3. Fungsi Gabungan

Fungsi gabungan merupakan perkalian dari fungsi densitas peluang Poisson yang dimaksimumkan

$$g(y_1) = n_{y_1} e^{-\mu_{y1}}; g(y_2) = n_{y_2} e^{-\mu_{y2}}; ...; g(y_w) = n_{yw} e^{-\mu_{yw}}$$

$$g(y_1, y_2, ..., y_w) = n_{y_1} e^{-\mu_{y1}} . n_{y_2} e^{-\mu_{y2}} . ....n_{yw} e^{-\mu_{yw}}$$

$$g(y_j) = \prod_{j=1}^{N_w} n_{y_j} e^{-\mu_{yj}} \qquad (8)$$

Di mana N_w = jumlah wanita menikah

3.4. Penaksir *Maximum Likelihood*

Untuk mendapatkan nilai m dan M yang belum diketahui, dilakukan dengan cara me-*ln*-kan fungsi gabungan model eksponensial pada persamaan (8) dan mendifferensialkannya hingga menghasilkan penaksir $\hat{m}$ dan $\hat{M}$. Penaksir $\hat{m}$ dan $\hat{M}$ merupakan taksiran terbaik untuk m dan M.

$$g(y_1, y_2, ..., y_w) = n_{y_1} e^{-\mu_{y1}} . n_{y_2} e^{-\mu_{y2}} . .... n_{yw} e^{-\mu_{yw}}$$

$$L(\Omega) = \prod_{j=1}^{N_w} n_{y_j} e^{-\sum_{j=1}^{N_w} \mu_{y_j}}$$

$$\ln L(\Omega) = \ln\left(\prod_{j=1}^{N_w} n_{y_j}\right) - \sum_{j=1}^{N_w} \mu_{y_j} \tag{9}$$

Substitusikan persamaan (7) ke persamaan (9)

$$\ln L(\Omega) = \ln\left(\prod_{j=1}^{N_w} n_{y_j}\right) - \sum_{j=1}^{N_w} 0{,}89\, MT(y_j) \exp\left\{-\left(\frac{y_j - 29{,}88}{14{,}77}\right)^4 - 0{,}02\, y_j - 0{,}44\, m\left(\frac{y_j}{30}\right)^{6,4} \exp\left(\frac{(y_j/30)^{7,4}}{15{,}21}\right)\right\} \tag{10}$$

Kemudian untuk memperoleh penaksir $\hat{m}$ dan $\hat{M}$, differensialkan persamaan (10) terhadap masing-masing

$$\frac{d \ln L(\Omega)}{dM} = 0$$

Diperoleh:

$$\hat{m} = \frac{\sum_{j=1}^{N_w} \ln\left(0{,}89 T(y_j)\right) - \left(\frac{y_j - 29{,}88}{14{,}77}\right)^4 - 0{,}02\, y_j}{0{,}44\left(\frac{y_j}{30}\right)^{6,4} \exp\left(\frac{(y_j/30)^{7,4}}{15{,}21}\right)}$$

Dan

$$\frac{d \ln L(\Omega)}{dm} = 0$$

$$\hat{M} = \frac{eksp\left[\sum_{j=1}^{N_w} \ln\left(0{,}89 T(y_j)\right) - \left(\frac{y_j - 29{,}88}{14{,}77}\right)^4 - 0{,}44 - \left(\frac{y_j}{30}\right)^{6,4}\right]}{0{,}89 T(y_j)}$$

Setelah penaksir $\hat{m}$ dan $\hat{M}$ diperoleh, maka model Coale-Trussell pada persamaan (2) menjadi

$$ASMFR(a) = \hat{M}\, eks\left[\hat{m}\, v(a)\right] \tag{13}$$

Berdasarkan penurunan rumus di atas, dapat dikatakan model fertilitas perkawinan ditentukan oleh ukuran *m* (perilaku penghentian kelahiran) dan *M* (perilaku penjarangan kelahiran) yang berpola eksponensial. Model (13) memiliki variabel acak kontinu untuk semua nilai non negative dengan parameter $p > 0$. Sifat distribusi ini selalu positif, tidak mungkin bernilai negative di titik waktu manapun.jika ditelaah ke belakang, baik Model Coale-Trussell maupun Model (13) sebenarnya mengikuti pola umum Model Pertumbuhan Penduduk Eksponensial. Pada model tersebut, pertumbuhan penduduk digambarkan mengikuti pola bilangan eksponensial. Dalam prinsip pemodelan matematika, model yang sudah ada dapat diubah suai atau dikembangkan. Pengembangan dapat dilakukan terhadap variabel amatan dan pendekatannya.

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Pemodelan terhadap fertilitas perkawinan dengan pendekatan eksponensial memberikan gambaran secara eksponen bahwa keputusan dalam menentukan jumlah anak dipengaruhi oleh pola penjarangan kelahiran dan pembatasan kelahiran. Modelnya adalah

$$ASMFR(a) = \left[\frac{eksp\left[\sum_{j=1}^{N_w} \ln\left(0{,}89\,T(y_j)\right) - \left(\frac{y_j - 29{,}88}{14{,}77}\right)^4 - 0{,}44 - \left(\frac{y_j}{30}\right)^{6{,}4}\right]}{0{,}89\,T(y_j)}\right] eks\left\{\left(\frac{\sum_{j=1}^{N_w} \ln\left(0{,}89\,T(y_j)\right) - \left(\frac{y_j - 29{,}88}{14{,}77}\right)^4 - 0{,}02\, y_j}{0{,}44\left(\frac{y_j}{30}\right)^{6{,}4} \exp\left(\frac{(y_j/30)^{7{,}4}}{15{,}21}\right)}\right) v(a)\right\}$$

Untuk penelitian berikutnya, disarankan untuk menggunakan Data Sensus Terakhir dan menggunakan model eksponensial lainnya, agar diperoleh gambaran umum yang lebi mendekati angka sebenarnya.

DAFTAR PUSTAKA

Bostrom, G., 1985, *Practical Aspects on The Estimation of The Parameters in Coale's Coale's Model for marital Fertility*, Institut of Mathematical Statistics, University Of Umea, Sweden.

Office of Population Research, 1974, *Population Index*, Princeton Univercity and Population Association of America, USA.

Kresnawati, Endang S., 1999, Model Statistika untuk Fertilitas Perkawinan dengan Pendekatan Eksponensial, Skripsi, Universitas Sriwijaya.

Sumarno, Hadi, 1997, Penerapan model fertilitas perkawinan terhadap data jawa-bali, *Majalah Forum Statistika dan Komputasi IPB,* Institut Pertanian Bogor, Bogor, **2:15-22**.