

HAMILTONIAN DAN GEJALA CHAOS

TESIS MAGISTER

Oleh

FIBER MONADO

20297006



BIDANG KHUSUS FISIKA KOMPUTASI

PROGRAM STUDI FISIKA

PROGRAM PASCASARJANA

INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG

2000

HAMILTONIAN DAN GEJALA CHAOS

Nama : Fiber Monado

NIM : 20297006

Pembimbing,

Prof. Dr. B. Suprpto

*" dan matahari berjalan di tempat peredarannya. Demikianlah
ketetapan Yang Maha Perkasa lagi
Maha Mengetahui "*

(Qur'an Surat Yaa Siin ayat 38)

Kupersembahkan untuk yang tercinta:

*Ibunda Shofiah & Ayahanda Mustopa
Bapak & Ibu A. Rachman, Alm (mertua)
Istriku Idha AR
Anakku Nanda Fibryani*

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kehadiran Allah S.W.T, berkat ridhoNya juga penelitian dan penyusunan Tesis yang berjudul:

'Hamiltonian dan Gejala Chaos'

dapat diselesaikan. Tesis ini merupakan salah satu syarat untuk meraih gelar Magister pada program studi fisika program pascasarjana Institut Teknologi Bandung.

Pada kesempatan ini dengan tulus penulis sampaikan ucapan terima kasih kepada: Prof.Dr.B.Suprpto selaku pembimbing yang telah banyak mengarahkan dan membimbing selama pelaksanaan tugas akhir, Dr. Srijatno dan Dr. Zaki Su'ud selaku penguji.

Ucapan terimakasih juga penulis sampaikan kepada:

1. Rektor, Dekan dan ketua jurusan Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sriwijaya, yang telah memberikan ijin untuk mengikuti pendidikan.
2. Direktorat Jendral Pendidikan Tinggi, yang telah memberikan beasiswa melalui Biaya Pendidikan Pascasarjana (BPPs) selama mengikuti pendidikan.
3. Direktur program pascasarjana, ketua jurusan dan seluruh staf dosen serta karyawan jurusan fisika Institut Teknologi Bandung, yang telah banyak memberikan bantuan fasilitas dan wawasan keilmuan selama mengikuti pendidikan.
4. Kawan-kawan mahasiswa program Magister Fisika angkatan 1997, yang banyak membantu dan sebagai teman berdiskusi.

Semoga amal kebaikan Bapak, Ibu dan Saudara sekalian mendapat balasan dari Yang Maha Pemberi.

Akhirnya harapan penulis semoga Tesis ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membutuhkan.

Bandung, Maret 2000

Penulis,

ABSTRAK

Telah dibuat perangkat lunak untuk simulasi dinamika dobel pendulum, yang persamaan geraknya diperoleh dengan menggunakan fungsi Hamilton. Persamaan asal dan persamaan gerak yang dilinierisasi diselesaikan dengan integrasi numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde-4. Hasil perhitungan numerik diplot berupa grafik trajektori, diagram ruang fasa dan plot Poincare. Ketiga visualisasi grafik ini dipakai untuk analisis secara kualitatif adanya gejala kaos. Sedangkan analisis secara kuantitatif dikerjakan dengan melakukan perhitungan spektrum Lyapunov. Dari pengujian perangkat lunak dan eksplorasi terhadap dinamika gerak sistem dapat dikatakan bahwa perangkat lunak ini sudah baik untuk dipakai sebagai *tool* mengungkap adanya gejala kaos.

ABSTRACT

A software for simulation dynamics of double pendulum was composed. Equations of motion derive with used Hamiltonian. The fourth-order Runge-Kutta algorithm have used to integrate the original and linearized equations of motion. The result of numerical integration was plot in graphic trajectories, phase-space diagram, and Poincaré maps. All of these visualization are use to obseve whether of the system is periodic, quasiperiodic or chaotic by qualitatively analisis. And then, quantitative analisis was done by compute the Lyapunov spectrum. From prove the advantage of the software and exploration dynamics of the system, that can be say it is work well for used as an observational tools.

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	iv
ABSTRAK	v
DAFTAR ISI	vi
DAFTAR TABEL	vii
DAFTAR GAMBAR	viii
DAFTAR LAMPIRAN	ix
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar belakang	1
1.2 Batasan masalah	2
1.3 Tujuan penelitian	2
1.4 Manfaat penelitian	2
1.5 Sistematika penulisan tesis	3
BAB II STUDI PUSTAKA	4
2.1 Apakah <i>chaos</i> itu	4
2.2 Eksponen Lyapunov	4
2.3 Ruang fasa	7
2.4 Dinamika Hamiltonian	8
BAB III METODOLOGI PENELITIAN	14
3.1 Perumusan dinamika dobel pendulum	14
3.2 Penulisan perangkat lunak	18
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	22
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN	29
DAFTAR PUSTAKA	30
LAMPIRAN	A

DAFTAR TABEL

Tabel	Halaman
4.1 Hasil perhitungan spektrum Lyapunov	24
4.2 Hasil perhitungan spektrum Lyapunov untuk kondisi awal sama seperti pada Gambar 4.2.	26
4.3 Hasil perhitungan spektrum Lyapunov	27

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Halaman
2.1 Evolusi dari perbedaan Δx_n diantara trajektori-trajektori dari peta logistik pada $r = 0.91$ untuk $x_0 = 0.5$ dan $x_0 = 0.5001$ ^[6] .	5
2.2 Grafik ruang fasa dari simpel pendulum. Momentum diplot vs posisi untuk harga-harga energi yang berbeda. Dipilih $m=g=l=1$.	13
3.1 Dobel pendulum. Kita menetapkan $m = 1, l = 1$ dan $g = 1$.	14
4.1 Tampilan hasil eksekusi program. Dari kiri atas searah jarum jam: (a) grafik q_1 dan q_2 terhadap waktu (b) plot ruang fasa p_2 - q_2 , (c) plot Poincare p_1 - q_1 , (d) plot ruang fasa p_1 - q_1 .	23
4.2 Hasil eksekusi program untuk kondisi awa $q_1 = -0.65, q_2 = 1.4, p_1 = 0.6543$ dan $p_2 = 0.0$. Dari kiri atas searah jarum jam: (a) trajektori $q_i(t)$, (b dan d) plot ruang fasa p_i - q_i (b) (c) plot Poincare p_1 - q_1 .	25
4.3 Hasil simulasi untuk kondisi awal: $q_1 = 0.5236, q_2 = 0.8727, p_1 = 1$ dan $p_2 = 1.5$. Sistem yang menunjukkan gejala kaotis	27
4.3 Grafik spektrum Laypunov (dengan kondisi awal yang sama seperti disebutkan pada Gambar 4.3), yaitu plot spektrum terhadap waktu iterasi. Spektrum Lyapunov pertama: garis warna <i>light cyan</i> , spektrum kedua: garis warna <i>light red</i> , spektrum ketiga: garis warna <i>light green</i> , dan spektrum keempat: garis warna <i>light yellow</i>	28

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran	Halaman
1. Kode sumber program yang dibuat	A

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Banyak fenomena alam menunjukkan tingkah laku tak teratur dan tak dapat diprediksi dengan tepat. Misalnya pola-pola cuaca, gerak turbulen aliran fluida, dan lain sebagainya. Para ahli dinamika tak linier memberi istilah *chaos* (kaos) untuk tingkah laku seperti ini.

Pada sistem fisis (sistem dinamika) dengan dua atau lebih derajat kebebasan juga dapat menunjukkan tingkah laku kaos. Perumusan persamaan gerak suatu sistem fisis dapat dilakukan dengan menggunakan fungsi Hamilton $H(q_i, p_i; t)^{[1]}$. Sehingga akan diperoleh $2N$ persamaan diferensial (persamaan gerak) orde pertama. Selanjutnya persamaan gerak Hamilton ini diselesaikan dengan integrasi numerik.

Dengan bantuan komputer sifat-sifat gerak dari suatu sistem fisis dapat dieksplorasi. Dapat ditunjukkan apakah sistem dinamika ini menampilkan fenomena kaotik atau tidak.

Cara analisis untuk dinamika tak linier telah dikemukakan dalam banyak buku^[2,3,4,5,6]. Langkah analisis secara kuantitatif maupun kualitatif dinamika tak linier ini antara lain adalah : Analisis spektrum (transformasi fourier), penentuan eksponen Lyapunov, analisis diagram ruang fasa, *times series* dan *poincare section*.

1.2. Batasan Masalah

Disebabkan luasnya cakupan dari topik Hamiltonian kaos (meliputi klasikal dan kuantum kaos), maka pada tugas akhir ini persoalan dibatasi hanya pada Hamiltonian kaos pada sistem dinamika klasik (misalkan: phenomena kaos pada dobel pendulum)

1.3. Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan :

1. Menggunakan Fungsi Hamilton untuk menemukan persamaan gerak sistem.
2. Membuat program komputer untuk menyelesaikan persamaan gerak tersebut pada 1.
3. Menganalisis output program komputer tersebut pada 2.
4. Mengembangkan sumber daya manusia pada bidang fisika komputasi.

1.4. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat :

1. Mempermudah pemahaman penomena kaos pada sistem fisis.
2. Menunjukkan proses kaotik pada sistem fisis dengan simulasi dan visualisasi.
3. Merupakan sumbangan bagi pengembangan bidang ilmu fisika komputasi.

1.5. Sistematika penulisan tesis

Sistematika penulisan tesis ini sebagai berikut. Bab pertama berisi pendahuluan yang memuat latar belakang masalah, permasalahan, tujuan dan manfaat penelitian serta sistematika penulisan. Kemudian bab dua memberikan beberapa dasar teori yang melandasi penulisan ini. Bab tiga menjelaskan pelaksanaan penelitian yang dilakukan. Hasil dan pembahasan dipaparkan dalam bab empat. Bab lima berisi kesimpulan dari hasil penelitian ini.

BAB II

STUDI PUSTAKA

2.1. Apakah kaos itu

Kata kaos (*chaos*), sekarang ini sudah sangat populer. Orang sering berkata: politik paska pemilu 1999 akan kaos, perekonomian kita sedang kaos atau keadaan cuaca akibat elnino menjadi kaos. Bahkan dari seorang presiden sampai para pedagang sayur sudah biasa memakai kata ini. Namun apakah pengertian kaos itu ?.

Dalam kamus besar bahasa Indonesia kaos diartikan sebagai keadaan yang kacau balau. Ini adalah deskripsi yang cukup akurat. Secara singkat kaos dapat di definisikan sebagai suatu sistem dinamik yang sangat sensitif terhadap kondisi awal. Dalam riset matematika konsep kaos telah lebih dari satu abad yang lalu dikemukakan oleh matematikawan Perancis Henri Poincaré untuk menjawab apakah sistem tatasurya stabil^[3,5]. Dia menyimpulkan bahwa tidak hanya tidak ada solusi umum dari persoalan 3 benda (matahari dan 2 planet) tapi juga sedikit perbedaan kondisi awal untuk tiga benda ini dapat menyebabkan perubahan yang besar setelah satu periode waktu.

2.2. Eksponen Lyapunov

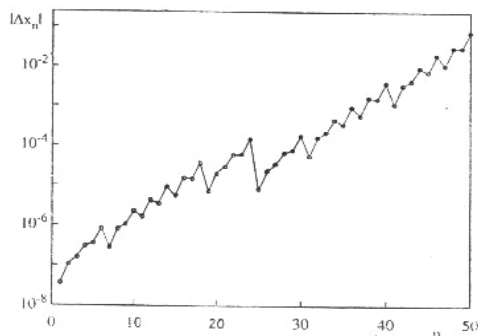
Secara umum jika dua sistem dinamik yang identik dengan kondisi awal yang berbeda berevolusi, diharapkan bahwa perbedaan antara dua trajektori ini akan berubah sebagai suatu fungsi dari n . Gambar 2.1. menunjukkan plot $|\Delta x_n|$ terhadap n (dari peta logistik), sepintas lalu terlihat bahwa $\ln |\Delta x_n|$ bertambah secara linier sebagai fungsi

dari n . Hasil ini mengindikasikan bahwa pemisahan antara trajektori-trajektori ini tumbuh secara eksponensial jika sistem kaotis(*chaotic*). Divergensi trajektori ini dapat dilukiskan dengan eksponen Lyapunov yang didefinisikan sebagai berikut:

$$|\Delta x_n| = |\Delta x_0| e^{\lambda n} \quad (2.1)$$

dengan Δx_n adalah perbedaan antar trajektori ini pada waktu n .

Jika eksponen Lyapunov λ positif, maka trajektori yang dekat divergen secara eksponensial. Kelakuan kaotis dicirikan oleh divergensi eksponensial dari trajektori-trajektori dekat ini^[6]



Gb 2.1. Evolusi dari perbedaan Δx_n diantara trajektori-trajektori dari peta logistik pada $r = 0.91$ untuk $x_0 = 0.5$ dan $x_0 = 0.5001$ ^[6].

Cara naif pengukuran eksponen Lyapunov λ adalah menjalankan sistem dinamika yang sama dua kali dengan kondisi awal yang sedikit berbeda dan mengukur perbedaan trajektorinya sebagai fungsi dari n ^[6]. Karena pemisahan trajektori harusnya bergantung pada pemilihan x_0 , suatu metode yang lebih baik akan dapat menghitung laju pemisahan

banyak harga x_0 . Metode ini akan membosankan, karena kita harus *memfit*(mencocokkan) pemisahan untuk pers.(2.1) bagi setiap harga x_0 dan kemudian menentukan harga rata-rata λ .

Keterbatasan utama metode naif ini adalah karena trajektori dibatasi ke interval satuan, jadi pemisahan $|\Delta x_n|$ berhenti bertambah ketika n menjadi cukup besar. Untuk membuat perhitungan λ seakurat mungkin keseluruhan iterasi yang mungkin harus dirata-ratakan. Ada prosedur yang lebih baik, yang dapat dijelaskan seperti berikut ini. Ambil logaritma natural (ln) dari kedua sisi pers.(2.1), sehingga diperoleh persamaan berikut ini:

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\Delta x_n}{\Delta x_0} \right| \quad (2.2)$$

Karena kita ingin menggunakan data dari keseluruhan trajektori setelah kelakuan transient berakhir, maka digunakan fakta bahwa:

$$\frac{\Delta x_n}{\Delta x_0} = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_0} \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \dots \frac{\Delta x_n}{\Delta x_{n-1}} \quad (2.3)$$

Jadi pers.(2.2) dapat dituliskan menjadi:

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i} \right| \quad (2.4)$$

Terlihat dari pers.(2.4) persoalan perhitungan λ telah direduksi untuk mendapatkan nisbah $\Delta x_{i+1}/\Delta x_i$. Kita inginkan perbedaan kondisi awal antara dua trajektori sekecil mungkin, maka diperlukan limit $\Delta x_i \rightarrow 0$. Ide bagi prosedur yang lebih pintar adalah menghitung diferensial dx_i dari persamaan gerak, pada waktu yang sama persamaan gerak ini diiterasi. Sebagai contoh kita gunakan peta logistik^[6] yang ditulis dalam bentuk diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dx_{i+1}}{dx_i} = f'(x_i) = 4r(1 - 2x_i) \quad (2.5)$$

Dapat ditinjau x_i untuk beberapa i sebagai kondisi awal dan nisbah dx_{i+1}/dx_i sebagai ukuran laju perubahan x_i . Sekarang kita dapat mengiterasi peta logistik seperti sebelumnya dan menggunakan harga x_i ini serta pers.(2.5) untuk menghitung dx_{i+1}/dx_i pada setiap iterasi.

Eksponen Lyapunov diberikan oleh:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln|f'(x_i)| \quad (2.6)$$

dimana sumasi(jumlahan) dalam pers.(2.6) dimulai setelah kelakuan transien selesai. Kita memasukkan secara eksplisit limit $n \rightarrow \infty$ dalam pers.(2.6) untuk mengingatkan agar memilih n cukup besar. Perlu dicatat bahwa prosedur ini memboboti titik-titik pada penarik (*attractor*) yang sesungguhnya, yaitu jika suatu daerah khusus dari penarik sering tidak dikunjungi oleh trajektori, maka tidak banyak menyumbang terhadap sumasi pada pers.(2.6)^[6].

Jika suatu sistem dinamik mempunyai ruang fasa multi dimensi, misalnya model Lorenz, maka ada sekumpulan eksponen Lyapunov yang dinamakan spektrum Lyapunov, yaitu karakteristik divergen dari direktori^[5,6,7]

2.3. Ruang fasa

Evolusi waktu sistem dinamis dapat terjadi dalam waktu kontinu maupun diskrit. Kejadian untuk waktu kontinu disebut *flow* (aliran), sedangkan untuk waktu diskrit disebut *mapping* (pemetaan)^[8]. Sebagai contoh pendulum sederhana yang bergerak secara kontinu dari keadaan

satu keadaan yang lain, karena itu digambarkan oleh aliran waktu kontinu.

Ruang fasa merupakan sarana yang sangat bermanfaat untuk menggambarkan tingkahlaku sistem yang bersifat kaos dalam bentuk geometri. Misalkan pendulum yang bergerak dengan gesekan berangsur-angsur akan berhenti, dan dalam ruang fasa berarti orbit ini mendekati sebuah titik. Titik tersebut tidak bergerak dan karena titik ini menarik orbit-orbit yang berdekatan dengannya, maka titik ini disebut penarik (*attractor*).

Setiap sistem yang akan diam dengan berlalunya waktu dapat dicirikan oleh sebuah titik tetap dalam ruang fasa. Secara umum orbit sistem seperti ini akan tertarik menuju ke daerah ruang fasa yang lebih kecil dan berdimensi lebih rendah. Daerah seperti ini juga disebut sebagai penarik.

2.4. Dinamika Hamiltonian

Perumusan Hamiltonian adalah suatu teknik yang ampuh dan efektif untuk analisis persoalan dinamika^[2]. Pada perumusan Hamiltonian dari dinamika klasik, sistem dilukiskan oleh pasangan persamaan diferensial orde pertama untuk setiap derajat kebebasannya, yaitu variabel kanonik q_i dan momentum konjugate p_i . Secara normal Hamiltonian untuk setiap persoalan harus dibangun melalui perumusan Lagrangian. Prosedur formalnya mengikuti urutan berikut^[1]:

- Pilih kumpulan koordinat umum q_i , Lagrangian $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ dibangun.
- Momentum konjugate didefinisikan sebagai fungsi dari q_i, \dot{q}_i dan t oleh:

$$p_i = \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.7)$$

- Untuk membentuk Hamiltonian digunakan pers:

$$H(q, p, t) = \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t) \quad (2.8)$$

- Persamaan (2.7) kemudian dibalik untuk memperoleh \dot{q}_i sebagai fungsi dari $(q, p; t)$.
- Hasil dari langkah diatas kemudian digunakan untuk mengeliminasi \dot{q} dari H , sehingga ekspresi dari H itu sendiri adalah fungsi dari $(q, p; t)$.

Untuk Hamiltonian $H(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$ evolusi waktu dari koordinat kanonik ditentukan oleh $2N$ persamaan kanonik berikut:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{dan} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1 \dots N \quad (2.9)$$

Koordinat kanonik dari suatu sistem dinamik dengan N derajat kebebasan menjangkau ruang $2N$ dimensi yang disebut ruang fasa (*phase space*) dari sistem. Dalam ruang fasa ini suatu keadaan dari sistem dicirikan oleh sebuah titik tunggal. Sebagaimana sistem berevolusi dengan waktu, titik-titik ini mengikuti trajektori dalam ruang fasa.

Trajektori ini mempunyai sifat umum yaitu tidak dapat berpotongan diantaranya atau dengan yang lainnya, yaitu konsekuensi langsung dari geometri teorema keunikan. Untuk sistem Hamiltonian yang besar, teorema Liouville lebih jauh menyatakan bahwa elemen volum dalam ruang fasa tidak dapat menjadi lebih besar atau lebih kecil sebagaimana titik-titik dalam ruang fasa berevolusi terhadap waktu

Sebagai contoh, kita tinjau sistem dengan satu derajat kebebasan dengan Hamiltonian $H(q,p)$ yang memenuhi kekekalan energi dari sistem ini. Persamaan Hamiltonian $H(q,p) = \text{konstan}$, secara lengkap menentukan trajektori dalam ruang (q,p) . Untuk gerak terikat, maka semua trajektorinya tertutup dan gerak sepanjang trajektori ini periodik.

Kemudian kita tinjau sistem dengan dua derajat kebebasan, dicirikan oleh Hamiltonian $H(q_i, p_i)$, $i = 1, 2$. Dalam kasus ini persamaan tunggal $H = \text{konstan}$ tidak menentukan jalan dari suatu trajektori dalam ruang fasa 4d [tetapi memaksakan suatu kendala yang lebih lemah. Itu menetapkan *hypersurface* 3d dalam ruang fasa 4d], dimana semua trajektori untuk suatu energi yang diberikan terkurung.

Adanya integral gerak kedua $I(q_1, q_2, p_1, p_2)$ menentukan *hypersurface* 3d lain yang invarian dibawah evolusi waktu. Beberapa trajektori yang diberikan terletak pada perpotongan dua permukaan yang ditentukan oleh $H = \text{konstan}$ dan $I = \text{konstan}$., yaitu suatu permukaan 2d dalam ruang 4d. Permukaan ini mempunyai topologi sebuah torus (invarian torus)^[9]. Karena sulit untuk memvisualisasikan objek dalam ruang 4d daripada objek 2d, maka kita berharap melihat torus invarian ini muncul pada energi *hypersurface* 3d dimana torus ini berbentuk seperti donat.

Adanya integral gerak kedua I juga menyatakan secara tidak langsung adanya suatu transformasi kanonik khusus dari koordinat kanonik q_1, q_2, p_1, p_2 ke koordinat sudut aksi J_1, J_2, ϕ_1, ϕ_2 . Dalam ruang (q_1, q_2, p_1, p_2) , sumbu local J_i tegak lurus dan sumbu local ϕ_i menyinggung beberapa torus invarian. Torus ini kemudian hanya ditentukan oleh koordinat aksi J_i dan gerak titik fasa pada torus ditentukan oleh koordinat aksi $\phi_i(t)$.

Karena torus seluruhnya terletak pada energi *hypersurface* yang diberikan, maka Hamiltonian dinyatakan dalam suku-suku koordinat baru hanyalah fungsi dari variabel aksi $H(q_1, q_2, p_1, p_2) = H(J_1, J_2)$. Persamaan gerak kanoniknya dapat dituliskan dengan hubungan :

$$\dot{J}_i = -\frac{\partial H}{\partial \phi_i} = 0, \quad \dot{\phi}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} = \omega_i(J_1, J_2) \quad (2.10)$$

Jika untuk torus yang diperlihatkan nisbah ω_2/ω_1 adalah bilangan rasional, maka beberapa trajektori akan tertutup, jika tidak trajektori akan berayun sekitar torus ini dan akhirnya akan menutupinya. Gerak titik fasa dikatakan periodik atau quasiperiodik sesuai keadaan dua frekuensi fundamental, sepadan atau tak sepadan. Karena itu adanya invarian analitik (=integral gerak kedua) I tambahan bagi H menentukan beberapa kendala tidak hanya pada sebab trajektori individual dalam ruang fasa tetapi juga pada gerak dari beberapa variabel kanonik.

Ketiadaan integral gerak kedua I benar-benar membuka gerbang menuju gerak kaotik. Trajektori ini tak lebih lama perlu dikurung pada permukaan 2d dalam ruang fasa dan mereka mungkin dapat mengambil bagian lebih kompleks pada energi *hypersurface* tanpa melanggar syarat takberpotongan. Demikian juga tak adanya koordinat sudut aksi membuang kendala periodisitas dan quasiperiodisitas dan membolehkan

gerak yang lebih kompleks, dicirikan oleh spektrum intensitas kontinu. Semua kemungkinan kompleksitas baru ini diwujudkan dengan trajektori kaotik dalam suatu Hamiltonian yang tidak dapat diintegrasikan (*nonintegrable*).

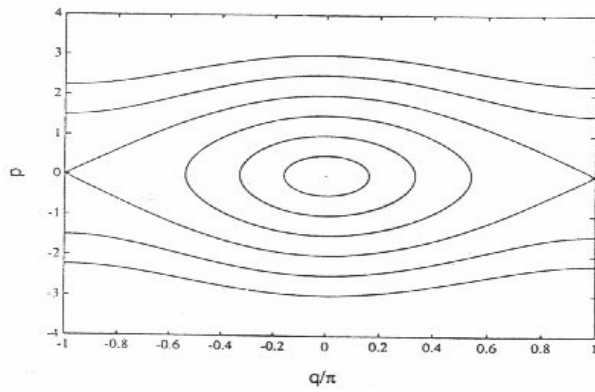
Tinjau suatu sistem dengan satu derajat kebebasan, misalkan bandul sederhana yang Hamiltoniannya dapat dituliskan sebagai:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos q) \quad (2.11)$$

dengan q dan p masing-masing koordinat umum dan momentum umum. Evolusi waktu dari sistem ini ditentukan oleh persamaan kanonik (menggunakan persamaan 2.9):

$$\dot{q} = p/2ml^2, \quad \dot{p} = -mgl \sin q \quad (2.12)$$

Gambar 2, melukiskan grafik ruang fasa dari simpul pendulum (hasil penyelesaian secara numerik pers.(2.12)). Telah dipilih $m=g=l=1$. Kurva-kurva individual mewakili trajektori ruang fasa pada harga-harga energi yang berbeda $E = H(q,p)$. Kurva-kurva ini mewakili tori invarian 1-D dalam ruang fasa 2-D. Untuk $0 < E < 2$, pendulum mengalami gerak librational yang dilukiskan oleh kurva tertutup. Untuk $E > 2$, massa pendulum berotasi searah atau berlawanan arah dengan arah putar jarum jam sekitar sumbunya dengan kecepatan angular yang tak seragam, dilukiskan oleh kurva terbuka.



Gambar 2.2 Grafik ruang fasa dari simpel pendulum.
 Momentum diplot vs posisi untuk harga-harga energi yang berbeda. Dipilih $m=g=l=1^{[10]}$.

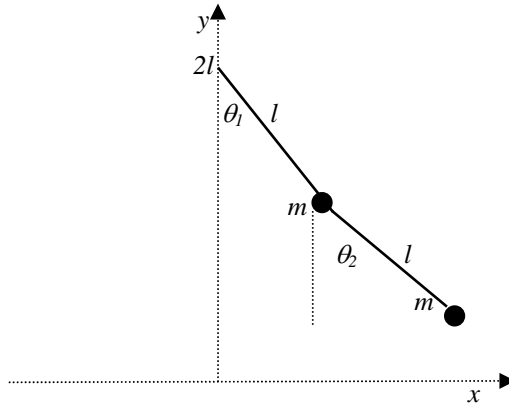
BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini akan dipaparkan perumusan persoalan yang akan dibahas dalam tesis ini dan penulisan perangkat lunaknya.

3.1. Perumusan dinamika dobel pendulum

Tinjau sistem dengan dua derajat kebebasan yang dicirikan oleh Hamiltonian $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$. Sebagai contoh sistem fisik yang lebih realistis adalah dobel pendulum, seperti digambarkan dibawah ini:



Gambar 3.1. Dobel pendulum. Kita menetapkan $m = 1$, $l = 1$ dan $g = 1$.

Sistem ini mengandung dua benda titik dengan massa m yang sama. Salah satu benda titik tergantung pada suatu titik tetap oleh sebuah batang tanpa massa dengan panjang l dan yang lain digantungkan pada benda titik pertama oleh batang yang serupa. (lihat gambar). Energi total dari sistem ini adalah kekal, yang dalam hal ini diwakili oleh

Hamiltoniannya. Kita akan menentukan bahwa tidak semua trajektori ruang fasa dikurung terhadap torus invarian.

Dalam penyelesaian persoalan ini, sebagaimana disebutkan terdahulu, kita harus menemukan kumpulan koordinat kanonik untuk sistem. Secara umum teknik untuk membangun Hamiltonian bagi suatu sistem mekanika dapat dijumpai dalam buku teks mekanika klasik^[1,2,11]. Langkah-langkah untuk memperoleh persamaan gerak dari Gambar 3.1 adalah sebagai berikut. Empat koordinat kartesian (x_1, y_1, x_2, y_2) dari benda titik dapat diekspresikan oleh dua suku koordinat umum (θ_1, θ_2) , yaitu:

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1 \quad (3.1a)$$

$$y_1 = 2l - l_1 \cos \theta_1 \quad (3.1b)$$

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \quad (3.1c)$$

$$y_2 = 2l - l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 \quad (3.1d)$$

Energi kinetik sistem diberikan oleh:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m (\dot{x}_1 + \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_2 + \dot{y}_2)^2 \\ &= \frac{1}{2} ml^2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

dan energi potensial dinyatakan oleh:

$$V = m g l (4 - 2 \cos \theta_1 + \cos \theta_2) \quad (3.3)$$

Lagrangian sistem dibentuk dari energi kinetik dikurangi energi potensial, yaitu:

$$L = \frac{1}{2} ml^2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) - mgl(4 + 2 \cos \theta_1 + \cos \theta_2) \quad (3.4)$$

Momentum kanonik $p_i = \partial L / \partial \dot{\theta}_i$ konjugate terhadap koordinat $q_i = \theta_i$ diperoleh sebagai berikut:

$$p_1 = ml^2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) \quad (3.5a)$$

$$p_2 = ml^2(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)) \quad (3.5b)$$

Hamiltonian atau energi total yang dibangun dari pers.(2.8) adalah:

$$H = \frac{1}{2}ml^2 \frac{p_1^2 + 2p_2^2 - 2p_1p_2 \cos(q_1 - q_2)}{1 + \sin^2(q_1 - q_2)} + mgl(4 - 2\cos q_1 - \cos q_2) \quad (3.6)$$

Persamaan gerak dari Hamiltonian di atas diperoleh dengan menggunakan pers.(2.9), sehingga dihasilkan empat persamaan diferensial non linier orde pertama yang terkopel, yaitu:

$$\dot{q}_1 = \frac{p_1 - p_2 \cos(q_1 - q_2)}{ml^2[1 + \sin^2(q_1 - q_2)]} \quad (3.7a)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{2p_2 - p_1 \cos(q_1 - q_2)}{ml^2[1 + \sin^2(q_1 - q_2)]} \quad (3.7b)$$

$$\dot{p}_1 = \frac{-p_1p_2 \sin(q_1 - q_2)[1 + \sin^2(q_1 - q_2)] + [p_1^2 + 2p_2^2 - 2p_1p_2 \cos(q_1 - q_2)] \sin(q_1 - q_2) \cos(q_1 - q_2)}{ml^2[1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^2} - 2mgl \sin(q_1) \quad (3.7c)$$

$$\dot{p}_2 = \frac{p_1p_2 \sin(q_1 - q_2)[1 + \sin^2(q_1 - q_2)] + [p_1^2 + 2p_2^2 - 2p_1p_2 \cos(q_1 - q_2)] [-\sin(q_1 - q_2) \cos(q_1 - q_2)]}{ml^2[1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^2} - mgl \sin(q_2) \quad (3.7d)$$

Selanjutnya untuk mendapatkan spektrum Lyapunov dari sistem dinamik ini, persamaan (3.7a s.d. 3.7d) harus dilinierisasi ^[6]. Persamaan yang telah dilinierisasi dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta q_1}{dt} = & \Delta p_1 [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-1} - \{ p_1 [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-2} [2 \sin(q_1 - q_2)] \\
& [\cos(q_1 - q)] [\Delta q_1 - \Delta q_2] \} - \Delta p_2 \cos(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-1} \\
& + p_2 [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-1} [\sin(q_1 - q_2)] [\Delta q_1 - \Delta q_2] - \{ p_2 \cos(q_1 - q_2) \\
& [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-2} [2 \sin(q_1 - q_2)] \cos(q_1 - q_2) [\Delta q_1 - \Delta q_2] \}
\end{aligned} \tag{3.8a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta q_2}{dt} = & 2\Delta p_2 [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-1} - \{ p_2 [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-2} [2 \sin(q_1 - q_2)] \\
& [\cos(q_1 - q)] [\Delta q_1 - \Delta q_2] \} - \Delta p_1 \cos(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-1} \\
& + p_1 [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-1} [\sin(q_1 - q_2)] [\Delta q_1 - \Delta q_2] + \{ p_2 \cos(q_1 - q_2) \\
& [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-2} [2 \sin(q_1 - q_2)] \cos(q_1 - q_2) [\Delta q_1 - \Delta q_2] \}
\end{aligned} \tag{3.8b}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta p_1}{dt} = & \Delta p_1 p_2 \sin(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-1} - \Delta p_2 p_1 \sin(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-1} \\
& - [\Delta q_1 - \Delta q_2] p_1 p_2 \cos(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-1} + [\Delta q_1 - \Delta q_2] \\
& p_1 p_2 \sin(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-2} [2 \sin(q_1 - q_2)] \cos(q_1 - q_2) \\
& + \Delta p_1 2p_1 \sin(q_1 - q_2) \cos(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-2} + [\Delta q_1 - \Delta q_2] \\
& p_1^2 \cos^2(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-2} - [\Delta q_1 - \Delta q_2] p_1^2 \sin^2(q_1 - q_2) \\
& [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-2} - [\Delta q_1 - \Delta q_2] p_1^2 \sin^2(q_1 - q_2) \cos^2(q_1 - q_2) \\
& 2[1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-3} + 2\Delta p_2 \sin(q_1 - q_2) \cos(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-2} \\
& + [\Delta q_1 - \Delta q_2] 2p_2 \cos^2(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-2} - [\Delta q_1 - \Delta q_2] 2p_2 \\
& \sin^2(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-2} - [\Delta q_1 - \Delta q_2] 8p_2 \sin^2(q_1 - q_2) \\
& \cos^2(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-3} - 2\Delta p_1 p_2 \sin(q_1 - q_2) \cos^2(q_1 - q_2) \\
& [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-2} - 2\Delta p_2 p_1 \sin(q_1 - q_2) \cos^2(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-2} \\
& - 2[\Delta q_1 - \Delta q_2] p_1 p_2 \cos^3(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-2} + 4[\Delta q_1 - \Delta q_2] p_1 p_2 \\
& \sin^2(q_1 - q_2) \cos(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-2} + 8[\Delta q_1 - \Delta q_2] p_1 p_2 \\
& \sin^2(q_1 - q_2) \cos^3(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-3} - 2\Delta q_1 \cos(q_1)
\end{aligned} \tag{3.8c}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta p_2}{dt} = & \Delta p_1 p_2 \sin(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-1} + \Delta p_2 p_1 \sin(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-1} \\
& + [\Delta q_1 - \Delta q_2] p_1 p_2 \cos(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-1} - 6[\Delta q_1 - \Delta q_2] \\
& p_1 p_2 \sin^2(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-2} [2 \sin(q_1 - q_2)] \cos(q_1 - q_2) \\
& - \Delta p_1 2 p_1 \sin(q_1 - q_2) \cos(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-2} - [\Delta q_1 - \Delta q_2] \\
& p_1^2 \cos^2(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-2} + [\Delta q_1 - \Delta q_2] p_1^2 \sin^2(q_1 - q_2) \\
& [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-2} + 4[\Delta q_1 - \Delta q_2] p_1^2 \sin^2(q_1 - q_2) \cos^2(q_1 - q_2) \\
& [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-3} - 4\Delta p_2 p_2 \sin(q_1 - q_2) \cos(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-2} \\
& - [\Delta q_1 - \Delta q_2] 2 p_2^2 \cos^2(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-2} + [\Delta q_1 - \Delta q_2] 2 p_2^2 \\
& \sin^2(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-2} + [\Delta q_1 - \Delta q_2] 8 p_2^2 \sin^2(q_1 - q_2) \\
& \cos^2(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-3} + 2\Delta p_1 p_2 \sin(q_1 - q_2) \cos^2(q_1 - q_2) \\
& [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-2} + 2\Delta p_2 p_1 \sin(q_1 - q_2) \cos^2(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-2} \\
& + 2[\Delta q_1 - \Delta q_2] p_1 p_2 \cos^3(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-2} - 8[\Delta q_1 - \Delta q_2] p_1 p_2 \\
& \sin^2(q_1 - q_2) \cos^3(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^{-3} - \Delta q_2 \cos(q_2)
\end{aligned}
\tag{3.8d}$$

3.2. Penulisan perangkat lunak

Langkah pertama yang dilakukan adalah membuat program simulasi. Program simulasi yang dibuat merupakan penyelesaian numerik persamaan diferensial orde satu yang dirumuskan dalam persamaan (3.7a) sampai dengan (3.7d).

Penyelesaian dilakukan dengan integrasi numerik menggunakan metode Runge Kutta orde ke empat^[12,13], dengan menetapkan ukuran ketelitian $dt = 0.001$. Algoritma yang dipergunakan adalah sebagai berikut:

Step 1. Ekspresikan persamaan gerak dalam bentuk

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_1(t, q_1, q_2, p_1, p_2)$$

$$\dot{q}_2 = \dot{q}_2(t, q_1, q_2, p_1, p_2)$$

$$\dot{p}_1 = \dot{p}_1(t, q_1, q_2, p_1, p_2)$$

$$\dot{p}_2 = \dot{p}_2(t, q_1, q_2, p_1, p_2)$$

Step 2. Berikan kondisi awal q_{10} , q_{20} , p_{10} , p_{20} dan tetapkan ukuran ketelitian dt .

Step 3. Mulai sebuah loop

Step 4. Loop n kali

Step 5. Plot titik-titik (q_i, t) , (q_i, p_i) dan (q_1, q_2) ;
dengan $i = 1, 2$.

Step 6. Hitung: $kq_1(i)$, $kq_2(i)$, $kp_1(i)$ dan $kp_2(i)$

Dari perumusan Runge-Kuta orde-4.

Step 7. Perbaharui q_1 q_2 p_1 p_2 :

$$q_1 \leftarrow q_1 + [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] / 6$$

$$q_2 \leftarrow q_2 + [l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4] / 6$$

$$p_1 \leftarrow p_1 + [m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4] / 6$$

$$p_2 \leftarrow p_2 + [n_1 + 2n_2 + 2n_3 + n_4] / 6$$

Step 8. Penambahan t :

$$t = t + dt$$

Step 9. Akhir dari step 4 loop.

Step 10. Akhir dari step 3 loop.

Step 11. Selesai.

Algoritma ini selanjutnya diimplementasikan pada program sebagaimana terlampir, dengan menggunakan perangkat lunak Visual Basic versi 4.0 buatan Microsoft corp.

Berikut ini adalah algoritma untuk mendapatkan spektrum Lyapunov dari dinamika dobel pendulum:

1. Linierisasi persamaan dinamik (dalam hal ini gunakan pers. 3.8a s.d. 3.8d; yaitu pers. dinamik yang telah dilinearisasi). Jika \mathbf{r} adalah vektor f -komponen yang mengandung variabel dinamik, maka definisikan $\Delta\mathbf{r}$ sebagai vektor *difference* yang dilinierisasi.
2. Berikan harga awal ortonormal f untuk $\Delta\mathbf{r}$; misalkan $\Delta\mathbf{r}_1(0)=(1,0,0,0)$, $\Delta\mathbf{r}_2(0)=(0,1,0,0)$, $\Delta\mathbf{r}_3(0)=(0,0,1,0)$ dan $\Delta\mathbf{r}_4(0)=(0,0,0,1)$.
3. Iterasi persamaan gerak asal dan yang telah dilinierisasi. Satu kali iterasi menghasilkan satu vektor baru dari persamaan gerak asal dan f vektor baru $\Delta\mathbf{r}_\alpha$ dari persamaan gerak yang dilinierisasi.
4. Dapatkan vektor ortonormal $\Delta\mathbf{r}_\alpha'$ dari $\Delta\mathbf{r}_\alpha$ menggunakan prosedur Gram-Schmidt^[14], yaitu:

$$\Delta\mathbf{r}_1' = \frac{\Delta\mathbf{r}_1}{|\Delta\mathbf{r}_1|} \quad (3.9a)$$

$$\Delta\mathbf{r}_2' = \frac{\Delta\mathbf{r}_2 - (\Delta\mathbf{r}_1' \cdot \Delta\mathbf{r}_2)\Delta\mathbf{r}_1'}{|\Delta\mathbf{r}_2 - (\Delta\mathbf{r}_1' \cdot \Delta\mathbf{r}_2)\Delta\mathbf{r}_1'|} \quad (3.9b)$$

$$\Delta\mathbf{r}_3' = \frac{\Delta\mathbf{r}_3 - (\Delta\mathbf{r}_1' \cdot \Delta\mathbf{r}_3)\Delta\mathbf{r}_1' - (\Delta\mathbf{r}_2' \cdot \Delta\mathbf{r}_3)\Delta\mathbf{r}_2'}{|\Delta\mathbf{r}_3 - (\Delta\mathbf{r}_1' \cdot \Delta\mathbf{r}_3)\Delta\mathbf{r}_1' - (\Delta\mathbf{r}_2' \cdot \Delta\mathbf{r}_3)\Delta\mathbf{r}_2'|} \quad (3.9c)$$

$$\Delta \mathbf{r}_4^* = \frac{\Delta \mathbf{r}_4 - (\Delta \mathbf{r}_1 \cdot \Delta \mathbf{r}_4) \Delta \mathbf{r}_1^* - (\Delta \mathbf{r}_2 \cdot \Delta \mathbf{r}_4) \Delta \mathbf{r}_2^* - (\Delta \mathbf{r}_3 \cdot \Delta \mathbf{r}_4) \Delta \mathbf{r}_3^*}{\left| \Delta \mathbf{r}_4 - (\Delta \mathbf{r}_1 \cdot \Delta \mathbf{r}_4) \Delta \mathbf{r}_1^* - (\Delta \mathbf{r}_2 \cdot \Delta \mathbf{r}_4) \Delta \mathbf{r}_2^* - (\Delta \mathbf{r}_3 \cdot \Delta \mathbf{r}_4) \Delta \mathbf{r}_3^* \right|} \quad (3.9d)$$

5. Set $\Delta \mathbf{r}_\alpha(t)$ sama dengan vektor ortonormal $\Delta \mathbf{r}_\alpha^*(t)$.
6. Akumulasikan data, yaitu $S_\alpha \rightarrow S_\alpha + \log |\Delta \mathbf{r}_\alpha(t)|$.
7. Ulangi langkah 3 sampai dengan 6 dan secara periodik estimasi eksponen Lyapunov $\lambda_\alpha = (1/n) S_\alpha$, dengan n adalah banyak iterasi.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dipaparkan pembahasan yang meliputi perangkat lunak dan analisis hasil eksplorasi yang diperoleh dari eksekusi perangkat lunak yang telah dibuat.

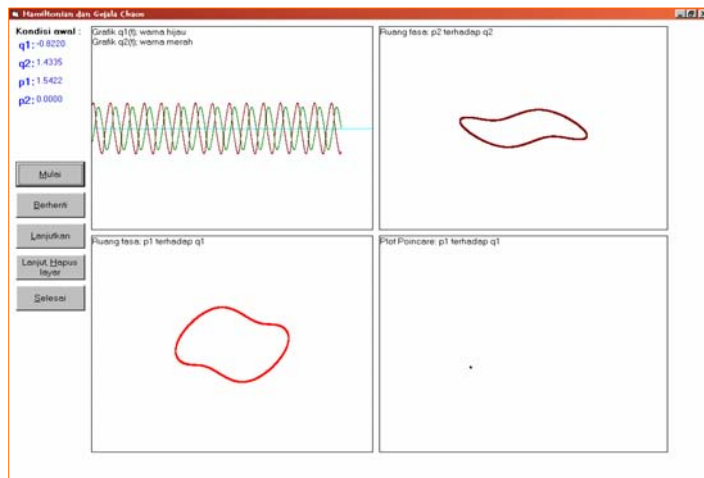
Perangkat Lunak

Pertama kali program dijalankan akan menampilkan sampul tesis, kemudian pengguna diminta untuk mengklik mouse dua kali dengan cepat atau menekan sembarang tombol pada papan ketik. Setelah itu tampil *form* menu pilihan. Di sini pengguna dapat memilih untuk menampilkan spektrum Lyapunov (pilihan 1), visualisasi trajektori, plot ruang fasa dan plot Poincare (pilihan 2), serta pilihan keluar.

Misalkan yang diklik adalah pilihan 2, maka akan tampil pada layar monitor *form* sebagaimana terlihat pada Gambar 4.1. Pada objek ini pengguna dapat mengganti nilai kondisi awal yang ada sesuai dengan keinginan. Pada *form* ini juga disediakan beberapa tombol perintah untuk mengontrol jalannya program yaitu antara lain tombol [Mulai], [Berhenti], [Lanjutkan], [Lanjut, Hapus layar] dan tombol [Seleasai]. Secara singkat fungsi tombol-tombol ini adalah:

- Tombol [Mulai], berfungsi memerintahkan program untuk mulai melakukan proses penyelesaian persamaan gerak dan persamaan gerak yang telah dilinerisasi dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde-4 dan visualisasi hasil.

- Tombol [\[Berhenti\]](#), berfungsi untuk menghentikan jalannya program tetapi tetap mencatat posisi saat program dihentikan.
- Tombol [\[Lanjutkan\]](#), berfungsi untuk melanjutkan jalannya program dengan mengingat keadaan saat program dihentikan.
- Tombol [\[Lanjut, Hapus layar\]](#), berfungsi untuk menghapus tampilan layar monitor dan kemudian memvisualisasikan kembali keadaan pada saat berikutnya.
- Tombol [\[Selesai\]](#), berfungsi untuk mengakhiri eksekusi program.



Gambar 4.1 Tampilan hasil eksekusi program. Dari kiri atas searah jarum jam: (a) grafik q_1 dan q_2 terhadap waktu (b) plot ruang fasa p_2 - q_2 , (c) plot Poincare p_1 - q_1 , (d) plot ruang fasa p_1 - q_1 .

Validasi Perangkat Lunak

Untuk meyakinkan bahwa perangkat lunak yang telah dibuat berjalan dengan benar, maka dilakukan validasi dengan mengeksekusi program pada kondisi awal tertentu^[9]. Kondisi awal $q_1 = -0.822$, $q_2 = 1.4335$, $p_1 = 1.5422$, dan $p_2 = 0.0$, diperoleh hasil seperti pada Gambar 4.1. Dapat diamati (a) trajektori $q_i(t)$ berupa fungsi sinusoidal yang periodik, (b dan d) plot ruang fasa p_i-q_i yang berupa kurva sangat tertutup, titik-titik pada ruang fasa akan kembali lagi kesuatu lintasan yang sama setelah suatu kali periode, (c) plot Poincare yang berupa sejumlah terbatas titik-titik (dalam kondisi ini berupa titik hampir ‘tunggal’). Hal ini sesuai dengan salah satu referensi yang dipakai^[9].

Dengan kondisi awal yang sama dieksekusi program untuk menghitung spektrum Lyapunovnya. Diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 4.1 Hasil perhitungan spektrum Lyapunov

Iterasi ke	Lamda 1	Lamda 2	Lamda 3	Lamda 4
	0.0946	0.0774	-0.1545	-0.1626
	0.0947	0.0774	-0.1545	-0.1626
	0.0947	0.0773	-0.1544	-0.1627
	0.0948	0.0773	-0.1544	-0.1628
100000	0.0949	0.0772	-0.1544	-0.1629

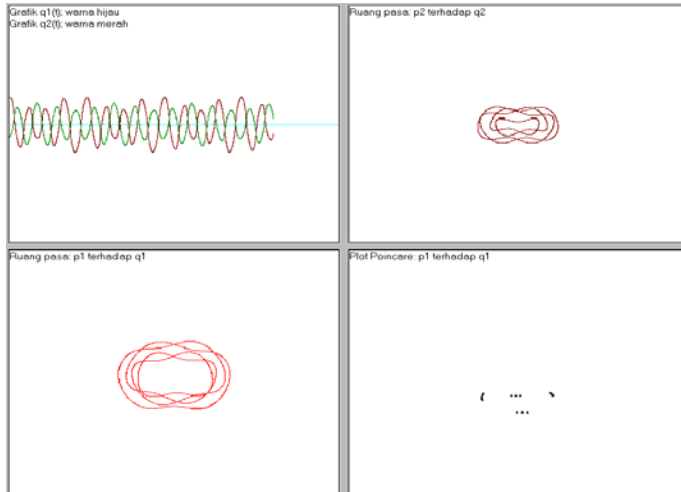
Dari Tabel 4.1. dapat dilihat bahwa ada dua eksponen Lyapunov yang mempunyai nilai hampir nol dan dua eksponen lainnya bernilai negatif. Dapat disimpulkan bahwa secara kuantitatif trajektori sistem dengan nilai awal tersebut di atas adalah periodik (kurva tertutup). Hal ini bersesuaian dengan apa yang disebutkan oleh Gould & Tobochnik^[7].

Eksponen Lyapunov juga divisualisasikan pada layar monitor, yang merupakan plot spektrum (λ_i) terhadap waktu iterasi.

Analisis Hasil Eksplorasi

Berikut ini dipaparkan hasil eksplorasi gejala kaotik yang dapat muncul dengan menerapkan kondisi awal tertentu.

Pada Gambar 4.2 ditunjukkan hasil simulasi untuk kondisi awal $q_1 = -0.65$, $q_2 = 1.4$, $p_1 = 0.6543$ dan $p_2 = 0.0$, kumpulan kondisi awal ini bersesuaian dengan Hamiltonian atau energi $E_0 \approx 3.2448$.



Gambar 4.2. Hasil eskekusi program untuk kondisi awa $q_1 = -0.65$, $q_2 = 1.4$, $p_1 = 0.6543$ dan $p_2 = 0.0$. Dari kiri atas searah jarum jam: (a) trajektori $q_i(t)$, (b dan d) plot ruang fasa p_i - q_i (c) plot Poincare p_1 - q_1 .

Pada Gambar 4.2, jika diamati trajektori $q_i(t)$ terlihat berjalan dengan pola yang periodik. Dapat diamati juga pada plot ruang fasa (b) dan (d), orbit trajektori berupa kurva tertutup quasiperiodik dengan lima periode gerak. Setelah sistem bergerak dengan lima kali periode lintasan, titik-titik pada ruang fasa akan lewat pada salah satu lintasan tersebut. Pengamatan dapat lebih dipertajam dengan memperhatikan plot Poincare (Gambar 4.2c), dari sini terlihat sejumlah titik terbatas, hal ini mengisaratkan sistem berperilaku periodik atau quasiperiodik.

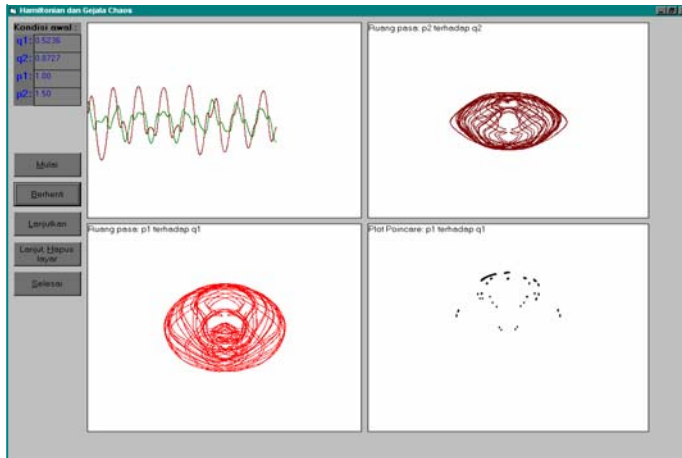
Untuk sistem dengan kondisi awal seperti di atas dilakukan juga perhitungan spektrum Lyapunovnya, yang diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 4.2 Hasil perhitungan spektrum Lyapunov, untuk kondisi awal sama seperti pada Gambar 4.2.

Iterasi ke	Lamda 1	Lamda 2	Lamda 3	Lamda 4
	0.2581	0.0081	0.0121	-0.2567
	0.2581	0.0080	0.0121	-0.2569
	0.2582	0.0080	0.0121	-0.2570
	0.2582	0.0079	0.0121	-0.2572
100000	0.2582	0.0079	0.0121	-0.2573

Berikut ini (Gambar 4.3) hasil simulasi dengan mengambil kondisi awal $q_1 = 0.5236$, $q_2 = 0.8727$, $p_1 = 1$ dan $p_2 = 1.5$, sistem dengan kumpulan kondisi awal seperti ini mempunyai Hamiltonian atau energi $E_0 \approx 3.1433$.

Dalam Gambar 4.3, secara kualitatif terlihat trajektori $q_i(t)$ berjalan tidak periodik. Dapat juga dilihat pada grafik berikutnya yaitu plot ruang fasa p_i-q_i , yang menunjukkan gejala kaotik.



Gambar 4.3 Hasil simulasi untuk kondisi awal:
 $q_1 = 0.5236$, $q_2 = 0.8727$, $p_1 = 1$ dan $p_2 = 1.5$
 Sistem yang menunjukkan gejala kaotis

Pengamatan lebih lanjut dapat dilakukan dengan memperhatikan plot Poincare, di sini nampak jelas titik-titik ruang fasa membentuk suatu pola tertentu yang indah. Analisis lebih lanjut dapat dilakukan dengan melihat hasil perhitungan spektrum Lyapunov untuk sistem ini :

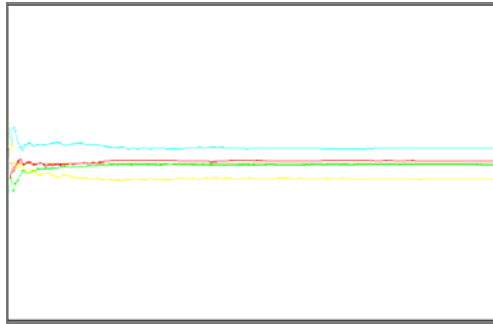
Tabel 4.3 Hasil perhitungan spektrum Laypunov

Iterasi ke	Lamda 1	Lamda 2	Lamda 3	Lamda 4
	0.3523	0.0559	-0.0048	-0.4039
	0.3524	0.0557	-0.0049	-0.4040
	0.3526	0.0556	-0.0049	-0.4041
	0.3527	0.0554	-0.0049	-0.4043
100000	0.3529	0.0553	-0.0049	-0.4044

Dari Tabel 4.3 terlihat adanya satu eksponen Lyapunov yang bertanda positif, dua eksponen berharga nol dan satu eksponen bernilai

negatif. Dari hasil ini dapat dikatakan bahwa sistem mempunyai *strange attractor* yang ditandai dengan adanya paling tidak satu eksponen (dalam hal ini λ_1) yang bernilai positif. Hadirnya suatu *strange attractor* menandai/mencirikan bahwa sistem berperilaku kaotik.

Gambar 4.4 berikut ini memperlihatkan spektrum Lyapunov yang diplot terhadap waktu iterasi. Dari Gambar ini dapat dilihat secara kualitatif keadaan spektrum Lyapunov terhadap berjalannya waktu iterasi.



Gambar 4.4 Grafik spektrum Lyapunov (dengan kondisi awal yang sama seperti disebutkan pada Gambar 4.3), yaitu plot spektrum terhadap waktu iterasi. Spektrum Lyapunov pertama: garis warna *light cyan*, spektrum kedua: garis warna *light red*, spektrum ketiga: garis warna *light green*, dan spektrum keempat: garis warna *light yellow*

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

Beberapa hal yang dapat disimpulkan dari kerja ini antara lain adalah: (1) Telah diturunkan persamaan gerak dari dobel pendulum dengan menggunakan fungsi Hamilton dan telah diperoleh juga persamaan gerak yang dilinierisasi. (2) Perangkat lunak yang dibuat telah dapat bekerja dengan baik. (3) Perangkat lunak ini dapat dipakai untuk mengeksplorasi sifat-sifat gerak dobel pendulum yang berperilaku periodik, quasiperiodik maupun yang menunjukkan gejala chaos, dengan menerapkan kondisi awal koordinat q_i dan momentum p_i ($i = 1,2$) tertentu. Observasi dilakukan dengan mengamati secara kualitatif trajektori, plot ruang fasa, dan plot Poincare, serta observasi secara kuantitatif dengan menghitung spektrum Lyapunovnya.

Disarankan untuk studi lebih lanjut dibuat perangkat lunak perhitungan transformasi wavelet (*wavelet transform*) untuk mengamati gejala chaos pada dobel pendulum. Juga disarankan untuk dibuat plot grafik variabel aksi dan energi kinetik terhadap Hamiltonian atau energi.

DAFTAR PUSTAKA

1. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, (Addison Wesley, New York, 1980).
2. S.N.Rasband, *Chaotic Dynamics of Nonlinear System*, (John Wiley & Sons, New York, 1997).
3. D.Gulick, *Encounters with Chaos*, (McGraw-Hill.Inc, New York, 1992).
4. H.D.I.Arbabel., M.I.Rabinovich., M.M.Sushchick, *Introduction to Nonlinear Dynamics for Physicists*, (Word Scientific, Singapore, 1993).
5. H.O.Peitgen., H.Jurgens., D.Saupe, *Chaos and Fractal New Frontiers of Science*, (Springer-Verlag, New York, 1992).
6. H.Gould & J.Tobochnik, *An Introduction to Computer Simulation Method Application to Physical System*, (Addisson-Wesley.Inc, New York, 1996).
7. J.Tobochnik & H.Gould, "*Quantifying Chaos*", *Computer in Physics* 3(6), 86(1989).
8. S.Setiawan, *Chaos gelora sains baru*, (Andi offset. Yogyakarta, 1991).
9. M.Tabor, *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics*, (Wiley, New York, 1989) di dalam Niraj Srivastava et al, "*Hamiltonian Chaos*", *Computer in physics* 4, 549, Sep/Oct 1989.
10. Niraj Srivastava., C.Kaufman & G.Muller, "*Hamiltonian Chaos II*", *Computer in physics* 5, 239, Mar/Apr 1991.
11. J.L.McCauley, *Classical Mechanics*, (Cambridge University press, United Kingdom, 1997).

- 12 W.H. Press, S.A.Teukolsky, W.T.Vetterling & B.P. Flannery, *Numerical Recipes in C* 2th edition, (Cambridge U.P., New York, 1996).
- 13 C.F.Gerald & P.O. Wheatley, *Applied Numerical Analysis* 5th edition, (Addition Wesley publishing company, New York, 1994).
- 14 H. Anton, *Aljabar linier Elementer* edisi kelima, alih bahasa oleh: P.Silaban & I.Y.Susila, Penerbit Erlangga, Jakarta, 1991.


```
' Program: Hamiltonian dan Gejala Chaos
' Tesis S2 Jurusan Fisika, KBK Fisika Komputasi
' Oleh: Fiber Monado; Nim: 20297006
' Pembimbing: Prof. Dr. B. Suprpto
' ITB Bandung, 2000
```

```
Option Explicit
```

```
Dim LbLayar, TgLayar, LbLayar3, TgLayar3,
    LbLayar4, TgLayar4 As Integer
```

```
Dim LbLayar2, TgLayar2
```

```
Dim q1 As Double, q2 As Double, p1 As Double, p2
    As Double
```

```
Dim dq1(4) As Double, dq2(4) As Double, dp1(4) As
    Double, dp2(4) As Double
```

```
Dim scum(4) As Double
```

```
Dim t As Double, t0 As Double, dt As Double
```

```
Dim ntot As Long, nout As Long, n0 As Long
```

```
' Pendeklerasian fungsi momentum yg dilinierisasi
```

```
Function dp2dot(t, q1p, q2p, p1p, p2p, dq1p,
    dq2p, dp1p, dp2p)
```

```
    dp2dot = (dp1p * Sin(q1p - q2p) * ((p2p / (1 +
        Sin(q1p - q2p) * Sin(q1p - q2p))) -
        (2 * p1p * Cos(q1p - q2p)) / (1 +
        Sin(q1p - q2p) * Sin(q1p - q2p)) ^ 2)
        + ((2 * p2p * (Cos(q1p - q2p)) ^ 2) /
        (1 + Sin(q1p - q2p) * Sin(q1p - q2p))
        ^ 2))) + (dp2p * Sin(q1p - q2p) *
        ((p1p / (1 + Sin(q1p - q2p) * Sin(q1p
        - q2p))) - ((4 * p2p * Cos(q1p - q2p))
        / (1 + Sin(q1p - q2p) * Sin(q1p -
        q2p)) ^ 2) + ((2 * p1p * (Cos(q1p -
        q2p)) ^ 2) / (1 + Sin(q1p - q2p) *
        Sin(q1p - q2p)) ^ 2))) + ((dq1p -
        dq2p) * p1p * p2p * Cos(q1p - q2p) *
        ((1 / (1 + Sin(q1p - q2p) * Sin(q1p -
        q2p))) - ((6 * (Sin(q1p - q2p)) ^ 2) /
        (1 + Sin(q1p - q2p) * Sin(q1p - q2p))
        ^ 2) + ((2 * (Cos(q1p - q2p)) ^ 2) /
        (1 + Sin(q1p - q2p) * Sin(q1p - q2p))
        ^ 2) - ((8 * (Cos(q1p - q2p)) ^ 2 *

```

```

(Sin(q1p - q2p)) ^ 2) / (1 + Sin(q1p -
q2p) * Sin(q1p - q2p)) ^ 3))) +
(((dq1p - dq2p) * p1p ^ 2) * (-1 *
((Cos(q1p - q2p)) ^ 2 / (1 + Sin(q1p -
q2p) * Sin(q1p - q2p)) ^ 2) +
((Sin(q1p - q2p)) ^ 2 / (1 + Sin(q1p -
q2p) * Sin(q1p - q2p)) ^ 2) + ((4 *
(Sin(q1p - q2p)) ^ 2 * (Cos(q1p -
q2p)) ^ 2) / (1 + Sin(q1p - q2p) *
Sin(q1p - q2p)) ^ 3))) + (((dq1p -
dq2p) * p2p ^ 2) * (-2 * ((Cos(q1p -
q2p)) ^ 2 / (1 + Sin(q1p - q2p) *
Sin(q1p - q2p)) ^ 2) + 2 * ((Sin(q1p -
q2p)) ^ 2 / (1 + Sin(q1p - q2p) *
Sin(q1p - q2p)) ^ 2) + ((8 * (Sin(q1p
- q2p)) ^ 2 * (Cos(q1p - q2p)) ^ 2) /
(1 + Sin(q1p - q2p) * Sin(q1p - q2p))
^ 3))) - (dq2p * Cos(q2p))

```

End Function

```

Function dpldot(t, q1p, q2p, p1p, p2p, dq1p,
dq2p, dp1p, dp2p)
dpldot = (dp1p * Sin(q1p - q2p) * (-1 * (p2p /
(1 + Sin(q1p - q2p) * Sin(q1p - q2p))))
+ ((2 * p1p * Cos(q1p - q2p)) / (1 +
Sin(q1p - q2p) * Sin(q1p - q2p)) ^ 2)
- ((2 * p2p * (Cos(q1p - q2p)) ^ 2) /
(1 + Sin(q1p - q2p) * Sin(q1p - q2p))
^ 2))) + (dp2p * Sin(q1p - q2p) * (-
(p1p / (1 + Sin(q1p - q2p) * Sin(q1p -
q2p))) + (2 * Cos(q1p - q2p) / (1 +
Sin(q1p - q2p) * Sin(q1p - q2p)) ^ 2)
- ((2 * p1p * (Cos(q1p - q2p)) ^ 2) /
(1 + Sin(q1p - q2p) * Sin(q1p - q2p))
^ 2))) + ((dq1p - dq2p) * p1p * p2p *
Cos(q1p - q2p) * ((-1 / (1 + Sin(q1p -
q2p) * Sin(q1p - q2p)))) + ((2 *
(Sin(q1p - q2p)) ^ 2) / (1 + Sin(q1p -
q2p) * Sin(q1p - q2p)) ^ 2) - ((2 *
(Cos(q1p - q2p)) ^ 2) / (1 + Sin(q1p -
q2p) * Sin(q1p - q2p)) ^ 2) + ((4 *

```

```

(Sin(q1p - q2p)) ^ 2) / (1 + Sin(q1p -
q2p) * Sin(q1p - q2p)) ^ 2) + ((8 *
((Sin(q1p - q2p)) ^ 2) * ((Cos(q1p -
q2p)) ^ 2)) / (1 + Sin(q1p - q2p) *
Sin(q1p - q2p)) ^ 3))) + ((dq1p -
dq2p) * (p1p ^ 2) * (((Cos(q1p - q2p))
^ 2 / (1 + Sin(q1p - q2p) * Sin(q1p -
q2p)) ^ 2) - ((Sin(q1p - q2p)) ^ 2 /
(1 + Sin(q1p - q2p) * Sin(q1p - q2p))
^ 2) - ((2 * (Sin(q1p - q2p)) ^ 2 *
(Cos(q1p - q2p)) ^ 2) / (1 + Sin(q1p -
q2p) * Sin(q1p - q2p)) ^ 3))) + ((dq1p
- dq2p) * p2p * (((2 * (Cos(q1p -
q2p)) ^ 2) / (1 + Sin(q1p - q2p) *
Sin(q1p - q2p)) ^ 2) - ((2 * (Sin(q1p
- q2p)) ^ 2) / (1 + Sin(q1p - q2p) *
Sin(q1p - q2p)) ^ 2) - ((8 * (Sin(q1p
- q2p)) ^ 2 * (Cos(q1p - q2p)) ^ 2) /
(1 + Sin(q1p - q2p) * Sin(q1p - q2p))
^ 3))) - (2 * dq1p * Cos(q1p))

```

End Function

```

Function dq2dot(t, q1p, q2p, p1p, p2p, dq1p,
dq2p, dp1p, dp2p)
dq2dot = (2 * dp2p / (1 + Sin(q1p - q2p) *
Sin(q1p - q2p))) - (dp1p * Cos(q1p -
q2p) / (1 + Sin(q1p - q2p) * Sin(q1p -
q2p))) + (((dq1p - dq2p) * 2 * p2p *
Sin(q1p - q2p) * Cos(q1p - q2p)) / (1
+ Sin(q1p - q2p) * Sin(q1p - q2p)) ^
2) * (-1 + Cos(q1p - q2p))) + (((dq1p
- dq2p) * p1p * Sin(q1p - q2p)) / (1 +
Sin(q1p - q2p) * Sin(q1p - q2p)))

```

End Function

```

Function dq1dot(t, q1p, q2p, p1p, p2p, dq1p,
dq2p, dp1p, dp2p)
dq1dot = (dp1p / (1 + Sin(q1p - q2p) * Sin(q1p
- q2p))) - (dp2p * Cos(q1p - q2p) / (1
+ Sin(q1p - q2p) * Sin(q1p - q2p))) +
(((dq1p - dq2p) * Sin(q1p - q2p) *

```

```

        Cos(q1p - q2p) / (1 + Sin(q1p - q2p) *
        Sin(q1p - q2p)) ^ 2) * (-2 * p1p + 2 *
        p2p * Cos(q1p - q2p))) + ((dq1p -
        dq2p) * p2p * Sin(q1p - q2p) / (1 +
        Sin(q1p - q2p) * Sin(q1p - q2p)))
End Function

```

```

Function p2dot(t, q1p, q2p, p1p, p2p)
    p2dot = (p1p * p2p * Sin(q1p - q2p) * (1 +
    Sin(q1p - q2p) * Sin(q1p - q2p)) + (p1p
    * p1p + 2 * p2p * p2p - 2 * p1p * p2p *
    Cos(q1p - q2p)) * (-Sin(q1p - q2p) *
    Cos(q1p - q2p))) / ((1 + Sin(q1p - q2p)
    * Sin(q1p - q2p)) ^ 2) - Sin(q2p)
End Function

```

```

' Pendeklarasian fungsi momentum
Function pldot(t, q1p, q2p, p1p, p2p)
    pldot = (-p1p * p2p * Sin(q1p - q2p) * (1 +
    Sin(q1p - q2p) * Sin(q1p - q2p)) + (p1p
    * p1p + 2 * p2p * p2p - 2 * p1p * p2p *
    Cos(q1p - q2p)) * (Sin(q1p - q2p) *
    Cos(q1p - q2p))) / ((1 + Sin(q1p - q2p)
    * Sin(q1p - q2p)) ^ 2) - (2 * Sin(q1p))
End Function

```

```

Function q2dot(t, q1p, q2p, p1p, p2p)
    q2dot = (2 * p2p - p1p * Cos(q1p - q2p)) / (1 +
    Sin(q1p - q2p) * Sin(q1p - q2p))
End Function

```

```

Function q1dot(t, q1p, q2p, p1p, p2p)
    q1dot = (p1p - p2p * Cos(q1p - q2p)) / (1 +
    Sin(q1p - q2p) * Sin(q1p - q2p))
End Function

```

```

Sub DataAwal()
    Dim i As Integer
    Dim N$
    'mendefinisikan lebar dan tinggi layar gambar
    LbLayar = Gambar1.ScaleWidth

```

```

TgLayar = Gambar1.ScaleHeight
LbLayar2 = Gambar2.ScaleWidth
TgLayar2 = Gambar2.ScaleHeight
LbLayar3 = Gambar3.ScaleWidth
TgLayar3 = Gambar3.ScaleHeight
LbLayar4 = Gambar4.ScaleWidth
TgLayar4 = Gambar4.ScaleHeight
'buat file untuk simpan data
'N$ = InputBox("Masukkan nama file untuk simpan
              data !")
'Open N$ For Output As #1
'Open "D:\Kiai\Thesis\Program1\dataLyal.txt"
      For Output As #1
'Nilai-nilai awal: q1, q2, p1, p2
q1 = Nilaiq1
q2 = Nilaiq2
p1 = plawal
p2 = p2awal 'InputBox("Masukkan kondisi awal
              p2 !", "Kondisi awal untuk p2")
'initialize unit difference vectors
For i = 1 To 4
    dq1(i) = 0#
    dq2(i) = 0#
    dp1(i) = 0#
    dp2(i) = 0#
    scum(i) = 0#
Next i
'vektor-vektor awal
(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)
dq1(1) = 1#
dq2(2) = 1#
dp1(3) = 1#
dp2(4) = 1#
'coba dt = 0.001
dt = 0.01 'InputBox("Masukkan step waktu (dt)")
'coba n0 = 10000 iterasi
'n0 = InputBox("Banyak iterasi transien (n0)")
't0 = n0 * dt
'kumpulkan data setelah waktu t0
'coba waktu cuplik 100000

```

```

'ntot = InputBox("Banyak iterasi spektrum
                 (ntot)")
'ntot = n0 + ntot
'nout = 1 'InputBox("Jumlah step output
                   (nout)")

t = 0#
End Sub

' Sub rutin memplot hasil perhitungan menjadi
tampilan grafik
Sub PlotGrafik()
'plot posisi terhadap waktu pada objek gambar1
Gambar1.PSet (t * 50, TgLayar / 2 - q1),
              QBColor(2)
Gambar1.PSet (t * 50, TgLayar / 2 - q2),
              QBColor(4)
'plot momentum terhadap koordinat pada objek
gambar 3 dan 4
Gambar3.PSet (LbLayar3 / 2 + q1, TgLayar3 / 2 -
              p1), QBColor(12)
Gambar2.PSet (LbLayar2 / 2 + q2, TgLayar2 / 2 -
              p2), QBColor(4)
If (q2 > -0.015 And q2 < 0.015) And p2 > 0 Then
    Gambar4.PSet (LbLayar4 / 2 + q1, TgLayar4 / 2
                  - p1), QBColor(0)
End If
End Sub

' Sub program perhitungan persamaan
' dengan metode Runge-Kuta orde-4
Sub RKuta()
Dim q1p As Double, q2p As Double, p1p As
    Double, p2p As Double
Dim dq1p(4) As Double, dq2p(4) As Double,
    dplp(4) As Double, dp2p(4) As Double
Dim kq1(4) As Double, kq2(4) As Double, kp1(4)
    As Double, kp2(4) As Double
Dim kdq1(4, 4) As Double, kdq2(4, 4) As Double
Dim kdp1(4, 4) As Double, kdp2(4, 4) As Double
Dim i As Integer, j As Integer
q1p = q1

```

```

q2p = q2
p1p = p1
p2p = p2
For i = 1 To 4
    dq1p(i) = dq1(i)
    dq2p(i) = dq2(i)
    dp1p(i) = dp1(i)
    dp2p(i) = dp2(i)
Next i
'j adalah indeks dari koefisien Runge-Kutta
For j = 1 To 4
    kq1(j) = dt * q1dot(t, q1p, q2p, p1p, p2p)
    kq2(j) = dt * q2dot(t, q1p, q2p, p1p, p2p)
    kp1(j) = dt * p1dot(t, q1p, q2p, p1p, p2p)
    kp2(j) = dt * p2dot(t, q1p, q2p, p1p, p2p)
    'vektor-vektor difference
    For i = 1 To 4
        kdq1(i, j) = dt * dq1dot(t, q1p, q2p, p1p,
            p2p, dq1p(i), dq2p(i), dp1p(i), dp2p(i))
        kdq2(i, j) = dt * dq2dot(t, q1p, q2p, p1p,
            p2p, dq1p(i), dq2p(i), dp1p(i), dp2p(i))
        kdp1(i, j) = dt * dp1dot(t, q1p, q2p, p1p,
            p2p, dq1p(i), dq2p(i), dp1p(i), dp2p(i))
        kdp2(i, j) = dt * dp2dot(t, q1p, q2p, p1p,
            p2p, dq1p(i), dq2p(i), dp1p(i), dp2p(i))
    Next i
    If (j <= 2) Then
        q1p = q1 + 0.5 * kq1(j)
        q2p = q2 + 0.5 * kq2(j)
        p1p = p1 + 0.5 * kp1(j)
        p2p = p2 + 0.5 * kp2(j)
        For i = 1 To 4
            dq1p(i) = dq1(i) + 0.5 * kdq1(i, j)
            dq2p(i) = dq2(i) + 0.5 * kdq2(i, j)
            dp1p(i) = dp1(i) + 0.5 * kdp1(i, j)
            dp2p(i) = dp2(i) + 0.5 * kdp2(i, j)
        Next i
    ElseIf (j = 3) Then
        q1p = q1 + kq1(j)
        q2p = q2 + kq2(j)
        p1p = p1 + kp1(j)

```

```

        p2p = p2 + kp2(j)
        For i = 1 To 4
            dq1p(i) = dq1(i) + kdq1(i, j)
            dq2p(i) = dq2(i) + kdq2(i, j)
            dp1p(i) = dp1(i) + kdp1(i, j)
            dp2p(i) = dp2(i) + kdp2(i, j)
        Next i
    End If
Next j
q1 = q1 + (kq1(1) + 2 * kq1(2) + 2 * kq1(3) +
kq1(4)) / 6#
q2 = q2 + (kq2(1) + 2 * kq2(2) + 2 * kq2(3) +
kq2(4)) / 6#
p1 = p1 + (kp1(1) + 2 * kp1(2) + 2 * kp1(3) +
kp1(4)) / 6#
p2 = p2 + (kp2(1) + 2 * kp2(2) + 2 * kp2(3) +
kp2(4)) / 6#
For i = 1 To 4
    dq1(i) = dq1(i) + (kdq1(i, 1) + 2 * kdq1(i,
2) + 2 * kdq1(i, 3) + kdq1(i, 4)) / 6#
    dq2(i) = dq2(i) + (kdq2(i, 1) + 2 * kdq2(i,
2) + 2 * kdq2(i, 3) + kdq2(i, 4)) / 6#
    dp1(i) = dp1(i) + (kdp1(i, 1) + 2 * kdp1(i,
2) + 2 * kdp1(i, 3) + kdp1(i, 4)) / 6#
    dp2(i) = dp2(i) + (kdp2(i, 1) + 2 * kdp2(i,
2) + 2 * kdp2(i, 3) + kdp2(i, 4)) / 6#
Next i
End Sub

Sub Sumbul()
    Gambar1.Print "Grafik q1(t); warna hijau"
    Gambar1.Print "Grafik q2(t); warna merah"
    Gambar1.Line (10, TgLayar / 2)-(LbLayar - 10),
        TgLayar / 2), QBColor(11)
End Sub

Sub Sumbu2()
    Gambar2.Print "Ruang pasa: p2 terhadap q2"
End Sub

```



```

Sub Sumbu3()
'Dim x0, y0 As Integer
'x0 = LbLayar3 / 2
'y0 = TgLayar3 / 2
'Gambar3.Line (x0, 0)-(x0, TgLayar3),
    QBColor(11)
'Gambar3.Line (0, y0)-(LbLayar3, y0),
    QBColor(11)
Gambar3.Print "Ruang pasa: p1 terhadap q1"
End Sub

Sub Sumbu4()
Gambar4.Print "Plot Poincare: p1 terhadap q1"
End Sub

Sub update()
Dim dot12 As Double, dot13 As Double, dot14 As
    Double
Dim dot23 As Double, dot24 As Double, dot34 As
    Double, norm(4) As Double
Dim i As Long, j As Integer
'For i = 1 To ntot
    Call RKuta
    t = t + dt
    'normalisasi vektor difference pertama
    norm(1) = Sqr(dq1(1) * dq1(1) + dq2(1) *
        dq2(1) + dp1(1) * dp1(1) + dp2(1) *
        dp2(1))
    'hitung vektor ternormalisasi
    dq1(1) = dq1(1) / norm(1)
    dq2(1) = dq2(1) / norm(1)
    dp1(1) = dp1(1) / norm(1)
    dp2(1) = dp2(1) / norm(1)
    'penerapan prosedur Gram-Schmidt
    dot12 = dq1(1) * dq1(2) + dq2(1) * dq2(2) +
        dp1(1) * dp1(2) + dp2(1) * dp2(2)
    dq1(2) = dq1(2) - dot12 * dq1(1)
    dq2(2) = dq2(2) - dot12 * dq2(1)
    dp1(2) = dp1(2) - dot12 * dp1(1)
    dp2(2) = dp2(2) - dot12 * dp2(1)
    norm(2) = Sqr(dq1(2) * dq1(2) + dq2(2) *

```

```

        dq2(2) + dp1(2) * dp1(2) + dp2(2) *
        dp2(2))
dq1(2) = dq1(2) / norm(2)
dq2(2) = dq2(2) / norm(2)
dp1(2) = dp1(2) / norm(2)
dp2(2) = dp2(2) / norm(2)
dot13 = dq1(1) * dq1(3) + dq2(1) * dq2(3) +
        dp1(1) * dp1(3) + dp2(1) * dp2(3)
dot23 = dq1(2) * dq1(3) + dq2(2) * dq2(3) +
        dp1(2) * dp1(3) + dp2(2) * dp2(3)
dq1(3) = dq1(3) - dot13 * dq1(1) - dot23 *
        dq1(2)
dq2(3) = dq2(3) - dot13 * dq2(1) - dot23 *
        dq2(2)
dp1(3) = dp1(3) - dot13 * dp1(1) - dot23 *
        dp1(2)
dp2(3) = dp2(3) - dot13 * dp2(1) - dot23 *
        dp2(2)
norm(3) = Sqr(dq1(3) * dq1(3) + dq2(3) *
        dq2(3) + dp1(3) * dp1(3) + dp2(3) *
        dp2(3))
dq1(3) = dq1(3) / norm(3)
dq2(3) = dq2(3) / norm(3)
dp1(3) = dp1(3) / norm(3)
dp2(3) = dp2(3) / norm(3)
dot14 = dq1(1) * dq1(4) + dq2(1) * dq2(4) +
        dp1(1) * dp1(4) + dp2(1) * dp2(4)
dot24 = dq1(2) * dq1(4) + dq2(2) * dq2(4) +
        dp1(2) * dp1(4) + dp2(2) * dp2(4)
dot34 = dq1(3) * dq1(4) + dq2(3) * dq2(4) +
        dp1(3) * dp1(4) + dp2(3) * dp2(4)
dq1(4) = dq1(4) - dot14 * dq1(1) - dot24 *
        dq1(2) - dot34 * dq1(3)
dq2(4) = dq2(4) - dot14 * dq2(1) - dot24 *
        dq2(2) - dot34 * dq2(3)
dp1(4) = dp1(4) - dot14 * dp1(1) - dot24 *
        dp1(2) - dot34 * dp1(3)
dp2(4) = dp2(4) - dot14 * dp2(1) - dot24 *
        dp2(2) - dot34 * dp2(3)

```



```

Private Sub Form_Load()
    Timer1.Enabled = False
    Form2.Show      'form2 yang aktif
    Form1.Hide      'form1 tidak aktif
End Sub

Private Sub LanjutHapus_Click()
    'Hapus layar diobjek Gambar1-4
    'Gambar1.Cls
    Gambar3.Cls
    Gambar2.Cls
    'Panggil sub sumbu
    Sumbu3
    Sumbu2
    'aktifkan kontrol pewaktu
    Timer1.Enabled = True
End Sub

Private Sub Lanjutkan_Click()
    Timer1.Enabled = True
End Sub

Private Sub Mulai_Click()
    DataAwal 'panggil sub DataAwal
    'panggil subrutin sumbu
    Sumbu1
    Sumbu2
    Sumbu3
    Sumbu4
    'aktifkan kontrol pewaktu
    Timer1.Enabled = True
    Timer2.Enabled = True
End Sub

Private Sub Selesai_Click()
    Close #1 'tutup semua file yang aktif
    End
End Sub

```

```
Private Sub Timer1_Timer()  
    Call update  
End Sub
```

```
Private Sub Timer2_Timer()  
    updateGrafik  
End Sub
```