

**KAJIAN KRITERIA *ROUTH-HURWITZ* UNTUK MENENTUKAN  
KESTABILAN TITIK KESETIMBANGAN PADA MODEL SIR  
(*SUSCPIBLE-INFECTED-RECOVERED*) UNTUK PENYAKIT  
TUBERKULOSIS**

**Skripsi**

**Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh  
Gelar Sarjana Matematika**



**Oleh :**

**ABEL FAJAR LUMBANTORUAN**

**NIM : 08011381621065**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS SRIWIJAYA**

**2020**

LEMBAR PENGESAHAN

KAJIAN KRITERIA *ROUTH-HURWITZ* MENENTUKAN KESTABILAN  
TITIK KESETIMBANGAN PADA MODEL SIR (*SUSCIPBLE-  
INFECTED-RECOVERED*) UNTUK PENYAKIT TUBERKULOSIS

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat Memperoleh Gelar  
Sarjana Matematika

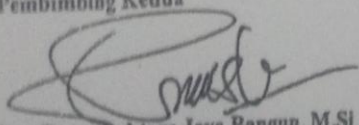
Oleh

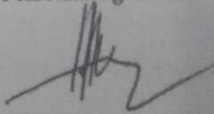
ABEL FAJAR LUMBANTORUAN  
NIM 08011381621065

Indralaya, September 2020

Pembimbing Utama

Pembimbing Kedua

  
Drs. Putra Bahtera Jaya Bangun, M.Si  
NIP. 19590904 198503 1 002

  
Drs. Endro Setyo Cahyono, M.Si  
NIP. 19640926 199002 1 002

Mengetahui  
Ketua Jurusan Matematika  
  
Drs. Sugandi Yuhdin, M.M  
NIP. 19580727 198603 1 003

## **LEMBAR PERSEMBAHAN**

*“Siapa yang mengabaikan didikan membuang dirinya sendiri, tetapi siapa yang mendengarkan teguran, beroleh akal budi”*

*(Amsal 15:32)*

***“YOU’LL NEVER WALK ALONE”***

**Skripsi ini kupersembahkan kepada:**

- 1. Tuhan Yang Maha Esa**
- 2. Orangtua**
- 3. Saudaraku**
- 4. Keluarga Besar**
- 5. Semua Guru dan Dosen**
- 6. Semua Sahabat**
- 7. Almamater**

## KATA PENGANTAR

Puji syukur yang saya panjatkan kepada Tuhan yang maha esa karena Berkat dan pertolongannya saya bisa menyelesaikan skripsi yang berjudul **Kajian Kriteria Routh-Hurwitz Untuk Menentukan Kestabilan Titik Kesetimbangan Pada Model SIR (Susceptible-Infected-Recovered) Untuk Penyakit Tuberkulosis** dapat berjalan dengan baik dan selesai pada waktunya. Skripsi ini sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Matematika di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sriwijaya. Penulis menyadari bahwa pembuatan skripsi ini bukanlah akhir dari proses belajar, melainkan langkah untuk proses belajar selanjutnya.

Terselesainya skripsi ini juga tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak, baik secara langsung maupun tidak langsung. Untuk itu penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang tak terhingga kepada :

1. **Tuhan Yang Maha Esa** karena berkat dan pertolonganmu lah saya bisa mengerjakan skripsi ini hingga selesai dan saya bisa melangkah sampai sejauh ini
2. Orang tuaku, Alm Bapak **Manogi Lumbantoruan** Ibu **Rosdiana Sinurat** yang telah berkerja keras dan penuh kesabaran dalam membimbingku danm mengurusku sampai pada saat ini.
3. Saudariku **Jimmy Lumbantoruan, Dendi Lumbantoruan, Debora Lumbantoruan, Kornelius Lumbantoruan** atas doa dan dukungan serta kasih sayang, selama ini.

4. Bapak **Drs. Sugandi Yahdin, M.M** selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
5. Ibu **Des Alwine Zayanti, M.Si** selaku Sekretaris Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
6. Bapak **Drs. Endro Setyo Cahyono, M.Si** selaku Pembimbing Utama yang telah bersedia meluangkan banyak waktu, pikiran, tenaga dan memberikan ide-ide cemerlang serta arahan, nasehat dan motivasi yang sangat bermanfaat kepada penulis selama menyelesaikan skripsi ini.
7. Bapak **Drs. Putra Bahtera Jaya Bangun M.Si** selaku Dosen Pembimbing Kedua yang telah bersedia meluangkan waktu di tengah kesibukannya untuk membimbing dan mengoreksi pengerjaan skripsi ini.
8. Ibu **Dr. Fitri Maya Puspita, M.Si** selaku dosen Pembimbing Akademik yang telah sangat baik membimbing dan mengarahkan urusan akademik kepada penulis di setiap semester selama belajar di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya.
9. Bapak **Dr. Bambang Suprihatin, M.Si**, Ibu **Novi Rustiana Dewi, M.Si**, dan Ibu **Evi Yuliza, M.Si** selaku Dosen Pembahas Skripsi yang telah bersedia meluangkan waktu dalam memberikan tanggapan, kritik dan saran yang bermanfaat dalam perbaikan dan penyelesaian skripsi ini.
10. **Seluruh Dosen** di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam yang telah memberikan ilmu yang bermanfaat, nasehat serta bimbingan kepada penulis selama masa perkuliahan.

11. Pak **Irwan** dan Ibu **Hamida** selaku pegawai Tata Usaha Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam yang telah banyak membantu dalam proses administrasi.
12. **Keluarga Besarku** terima kasih untuk segala dukungan dan semangat yang telah diberikan serta do'a-do'a baiknya.
13. Teman-Teman seperjuangan **Jekta, Agung, Ari, Eko, Indah, Naura, Giskha, Anisa, Annisa Kartikasari, Rahmat, Sisca, Ade, Sandra, Anita, Gina, Rendi, Danial, Indah, Rahma, Mutiati, Syintia, Hariani** dan seluruh angkatan 2016 lainnya atas waktu yang kita lewati bersama disertai kerjasama dan kebahagiaan. serta kakak tingkat **2012,2013,2014,2015** dan Adik tingkat **2017,2018,2019**
14. Sahabat Seperjuangan dan Teman-teman seperbimbingan **Doni Saputra, Ogi Dwi Saputra** dan **Anton** atas saling memberi ide kritik dan saran selama kuliah dan canda tawa serta pengerjaan yang kita kerjakan bersama.
15. Sahabat Pemuda Gereja POUK **Samuel Putra, Josua Wahyudi, Alberto Matius dan Willy Asri** atas doa dan dukungan yang telah diberikan dalam keseharian terutama dalam pengerjaan skripsi
16. Teman sepulang pergi **Devi Maharani, Muhammad Ridwanllah, Ardan Sitepu, Ilham Syaputra dan Febrianto** atas canda tawa serta dukungan untuk menyelesaikan skripsi ini.
17. Semua pihak yang tidak dapat saya sebutkan satu persatu yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini. Terima Kasih atas

semua dukungan. Semoga Tuhan selalu Memberkati kalian dengan  
Berkat dan Kelimpahannya

Penulis menyadari penulisan skripsi ini masih jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, saran yang bermanfaat untuk penulisan skripsi ini sangat diharapkan. Semoga skripsi ini dapat berguna dalam menambah pengetahuan dan bermanfaat bagi mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sriwijaya dan semua pihak yang memerlukan.

Indralaya, Agustus 2020

Abel Fajar Lumbantoruan

**KAJIAN KRITERIA *ROUTH-HURWITZ* UNTUK MENENTUKAN  
KESTABILAN TITIK KESETIMBANGAN PADA MODEL SIR  
(*SUSCPIBLE-INFECTED-RECOVERED*) UNTUK PENYAKIT  
TUBERKLOSIS**

**Oleh:**

**Abel Fajar Lumbantoruan**

**08011381621065**

**ABSTRAK**

Salah satu permasalahan di kehidupan sehari-hari adalah mengenai penyebaran suatu penyakit. Model matematika SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*) dapat digunakan untuk mengetahui suatu penyakit menular, seperti penyakit Tuberkulosis (TB). TB merupakan penyakit yang bersifat menular yang disebabkan oleh infeksi bakteri dengan nama yang sama, yaitu *Mycobacterium Tuberculosis*. Dalam penelitian ini digunakan model yang membagi menjadi tiga substansi yaitu kelompok yang rentan kena penyakit (S), kelompok yang terinfeksi (I), dan kelompok yang sudah dinyatakan sembuh dari penyakit (R). Dan di dalam model ini terbentuk suatu persamaan diferensial yang bertujuan untuk mencari titik kesetimbangan dengan kriteria *Routh-Hurwitz*. Kriteria *Routh-Hurwitz* berasal dari penurunan yang diuji oleh Euclide, Teorema Sturm dan index Cauchy. Pada penggunaan matriks Hurwitz akan dikatakan stabil jika dan hanya jika determinan dari kofaktor matriks Hurwitz positif. Akan dikatakan stabil jika dan hanya jika setiap koefisiennya positif dan akar-akar dari polinom tersebut negatif.

Kata kunci : *Routh-Hurwitz*, SIR, Tuberkulosis, Kestabilan



**REVIEW OF THE *ROUTH-HURWITZ* CRITERIA FOR DETERMINING  
EQUILIBRIUM POINT STABILITY ON THE SIR(*SUSCIPBLE-  
INFECTED-RECOVERED*) MODEL FOR TUBERCULOSIS DISEASE**

**By:**

**Abel Fajar Lumbantoruan**

**08011381621065**

**ABSTRACT**

One of the problems in daily life is the spread of a disease. The SIR (Susceptible-Infected-Recovered) mathematical model can be used to identify an infectious disease, such as tuberculosis (TB). TB is an infectious disease caused by a bacterial infection of the same name, Mycobacterium Tuberculosis. In this research, a model which is divided into three substances is used, namely the susceptible group (S), the infected group (I), and the group that has been Recovered (R). And in this model a differential equation is formed which aims to find the equilibrium point with the Routh-Hurwitz criteria. The Routh-Hurwitz criterion comes from the decline tested by Euclide, the Sturm's Theorem and the Cauchy index if and only if all three are met. In the use of the Hurwitz matrix it will be said to be stable if and only if the determinant of the Hurwitz matrix kofatkor is positive. It will be said to be stable if and only if each coefficient is positive and the roots of the polynomial are negative. Based on the simulation, it can be said that the spread of disease-free and endemic is categorized stable according to the Routh-Hurwitz criteria.

Keywords: Routh-Hurwitz, SIR, Tuberculosis, Stability

## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL .....</b>	<b>i</b>
<b>LEMBAR PENGESAHAN .....</b>	<b>ii</b>
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN .....</b>	<b>iii</b>
<b>KATA PENGANTAR .....</b>	<b>iv</b>
<b>ABSTRAK .....</b>	<b>vii</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>viii</b>
<b>DAFTAR ISI .....</b>	<b>ix</b>
<b>DAFTAR TABEL .....</b>	<b>xii</b>
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Perumusan Masalah .....	3
1.3 Pembatasan Masalah .....	3
1.4 Tujuan Penelitian .....	3
1.5 Manfaat Penelitian.....	3
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b>	
2.1 Penyakit Tuberkulosis (TB) .....	4
2.2 Persamaan Diferensial.....	5
2.2.1 Persamaan Diferensial Linier.....	5
2.2.2 Persamaan Diferensial Non Linier .....	6
2.3 Linierisasi Persamaan Diferensial Non Linier .....	6
2.4 Kriteria <i>Routh-Hurwitz</i> .....	8

2.4.1	Polinomial <i>Routh-Hurwitz</i> .....	8
2.4.2	Algoritma Euclide .....	9
2.4.3	Teorema Sturm.....	10
2.4.4	Index Cauchy .....	10
2.5	Model SIR.....	12
2.6	Bilangan Reproduksi Dasar ( $R_0$ ) .....	13
2.7	Titik Keseimbangan.....	13
2.8	Kestabilan Titik Keseimbangan.....	14
2.9	Matriks <i>Next Generation</i> .....	15

### **BAB III METODOLOGI PENELITIAN**

3.1.	Tempat .....	17
3.2.	Waktu .....	17
3.3.	Metode Penelitian .....	17

### **BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN**

4.1.	Polinomial <i>Routh-Hurwitz</i> .....	19
4.2.	Tes <i>Routh</i> .....	19
4.2.1	Algoritma Euclide. ....	20
4.2.2	Teorema Sturm .....	21
4.2.3	Index Cauchy .....	22
4.3.	Matriks <i>Hurwitz</i> .....	25
4.4.	Simulasi Kriteria <i>Routh-Hurwitz</i> .....	26
4.4.1	Menggunakan Polinom Berorde Sederhana.....	26
4.4.2	Menggunakan Polinom Berorde-n.....	27
4.5.	Penggunaan Kriteria <i>Routh-Hurwitz</i> Pada Penyakit TB .....	28

4.5.1 Asumsi Dan Bentuk Model SIR Pada Penyakit TB. ....	28
4.5.2 Analisis Titik Keseimbangan.....	30
4.5.3 Analisis Kestabilan. ....	33
4.6. Simulasi Model SIR Pada Penyakit TB .....	38
4.6.1 Simulasi Untuk Bebas Penyakit.....	39
4.6.2 Simulasi Untuk Endemik .....	40
<b>BAB V KESIMPULAN DAN SARAN</b>	
5.1. Kesimpulan .....	43
5.2. Saran .....	43
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>44</b>

## DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 4.1 <i>Array Routh</i> Untuk Bebas Penyakit.....	36
Tabel 4.2 <i>Array Routh</i> Untuk Endemik .....	38
Tabel 4.3     Nilai Setiap Parameter.....	39
Tabel 4.4 <i>Array Routh</i> Simulasi Untuk Bebas Penyakit .....	40
Tabel 4.5 <i>Array Routh</i> Simulasi Untuk Endemik.....	41

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Ilmu pengetahuan dan teknologi semakin berkembang serta tentunya mengubah lingkungan hidup yang dapat mempengaruhi perubahan pola penyebaran penyakit yang berbahaya bagi masyarakat. Salah satu permasalahan di kehidupan sehari-hari adalah mengenai penyebaran suatu penyakit. Pada tahun 1927, W. O. Kermack dan A. G. Mckendrick memperkenalkan sebuah model penyebaran penyakit. Model matematika yang dimaksud adalah model epidemik SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*) klasik. Secara umum, model epidemik SIR klasik dapat disajikan sebagai system persamaan diferensial autonomous. Salah satu contoh penyakit yang dapat menular adalah Tuberkulosis (TB), campak, cacar air dan lainnya.

TB merupakan penyakit yang bersifat menular yang disebabkan oleh infeksi bakteri dengan nama yang sama, yaitu *Mycobacterium Tuberculosis*. Bakteri ini menyebar di udara melalui percikan ludah penderita, misalnya saat berbicara, batuk, atau bersin. Penyakit ini sangat berbahaya baik di dunia termasuk Indonesia. Oleh karena itu harus ditangani dengan penanganan yang cepat dan tepat (Hermansyah, 2017).

Untuk mengetahui apakah penyakit itu menular dapat menjadi endemik atau tidak, maka dikenalkan beberapa model. Salah satunya ialah model SIR. Model SIR adalah model yang dirancang oleh Kermack dan Mckendrick (1927). Model ini membagi menjadi 3 subtansi yaitu kelompok yang rentan kena penyakit

(S), kelompok yang terinfeksi (I), dan kelompok yang sudah dinyatakan sembuh dari penyakit (R). Dan di dalam model ini terbentuk suatu persamaan diferensial yang bertujuan untuk mencari titik kesetimbangan. Namun dapat dilihat bahwa reproduksi dasar dan kestabilannya sangat mempengaruhi penyebaran penyakitnya. Akan tetapi, penggunaan model SIR hanya berlaku jika dan hanya jika adanya kelahiran dan kematian alami yang dapat mempengaruhi penyebaran penyakit dalam suatu populasi, dan adanya kemungkinan menular ke populasi lainnya. Untuk menyelesaikannya harus ada kestabilan titik keseimbangannya untuk menunjukkan stabilitas perkembangan penyakit tersebut karena kestabilan merupakan hal yang terpenting dalam persamaan linier. Namun, untuk menentukan kestabilan tersebut maka harus memerlukan akar-akar dari persamaan karakteristik. Akar-akar tersebut dicari dengan menggunakan pemfaktoran. Akan tetapi apabila persamaan karakteristik nya memiliki orde  $n$  yang besar sehingga sulit untuk mencari akar-akar dari persamaan karakteristiknya sehingga membutuhkan suatu metode untuk membantu mencari akar-akar karakteristiknya. Metode yang digunakan tersebut adalah kriteria *Routh-Hurwitz*. Kriteria *Routh-Hurwitz* merupakan metode yang menunjukkan apakah suatu akar-akar yang tidak stabil dalam polinom berorde- $n$  ( $n$  berhingga) tanpa menghitung dan kriteria tersebut akan digunakan untuk menentukan fungsi tersebut akan kestabilannya atau tidak. Kriteria ini juga bisa digunakan untuk mencari akar-akar karakteristik jika suatu polinom sangat sulit untuk mencari nilai akar-akar nya. Dalam tulisan ini, akan dikaji lebih dalam untuk mengetahui kriteria *Routh-Hurwitz*. Kriteria ini terbentuk berdasarkan adanya polinomial *Routh* yang memenuhi suatu syarat

cukup dan syarat perlu sehingga memenuhi syarat untuk menentukan akar-akar karakteristik dari polinom berorde- $n$  yang besar sehingga sulit untuk dihitung (Clark, 1996).

### **1.2. Perumusan Masalah**

1. Apa yang melatar belakangi terbentuknya kriteria Routh-Hurwitz.
2. Bagaimana penerapan riteria Routh-Hurwitz pada penyakit TB.

### **1.3 Pembatasan Masalah**

1. Diasumsikan jika individu masuk ke kelas terinfeksi maka tidak akan kembali ke rentan.

### **1.4 Tujuan Penelitian**

1. Pada penelitian ini akan mengkaji dan memberi contoh teknis.
2. Menguji sifat-sifat kestabilan di titik kesetimbangan dengan metode kriteria Routh Huwritz pada model SIR untuk penyakit TB.

### **1.5 Manfaat Penelitian**

1. Menjadikan karya tulis ini sebagai refrensi penelitian.
2. Mengetahui penerapan kriteria tersebut dibidang kesehatan



## Daftar Pustaka

- Andalas, U. (2019) 'Teorema pembagian pada ring polinomial', VIII(1), pp. 249–254.
- Amin, K., Oktafianto, K. and Arifin, A. Z. (2018) 'Model Dinamik Penyakit *Tuberculosis* Di Kabupaten Tuban', (September), pp. 0–3.
- Bano, E. N. (2018) 'Analisis Kestabilan Titik Tetap Model Matematika Penyebaran Penyakit DBD Tipe SEIR', 1(2622), pp. 10–12.
- Cahyaningtias, S. *et al.* (2016) 'Aplikasi Kriteria *Routh-Hurwitz* Pada Kestabilan Model Interaksi Padi-Hama', 66, pp. 1–5.
- Chi-Tsong, C (1970). *Linear system Theory and Design*. Pages 394-411
- Clark, R. N. (1996) 'Routh's Stability Criterion', in *Control System Dynamics*. Cambridge University Press, pp. 472–477. doi: 10.1017/CBO9781139163873.020.
- Darlina, L. (2007) 'Kestabilan titik equilibrium model sir (susceptible, infected, recovered) penyakit fatal dengan migrasi 1,2'.
- Dafik. (1999). *Persamaan Differensial Biasa*. Program Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember. Jember
- Gemignani, L. (2000) 'Computing a Hurwitz factorization of a polynomial', 126, pp. 369–380.
- Haberman R, Campbel S(2008'Introduction to differential equations with dynamical systems', in *Choice Reviews Online*, pp. 46-2139-46–2139. doi: 10.5860/choice.46-2139.
- Hermansyah, H. (2017) 'Gambaran Penderita *Tuberculosis* Parudi Wilayah Kerja Puskesmas Gandus Kota Palembang Tahun 2015', pp. 63–70.
- Hurwitz, A (1895) Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt. Hurwitz Centerary Conference centro Stefano Franscini diterbitkan tahun 1995.

- Jones, J. H. (2011) 'Notes On  $R_0$ ', in *Building*, pp. 1–19.
- Kemenkes (2019) <http://p2p.kemkes.go.id/htbs-2019-saatnya-indonesia-bebastbc/>(online). Diakses pada tanggal 25-February-2020 jam 15 :43
- Lickteig, T. (2001) 'Sylvester – Habicht Sequences and Fast Cauchy Index Computation', pp. 315–341. doi: 10.1006/jSCO.2000.0427.
- López Rodríguez, M. (1979) 'A Sturm comparison theorem for first order systems of differential equations.', *Anales de la Universidad de Murcia. Ciencias*.
- Maludin, H. A., Faruk, A., & Cahyono, E. S. (2016). Analisa Kestabilan Model Epidemik Sir Untuk Penyakit Tuberkulosis. *Prosiding SEMIRATA Bidang MIPA*, 18(3), 1-3.
- Matematika, P. S., Universitas, F. and Mangkurat, L. (2012) 'PS Matematika FMIPA Universitas Lambung Mangkurat Jl. Jend. A. Yani km 35, 8 Banjarbaru', 6(1), pp. 9–16.
- Qomariyah, N. and Wibowo, S. (2017) 'Masalah Sturm-Liouville Singular Fraksional', 1(1), pp. 541–546.
- Ratianingsih, R. (2017) 'Analisis Kestabilan Model Matematika Pada Penyebaran Kanker Serviks Menggunakan Kriteria *Routh-Hurwitz*', 14(1), pp. 120–127.
- Sari, I. and Tasman, H. (1927) 'Model Epidemik SIR Untuk Penyakit Yang Menular Secara Horizontal Dan Vertikal', pp. 757–766.
- Unita, H. and Haryoto, V. (2001) 'Tuberkulosis Paru di Palembang , Sumatera Selatan Pulmonary Tuberculosis in Palembang , South Sumatera', (72).
- Yahdin, S., Rosita, W(1999). Menentukan faktor persekutian terbesar (FPB) siatu ring polinom  $B_n[x]$  dengan menggunakan algoritma Euclide. *Jurnal Penelitian Sains* : hal 11-17