

**ANALISIS HUBUNGAN KLASIFIKASI RANTAI MARKOV
DENGAN SIFAT – SIFAT GRAF**

SKRIPSI

**Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
Sarjana Sains Bidang Studi Matematika**



Oleh :

**HALIZA SUCI RACHMADINI
NIM. 08011381419056**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SRIWIJAYA
JULI 201**

Lembar Pengesahan

**ANALISIS HUBUNGAN KLASIFIKASI RANTAI MARKOV
DENGAN SIFAT – SIFAT GRAF**

SKRIPSI

**Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
Sarjana Sains Bidang Studi Matematika**

Oleh

**HALIZA SUCI RACHMADINI
NIM. 08011381419056**

**Indralaya, Juli 2018
Pembimbing Utama**

Pembimbing Kedua

**Dr. Herlina Hanum, M.Si
NIP. 19650108 199003 2 007**

**Dr. Bambang Suprihatin, M.Si
NIP. 19710126 199412 1 001**



LEMBAR PERSEMBAHAN

**“Sesungguhnya bersama kesulitan itu ada kemudahan.
Karena itu apabila kau telah selesai (dari suatu urusan),
tetaplah bekerja keras (untuk urusan yang lain),
Dan hanya kepada Tuhan-mu lah kau berharap”
(QS.Al-Insyirah : 6-8)**

Skripsi ini kupersembahkan kepada:

- 1. Allah SWT**
- 2. Kedua Orangtuaku**
- 3. Keluargaku**
- 4. Semua Dosen dan Guruku**
- 5. Sahabat - Sahabatku**
- 6. Almamater**

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Puji syukur kehadirat Allah SWT, karena atas rahmat, karunia serta hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “**Analisis Hubungan Klasifikasi Rantai Markov dengan Sifat – Sifat Graf**”. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW beserta keluarga, sahabat dan seluruh pengikutnya hingga akhir zaman. Skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains bidang studi Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sriwijaya.

Dengan penuh rasa hormat, cinta, kasih sayang, serta kerendahan hati, penulis mempersembahkan skripsi ini khusus untuk kedua orang tua tercinta Bapak **Budiono** dan Ibu **Suryani Wahyuningsih** yang telah merawat dan mendidik penulis dengan penuh rasa cinta dan kasih sayang serta dukungan yang sangat berharga berupa motivasi keluarga, do'a, perhatian, semangat, serta material untuk mendukung penulis selama ini. Penulisan skripsi ini tidak lepas dari bimbingan dan bantuan berbagai pihak, maka pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan terimakasih kepada:

1. Bapak **Drs. Sugandi Yahdin, M.M**, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sriwijaya.
2. Ibu **Des Alwine Zayanti, M.Si** selaku Sekretaris Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sriwijaya.

3. Ibu **Sisca Octarina, M.Sc** selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah banyak sekali memberikan arahan dan bimbingan kepada penulis selama perkuliahan.
4. Bapak **Dr. Bambang Suprihatin, M.Si** dan Ibu **Dr. Herlina Hanum, M.Si**, selaku pembimbing yang telah bersedia meluangkan waktu dengan penuh kesabaran dalam memberikan banyak ide pemikiran, nasehat, bimbingan, serta kritik dan saran yang sangat berguna bagi penulis selama pengerjaan skripsi sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.
5. Ibu **Novi Rustiana Dewi, M.Si**, Ibu **Indrawati, M.Si**, Ibu **Anita Desiani, M.Kom**, dan Ibu **Dr. Yulia Resti, M.Si**, selaku Dosen Pembahas yang telah bersedia meluangkan waktu dalam memberikan tanggapan, serta kritik dan saran yang membangun dalam perbaikan skripsi ini.
6. **Seluruh Dosen di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam** yang telah memberikan ilmu yang bermanfaat, nasehat serta bimbingan kepada penulis selama masa perkuliahan.
7. Ibu **Khamida** dan Pak **Irwan** selaku pegawai Tata Usaha Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam yang telah banyak membantu dalam proses administrasi.
8. Adik- Adikku **Edo Dwipayana** dan **Khayla Putri Andini**, serta keluarga besar tercinta yang telah memberikan semangat, kasih sayang, dan do'anya.
9. Temanku **Andre, Reza** yang telah memberikan semangat dan bantuan kepada penulis selama ini.

10. Sahabatku, **Devi Gusmalia, Ocha Aulia, Chairani Triastuti, Bauty Lisna, Habiburrahman, Solehan, Banglades, Ahmad Fikri, Aisyah Sholihatin, Insyirah, Anys Hiqmah, Demayani, Rosa Apriani, Repa Okta Masera, Inosensius Nadeak, Siska Putri Ayu, Wulandari, Elka Agustini, Annisa Larashati, Nur Atika, Delia Paramitha, Siti Julaeha** dan seluruh teman – teman Angkatan 2014 yang telah mendengarkan keluh kesah, membantu dalam proses perkuliahan, memberi motivasi, dan canda tawa kepada penulis.
11. **Kakak tingkat angkatan** 2012, 2013, serta **adik tingkat angkatan** 2015, 2016 atas segala bantuannya.

Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini. Terima kasih atas semua dukungan, semoga Allah Subhanahuwata'ala membalas semua kebaikan yang diberikan kepada penulis dengan rahmat dan karunia-Nya. Semoga skripsi ini dapat berguna dalam menambah pengetahuan dan bermanfaat bagi mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sriwijaya dan semua pihak yang memerlukan.

Wassalammu'alaikum wr.wb

Indralaya, Juli 2018

Penulis

ANALYSIS RELATION CLASSIFICATION OF MARKOV CHAIN WITH GRAPH CHARACTERISTIC

By:
Haliza Suci Rachmadini
08011381419056

ABSTRACT

The basic problem of the stochastic process and Markov chain is to determine appropriate state of classification, where the classification of the Markov chain can be seen from the graph. This research was conducted to look at the shape of the graph on each of the Markov chain state characteristics that are restricted to irreducible, recurrent, and periodic properties. For each state of the transition probability matrix will be transformed into a graph form, then analyzes form the graph. The results of this research indicate that for the state of Markov chain irreducible there is a cycle that connects all vertices in the graph, while for Markov chain reducible there is no cycles connecting all vertices on the graph, but there may be cycles connecting some of the vertices on the graph. Markov chain vertices is said to be periodic in the graph there is cycle to return to the vertices with even number of steps, while the aperiodic on the graph is a loop and there is a cycle to return to the vertices with odd number of steps. Markov chain vertices is said to be recurrent in the graph there is a cycle shaped arc path out for each arc that is skipped, while it is said transient there is an arc path out that is not a cycle for every arc that is skipped.

Keywords: Markov Chain, State Classification, Graph, Graph Characteristic

ANALISIS HUBUNGAN KLASIFIKASI RANTAI MARKOV DENGAN SIFAT – SIFAT GRAF

Oleh:
Haliza Suci Rachmadini
08011381419056

ABSTRAK

Masalah dasar dari proses stokastik dan rantai Markov adalah menentukan klasifikasi keadaan yang sesuai, dimana klasifikasi keadaan rantai Markov dapat dilihat dari bentuk graf. Penelitian ini dilakukan untuk melihat bentuk graf pada setiap sifat-sifat keadaan rantai Markov yang dibatasi untuk sifat *irreducible*, *recurrent*, dan *periodic*. Untuk setiap keadaan matriks peluang transisi ditransformasikan ke dalam bentuk graf, kemudian menganalisis bentuk graf tersebut. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa untuk keadaan rantai Markov *irreducible* terdapat siklus yang menghubungkan semua simpul pada graf, sementara untuk rantai Markov *reducible* tidak terdapat siklus yang menghubungkan semua simpul pada graf, tetapi ada kemungkinan terdapat siklus yang menghubungkan beberapa simpul pada graf. Simpul rantai Markov dikatakan bersifat *periodic* pada graf terdapat siklus untuk kembali ke simpul dengan jumlah langkah genap, sementara dikatakan *aperiodic* pada graf terdapat gelang dan terdapat siklus untuk kembali ke simpul dengan jumlah langkah ganjil. Simpul rantai Markov dikatakan bersifat *recurrent* pada graf terdapat alur busur keluar berbentuk siklus untuk setiap alur busur yang dilewati, sedangkan dikatakan *transient* terdapat alur busur keluar yang tidak berupa siklus untuk setiap alur busur yang dilewati.

Kata kunci: *Rantai Markov, Klasifikasi State, Graf, Sifat - Sifat Graf*

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGESAHAN	ii
HALAMAN PERSEMBAHAN	iii
KATA PENGANTAR	iv
ABSTRACT	vii
ABSTRAK	viii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR GAMBAR	xii
BAB I PENDAHULUAN	
1.1. Latar Belakang.....	1
1.2. Perumusan Masalah	3
1.3. Pembatasan Masalah	3
1.4. Tujuan	3
1.5. Manfaat	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1. Proses Stokastik.....	5
2.2. Matriks Peluang Transisi	5
2.3. Rantai Markov	6
2.4. Teori Graf	14
2.4.1 Pengertian Graf	15
2.4.2 Istilah – Istilah di Graf	15

2.5 Jenis – Jenis Graf.....	19
-----------------------------	----

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

3.1. Tempat	25
3.2. Waktu	25
3.3. Metode Penelitian	25

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Rantai Markov yang Bersifat <i>Irreducible</i>	26
4.1.1 Menentukan Matriks Peluang Transisi Rantai Markov Bersifat <i>Irreducible</i>	26
4.1.2 Mengubah Matriks Peluang Transisi P_1 menjadi Graf.....	27
4.2. Rantai Markov yang Bersifat <i>Reducible</i>	29
4.2.1 Menentukan Matriks Peluang Transisi Rantai Markov Bersifat <i>Reducible</i>	29
4.2.2 Mengubah Matriks Peluang Transisi P_2 menjadi Graf.....	30
4.3. Rantai Markov yang Bersifat <i>Periodic</i>	32
4.3.1 Menentukan Matriks Peluang Transisi Rantai Markov Bersifat <i>Periodic</i>	32
4.3.2 Mengubah Matriks Peluang Transisi P_3 menjadi Graf.....	35
4.4. Rantai Markov yang Bersifat <i>Aperiodic</i>	37
4.4.1 Menentukan Matriks Peluang Transisi Rantai Markov Bersifat <i>Aperiodic</i>	37
4.4.2 Mengubah Matriks Peluang Transisi P_4 menjadi Graf.....	40
4.5. Rantai Markov yang Bersifat <i>Periodic</i> dan <i>Aperiodic</i>	41
4.5.1 Menentukan Matriks Peluang Transisi Rantai Markov Bersifat <i>Periodic</i> dan <i>Aperiodic</i>	42

4.5.2 Mengubah Matriks Peluang Transisi P_5 menjadi Graf.....	43
4.6. Rantai Markov yang Bersifat <i>Recurrent</i>	44
4.6.1 Menentukan Matriks Peluang Transisi Rantai Markov Bersifat <i>Recurrent</i>	45
4.6.2 Mengubah Matriks Peluang Transisi P_6 menjadi Graf.....	47
4.7. Rantai Markov yang Bersifat <i>Transient</i>	48
4.7.1 Menentukan Matriks Peluang Transisi Rantai Markov Bersifat <i>Transient</i>	49
4.7.2 Mengubah Matriks Peluang Transisi P_7 menjadi Graf.....	50
4.8. Rantai Markov yang Bersifat <i>Recurrent</i> dan <i>Transient</i>	52
4.8.1 Menentukan Matriks Peluang Transisi Rantai Markov Bersifat <i>Recurrent</i> dan <i>Transient</i>	52
4.8.2 Mengubah Matriks Peluang Transisi P_8 menjadi Graf.....	55
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN	
5.1. Kesimpulan	58
5.2. Saran	58
DAFTAR PUSTAKA	59

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1	Diagram transisi rantai Markov <i>accessible</i> 7
Gambar 2.2	Diagram transisi rantai Markov <i>communicate</i> 8
Gambar 2.3	Diagram transisi rantai Markov <i>irreducible</i> 9
Gambar 2.4	Diagram transisi rantai Markov <i>periodic</i> 10
Gambar 2.5	Diagram transisi rantai Markov <i>recurrent</i> dan <i>transient</i> 12
Gambar 2.6	Diagram transisi rantai Markov <i>absorbing</i> 14
Gambar 2.7	Graf G_1 17
Gambar 2.8	Graf G_2 18
Gambar 2.9	Graf sederhana 20
Gambar 2.10	Graf K_5 20
Gambar 2.11	Graf C_3 21
Gambar 2.12	Graf Teratur derajat 2..... 21
Gambar 2.13	Graf $K_{3,3}$ 22
Gambar 2.14	Graf tidak sederhana 22
Gambar 2.15	Graf tidak berarah 23
Gambar 2.16	Graf berarah 23

Gambar 2.17	Graf berhingga	24
Gambar 2.18	Graf tidak berhingga	24
Gambar 4.1	Diagram transisi P_1	28
Gambar 4.2	Diagram transisi P_2	30
Gambar 4.3	Diagram transisi P_3	36
Gambar 4.4	Diagram transisi P_4	40
Gambar 4.5	Diagram transisi P_5	44
Gambar 4.6	Diagram transisi P_6	47
Gambar 4.7	Diagram transisi P_7	51
Gambar 4.8	Diagram transisi P_8	55

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari, sering sekali orang ingin mengamati hubungan antar satu kejadian dengan kejadian lainnya atau suatu barisan kejadian dalam suatu interval waktu tertentu. Menurut Ross (2007) proses stokastik disimbolkan dengan $\{X_t\}$ merupakan suatu proses menyangkut peluang yang diindeks berdasarkan waktu, dimana untuk setiap t pada himpunan indeks T dan X_t merupakan peubah acak. Selanjutnya aplikasi t sering digunakan untuk menyatakan waktu dan X_t merupakan keadaan pada proses saat waktu t . Menurut Allen (2003), sebuah proses stokastik Markov adalah proses stokastik dimana kejadian yang akan datang dari suatu sistem hanya bergantung pada waktu yang sedang terjadi (waktu kini) dan tidak pada waktu lampau.

Rantai Markov (*Markov Chain*) adalah salah satu model yang sering digunakan untuk melakukan teknik perhitungan seperti menggambarkan proses-proses stokastik. Istilah rantai Markov awalnya dicetuskan oleh seorang profesor Rusia yakni Andrei A. Markov (1856-1922). Risetnya yang mendasari studi tentang proses-proses stokastik yang pada perkembangannya mempunyai banyak sekali aplikasi pada dunia nyata.

Proses rantai Markov terdiri dari dua langkah, pertama menyusun matriks stokastik (matriks peluang transisi) dan kemudian menghitung kemungkinan

peluang kejadian di waktu yang akan datang. Proses stokastik dikatakan termasuk rantai Markov apabila memenuhi sifat Markov (*Markovian property*), sifat Markov menyatakan bahwa peluang bersyarat dari sebuah kejadian masa depan hanya tergantung pada keadaan masa sekarang dan tidak tergantung pada keadaan sebelumnya. Rantai Markov menjelaskan secara terperinci tentang peluang transisi, peluang transisi n langkah dan peluang *steady state*. Peluang transisi n langkah yaitu suatu proses yang mula-mula berada pada keadaan i dan akan berada pada keadaan j setelah n langkah. Peluang peralihan pada tingkat keadaan seimbang (*steady state*) adalah peluang peralihan yang sudah mencapai keseimbangan sehingga tidak akan berubah terhadap perubahan waktu yang terjadi.

Ada beberapa klasifikasi yang dimiliki rantai Markov yaitu *irreducible*, *periodic*, *reccurent*, *absorbing*, dan *ergodic*. Klasifikasi sifat-sifat dari rantai Markov dapat diketahui dengan ketentuan rumus yang berlaku pada setiap keadaan dan dapat juga dilihat dari bentuk grafnya. Keadaan-keadaan yang berasal dari matriks stokastik (matriks peluang transisi) dapat di transisi menjadi simpul (*vertex*) dan sisi (*edge*).

Penelitian sebelumnya yang telah dibahas oleh Nurislamiyati dkk. (2017) yaitu bagaimana mengklasifikasikan keadaaan-keadaan rantai Markov menggunakan algoritma graf, algoritma graf digunakan untuk menyederhanakan dan memberikan representasi kanonik dari keadaan-keadaan yang jumlahnya besar. Penelitiannya menggunakan 12 jenis merek sepatu yang akan menjadi ruang keadaan dari analisis rantai Markov. Selanjutnya Langi (2011) membahas tentang klasifikasi keadaan pada rantai Markov dari sebuah matriks dengan nilai eigen tertentu. Berdasarkan latar

belakang yang telah dijelaskan, maka dilakukan penelitian mengenai hubungan pengklasifikasian keadaan dalam rantai Markov dengan sifat-sifat yang dimiliki graf, dengan mengambil contoh kasus keadaan yang bersifat *irreducible*, *periodic* dan *recurrent*. Sebelumnya Langi (2011) menentukan klasifikasi rantai Markov dilihat dengan menggunakan rumus yang telah diberikan, namun pada penelitian ini diharapkan hanya dengan melihat bentuk grafnya saja maka diketahui sifat rantai Markov tersebut.

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan yang dibahas dalam penelitian ini yaitu bagaimana sifat-sifat graf yang dibentuk dari setiap keadaan rantai Markov.

1.3 Pembatasan Masalah

Pada penelitian ini analisis pembahasan dibatasi hanya tiga sifat keadaan rantai Markov, yaitu meliputi rantai Markov *irreducible*, rantai Markov dengan simpul yang bersifat *periodic* dan *recurrent*.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan perumusan masalah yang telah diuraikan, maka penelitian ini bertujuan untuk:

1. Melihat bentuk graf pada keadaan rantai Markov yang bersifat *irreducible*.
2. Melihat bentuk graf pada keadaan rantai Markov dengan simpul yang bersifat *periodic*.

3. Melihat bentuk graf pada keadaan rantai Markov dengan simpul yang bersifat *recurrent*.

1.5 Manfaat

Manfaat dari hasil penelitian ini diharapkan dapat menambah wawasan pembaca serta memperdalam pengetahuan tentang hubungan antara sifat-sifat keadaan yang dimiliki rantai Markov dan sifat-sifat yang dimiliki graf.

DAFTAR PUSTAKA

- Aldous, J. M., and Wilson, R. J. 2004. *Graphs and Applications: an Introductory Approach*. London: Springer.
- Allen, L. J. S. 2003. *An Introduction to Stochastic Process with Applications to Biology*. USA: Pearson Education, Inc.
- Castaneda, L. B., et al. 2012. *Introduction to Probability and Stochastic Processes* Amerika: John Willey & Sons, Inc.
- Harju, T. 2011. *Graph Theory*. Finland: Departemnt of Mathematics University of Turku.
- Hillier, F. S., and Lieberman, G. J. 2008. *Introduction to Operation Research*. Yogyakarta: Penerbit Andi.
- Langi, Y. A. R. 2011. Penentuan Klasifikasi State pada Rantai Markov dengan Menggunakan Nilai Eigen dari Matriks Peluang Transisi. *Jurnal Ilmiah Sains*, 11(1), 124-130.
- Munir, R. 2005. *Matematika Diskrit*. Bandung: Penerbit Informatika.
- Nurislamiyati, Y. A., dkk. 2017. Klasifikasi Keadaan dalam Rantai Makov Menggunakan Algoritma Graf. *Prosiding Statistika*, 3(2) 152-160.
- Praptono. 1986. *Materi Pokok Pengantar Proses Stokastik I*. Jakarta: Karunika.
- Richey, M. 2010. *The Evolution of Markov Chain Monte Carlo Methods The American Mathematical Monthly*. America: Mathematical Association of America.
- Ross, S. M. 2007. *Introduction to Probability Models 9th Edition*. New York: Academic Press.
- Siang, J. J. 2002. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta: Penerbit Andi.