ANALISIS STRUKTUR PORTAL DENGAN BALOK NON PRISMATIS MENGGUNAKAN METODE MATRIK

TUGAS AKHIR

Oleh :

HERI MIARDI

0301 311 0134

FAKULTAS TEKNIK

PROGRAM EKSTENSION JURUSAN TEKNIK SIPIL

UNIVERSITAS SRIWIJAYA

2005

ANALISIS STRUKTUR PORTAL DENGAN BALOK NON PRISMATIS MENGGUNAKAN METODE MATRIK

TUGAS AKHIR

Oleh :

MERI MIARDI

0301 311 0134

FAKULTAS TEKNIK

PROGRAM EXSTENSION JURUSAN TEKNIK SIPIL

UNIVERSITAS SRIWIJAYA

2005

UNIVERSITAS SRIWIJAYA
FAKULTAS TEKNIK EKSTENSION
JURUSAN TEKNIK SIPIL

SURAT PERSETUJUAN LAPORAN TUGAS AKHIR

Nama	:	MERI MIARDI
Nim	:	0301 311 0134
Jurusan	:	TEKNIK SIPIL
Judul Tugas Akhir	:	ANALISIS STRUKTUR PORTAL DENGAN BALOK NON PRISMATIS MENGGUNAKAN METODE MATRIK

PEMBIMBING TUGAS AKHIR

Tanggal : Agustus 2005, Pembimbing Utama : Ir. H. Imron Fikri Astira, MS

NIP : 131 472 645

UNIVERSITAS SRIWIJAYA
FAKULTAS TEKNIK EKSTENSION
JURUSAN TEKNIK SIPIL

SURAT PERSETUJUAN LAPORAN TUGAS AKHIR

Nama	: MERI MIARDI
Nim	: 0301 311 0134
Jurusan	: TEKNIK SIPIL
Judul Tugas Akhir	: ANALISIS STRUKTUR PORTAL DENGAN BALOK NON PRISMATIS MENGGUNAKAN METODE MATRIK

Mengetahui,
Ketua Jurusan Teknik Sipil

Ir. H. Imron Fikri Astira, MS
NIP : 131 472 645

Motto :

"Sebaik-baiknya manusia adalah orang yang dapat memberikan manfaat bagi orang lain"

(Hadist)

"Menuntut ilmu adalah kewajiban bagi setiap orang islam baik laki-laki maupun perempuan"

(H.R. Baihagy dalam Syu'bul Imam)

Kupersembahkan Untuk :

- **Ayah dan Ibuku yang tercinta**
- **Adiku yang tersayang**
- **Teman-temanku yang telah banyak mendukungku**
- **Almamaterku**

	ANALISIS STRUKTUR PORTAL DENGAN BALOK NON PRISMATIS MENGGUNAKAN METODE MATRIK	

ABSTRAK

Seiring dengan berkembangnya penelitian dan pemakaian program atau metode untuk menyelesaikan beberapa persoalan dimana didalam ilmu mekanika teknik, konstruksi paling sederhana adalah konstruksi statis tertentu. Namun pada kebanyakan perencanaan teknis yang nyata, konstruksi yang dijumpai akan merupakan struktur-struktur yang cukup komplek, maka penulis mencoba mengambil metode atau cara yang ada yaitu metode matrik. Dimana metode Matrik dapat dijalankan dengan cara manual ataupun dengan bantuan program excel. Metode matrik yang akan digunakan dalam penulisan ini ialah metode kekakuan.

Beberapa hal yang perlu dipersiapkan sebelum perhitungan menggunakan metode matrik yaitu meliputi menginput rumus-rumus yang berhubungan dalam perhitungan portal dengan balok non prismatis dan menginput data-data yang diperlukan dalam menganalisa portal dengan balok non prismatis kedalam metode matrik.

Setelah perhitungan menggunakan metode matrik selesai dilakukan dan hasil perhitungan telah diketahui maka perhitungan menggunakan program SAP2000 dapat dijalankan sebagai pembanding.

Dari hasil analisis struktur portal dengan balok non prismatis menggunakan metode Matrik menunjukkan hasil yang didapat kurang memuaskan, dimana dari hasil perbandingan menggunakan program SAP2000 terlihat adanya selisih hasil akhir perhitungan yang mungkin timbul karena banyak factor. Dimana Persentase selisih perhitungannya adalah untuk gaya normal (6% - 9%), gaya lintang (6% - 29%) dan gaya momen (12% - 27%)

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatjkan kehadiran ALLAH SWT atas berkat dan rahmat-Nya, penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini sebagai salah satu syarat untuk mengikuti ujian sarjana pada jurusan teknik sipil program ekstension Universitas Sriwijaya.

Dalam melaksanakan penyusunan Tugas Akhir ini penulis mendapat bimbingan dan saran dari berbagai pihak untuk itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Rektor Universitas Sriwijaya.
2. Dekan Fakultas Teknik Universitas Sriwijaya.
3. Ketua Program Ekstension Fakultas Teknik Universitas Sriwijaya.
4. Bapak Ir. H. Imron Fikri Astira, M.S., Ketua Jurusan Teknik Sipil Fakultas Teknik Universitas Sriwijaya.
5. Bapak Ir. H. Imron Fikri Astira,M.S., Dosen Pembimbing Tugas Akhir.
6. Ibu Ratna Dewi, S.T. M.T., Dosen Pembimbing Akademik.
7. Teman-teman tugas akhir.
8. Semua pihak yang telah membantu hingga selesainya tugas akhir ini.

Penulis menyadari bahwa tugas akhir ini masih banyak kekurangannya, oleh karena itu penulis mengharapkan saran dan masukan sehingga ada proses perbaikan tugas akhir ini. Semoga di masa depan tugas akhir ini lebih bermanfaat.

Palembang, Agustus 2005

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar belakang

Seiring dengan berkembangnya penelitian dan pemakaian program atau metode untuk menyelesaikan beberapa persoalan mengenai analisis struktur, maka penulis mencoba mengambil metode atau cara yang ada yaitu metode matrik. Dimana metode Matrik dapat dijalankan dengan cara manual ataupun dengan bantuan program excel. Dengan menggunakan metode atau cara ini penulis berharap dapat menampilkan rumus-rumus apa saja yang digunakan dalam menganalisis suatu struktur khususnya balok non prismatis.

Adapun alasan mengapa penulis mencoba meggunakan metode dalam menganalisis struktur portal dengan balok non prismatis adalah karena selama ini sering kali kita mengalami kesulitan dalam penggunaan metode atau cara yang ada. Dimana dalam perencanaan portal, khususnya portal dengan balok non prismatik tidaklah segampang seperti pada portal dengan balok prismatis. Oleh karena itu tugas akhir ini dilengkapi dengan contoh-contoh permasalahan mendasar, berikut langkah-langkah penyelesaiannya dipilih dari berbagai buku acuan untuk disajikan dalam bentuk langkah-langkah yang mudah digunakan dan dipahami.

1.2 Maksud dan Tujuan Penelitian

Maksud dari penelitian ini adalah agar mahasiswa dapat menerapkan ilmu yang telah mereka dapat di bangku kuliah untuk diterapkan dalam dunia nyata sehingga mahasiswa akan lebih siap menghadapi persoalan-persoalan yang terjadi dilapangan nantinya.

Adapun tujuan dari Penulisan tugas akhir ini disamping merupakan syarat mengikuti ujian sarjana adalah sebagai bahan dalam merencanakan sebuah konstruksi khususnya portal dengan balok non prismatis, agar lebih baik atau lebih mudah digunakan, sehingga diharapkan dapat membantu mempermudah dalam menyelesaikan permasalahan yang ada.

1.3 Ruang lingkup Penelitian

Dalam penulisan tugas akhir ini penulis membatasi pada analisis struktur portal dengan balok non prismatis menggunakan metode matrik. Dimana metode matrik yang akan digunakan ialah metode kekakuan.

1.4 Sistematika Penulisan

Penulisan tugas akhir ini berjudul "Analisis Struktur Portal Dengan Balok Non Prismatis Menggunakan Metode Matrik" menggunakan sistematika sebagai berikut :

BAB. I PENDAHULUAN

Merupakan bab yang memuat tentang latar belakang, maksud dan tujuan penelitian, ruang lingkup penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB. II TINJAUAN PUSTAKA

Merupakan bab yang memuat tentang pengertian dari metode matrik.

BAB. III TEORI DASAR

Merupakan bab yang berisikan tentang cara atau langkah-langkah dasar dalam perhitungan menggunakan metode matrik.

BAB. IV ANALISA DAN PEMBAHASAN

Merupakan bab yang memuat tentang pembahasan perhitungan terhadap portal dengan balok non prismatis dengan menggunakan metode matrik. Serta perbandingan hasil akhir dari metode matrik.

BAB. V PENUTUP

Merupakan bab yang berisikan tentang kesimpulan serta saran-saran yang dapat diambil sebagai hasil dari pembahasan serta analisa yang dilakukan pada bab-bab sebelumnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pengertian Metode Matrik

Metode matrik adalah suatu pemikiran baru pada analisa struktur, yang berkembang bersamaan dengan makin populernya penggunaan komputer untuk operasi-operasi perhitungan aritmatik. Didalam ilmu mekanika teknik, konstruksi paling sederhana adalah konstruksi statis tertentu. Namun pada kebanyakan perencanaan teknis yang nyata, konstruksi yang dijumpai akan merupakan struktur-struktur yang cukup komplek.

Analisa suatu konstruksi yang statis tertentu memang akan dapat segera diselesaikan dengan hanya menggunakan beberapa persamaan kesetimbangan. Misalnya kalau mau menghitung gaya-gaya batang pada suatu rangka batang yang statis tertentu baik external maupun internal, maka cukup mempergunakan persamaan-persamaan kesetimbangan untuk menyelesaikannya, tanpa perlu menghiraukan deformasi yang terjadi pada konstruksi tersebut. Penyelesaian konstruksi yang demikian ini hanya sering dijumpai pada persoalan teoritis yang ada dibuku. Tidak demikian halnya dengan konstruksi-konstruksi statis tak tentu, terlebih lagi yang cukup komplekx.

Suatu konstruksi nyata yang ada, pada umumnya terdiri dari banyak bagian yang komplex. Geometri dari elemen-elemen individu, atau struktur secara keseluruhan, sering kali tidak uniform dan tidak teratur. Konstruksi-konstruksi demikian sudah tidak mungkin lagi diselesaikan dengan persamaan-persamaan kesetimbangan, sehingga dengan demikian perlu disederhanakan, diidealisir, dengan harapan agar dapat diselesaikan dengan berdasarkan analisa matematik yang sederhana, yaitu sedapat mungkin dalam hubungan persamaan-persamaan yang linier.

Analisa struktur dengan metode matrik telah memberikan kemungkinan-kemungkinan bagi proses idealisasi ini. Seperti diketahui, suatu hal yang utama yang berhubungan dengan proses dari perencanaan struktur ialah menganalisa apa akibat dari pembebanan gaya-gaya pada konstruksi yang ditinjau. Tingkah laku pada konstruksi ini pada umumnya berhubungan sangat erat dengan perubahan stress dan srain yang terjadi padanya. Resultante stress ini bisa dalam bentuk gaya dalam, yaitu momen lentur, gaya linyang, gaya normal, momen torsi, sedangkan strain bisa menyatakan deformasi yang terjadi pada konstruksi.

Dalam menganalisa perubahan bentuk ini, perhatian akan lebih baik dipusatkan pada lendutan linier atau anguler yang terjadi pada titik-titik distrik (titik-titik putus) dari konstruksi. Dengan demikian yang perlu dianalisa mula pertama ialah sifat dan tingkah laku dari elemen-elemennya bila dibebani oleh gaya-gaya. Disini bisa didapatkan keuntungan bahwa hasil analisa satu elemen, dapat dipakai untuk elemen-elemen lain yang sejenis. Kemudian digabungkan sifat-sifat dari elemen itu dalam satu model matematik dari konstruksi, dan menyatakannya dalam suatu kondisi yang tergabung, dimana dalam hal ini syarat kompatibiliti dari segi geometrik konstruksi sudah dipenuhi.

Disamping itu, syarat kesetimbangan statis harus juga terpenuhi, baik dipandang dari segi seluruh konstruksi maupun untuk masing-masing elemen. Setiap elemen dari konstruksi harus berada dalam kesetimbangan sebagai akibat dari semua gaya yang bekerja padanya, baik itu beban-beban luar, atau gaya reaksi, maupunjuga gaya-gaya yang datang dari elemen-elemen tetangganya. Bila proses ini sudah diselesaikan, maka tingkah laku dari konstruksi keseluruhan yang disebabkan oleh bekerjanya gaya-gaya luar akan bisa ditentukan.

Dengan demikian dapat disimpulkan disini, bahwa hal yang utama dalam analisa struktur untuk menentukan baik itu deformasi ataupun stress yang terjadi pada struktur, ialah sampai sejauh mana sudah diketahui sifat karakteristik hubungan gaya dan deformasi dari elemen-elemen struktur, dan memaksakan terpenuhinya semua syarat kompatibiliti dan kesetimbangan.

Jadi, tiga hal mendasari analisa ini, yaitu :

1. Kesetimbangan.
2. Hubungan sress dan strain, atau gaya dalam dan deformasi.
3. Kompatibiliti, atau kontinuitas dari deformasi.

Dalam analisa matrik ini, dikenal dua cara, yaitu :

1. Metode kekakuan (Stiffness method, atau displacement method).
2. Metode fleksibilitas (Flexibility method, atau force method).

Dari kedua metode diatas maka penulis akan menggunakan metode kekakuan (Stiffness method, atau displacement method) dalam menganalisis struktur portal dengan balok non prismatis.

2.1.1 Metode Kekakuan

Dengan metode kekakuan ini sebenarnya dicari hubungan gaya dengan lendutan, atau dinyatakan secara matematis :

$$\{Q\} = [K] . \{D\} \tag{2.1}$$

{Q} menyatakan gaya-gaya yang timbul pada titik-titik distrik akibat diberikannya lendutan {D} pada titik-titik tersebut. Tentu saja gaya {Q} adalah gaya yang koresponding dengan lendutan {D}. Sedangkan [K] menyatakan kekakuan dari struktur.

Metode kekakuan ini juga disebut metode lendutan (displacement method), karena analisa dimulai dengan lendutan, sehingga dengan demikian urutan kerjanya secara garis besar adalah sebagai berikut :

1. Kompatibiliti yaitu mencari hubungan antara deformasi dengan lendutan, atau secara tegasnya mencari deformasi apa yang terjadi pada elemen-elemen dititik-titik distrik akibat diberikannya lendutan pada struktur dititik-titik tersebut.
2. Persamaan hubungan stress dan strain, yaitu mencari hubungan mengenai gaya-gaya dalam yang timbul sebagai akibat adanya deformasi pada elemen-elemen struktur tersebut.
3. Kesetimbangan, langkah terakhir yang menyatakan hubungan gaya luar dititik distrik dengan gaya-gaya dalam, atau mencari berapa besar gaya dalam elemen dititik-titik distrik.

Dengan menggabungkan ketiga langkah diatas maka akan didapatkan hubungan gaya dan lendutan.

Perlu kiranya dipertimbangkan, karena metode kekakuan ini analisanya dimulai dengan lendutan, kemudian mencari hubungan pada gaya-gaya yang timbul dititik-titik distrik, maka akan sangat menguntungkan untuk memakai metode ini menganalisa suatu konstruksi dimana ketidak tentuan kinematisnya (yang berhubungan erat dengan derajat kebebasan atau degree of freedom) adalah lebih kecil bila dibandingkan dengan ketidak tentuan statisnya. Dengan demikian, konstruksi-konstruksi statis tak tentu yang sering dijumpai pada umumnya, akan lebih mudah menguntungkan bila dianalisa dengan metode kekakuan ini, karena umumnya konstruksi-konstruksi ini mempunyai derajat ketidak tentuan statis yang besar.

2.1.2 Metode Fleksibilitas

Prinsip dari metode fleksibilitas ini adalah kebalikan dari metode kekakuan. Dengan metode ini dicari hubungan lendutan dan gaya, atau dinyatakan secara matematis:

$$\{D\} = [F] \cdot \{Q\} \qquad (2.2)$$

$\{D\}$ menyatakan lendutan dititik distrik yang koresponding dengan gaya $\{Q\}$. $[F]$ menyatakan fleksibilitas dari struktur.

Metode fleksibilitas ini juga disebut sebagai metode gaya (force method) karena analisa dimulai dengan gaya, yaitu gaya-gaya dititik distrik. Ini adalah kebalikan dari metode kekakuan sehingga urutan kerja analisa secara garis besar adalah sebagai berikut :

1. Kesetimbangan yaitu berdasarkan prinsip kesetimbangan menghitung gaya dalam yang timbul pada elemen-elemen struktur akibat bekerjanya gaya-gaya luar dititik-titik distrik atau dengan kata lain dicari hubungan gaya dalam dan gaya luar.
2. Persamaan hubungan antara strain dan stress, yaitu mencari hubungan mengenai deformasi yang terjadi pada elemen akibat adanya gaya-gaya dalam tersebut.

3. Kompatibiliti, yaitu mencari hubungan antara lendutan yang terjadi pada struktur dititik-titik distrik, dengan deformasi yang timbul pada elemen-elemen struktur dimana antara lendutan dan deformasi harus memenuhi syarat kompatibiliti. Disini dituntut kontinuitas dari deformasi yang terjadi pada elemen-elemen struktur.

2.2 Dasar Perhitungan Matrik

Dalam menganalisa menggunakan metode matrik, sesuai dengan tahapan-tahapan yang telah disinggung sebelumnya, maka dalam proses analisa tersebut akan mengenal beberapa matrik yang penting sebagai berikut :

1. Matrik deformasi [A], suatu matrik yang menyatakan hubungan kompatibiliti, atau hubungan deformasi dan lendutan.

   $\{d\} = [A]\{D\}$ (2.3)

   dimana :

   $\{d\}$ = deformasi dari elemen struktur

   $[A]$ = matrik deformasi

   $\{D\}$ = lendutan dititik diskrit

2. Matrik kekokohan intern elemen [S], suatu matrik yang memenuhi Hukum Hooke, dalam mana dinyatakan hubungan antara gaya dalam dan deformasi.

   $\{H\} = [S]\{d\}$ (2.4)

   dimana :

   $\{H\}$ = gaya dalam elemen

   $[S]$ = matrik kekokohan elemen

   $\{d\}$ = deformasi elemen

3. Matrik statis [B], suatu matrik yang menyatakan kesetimbangan antara gaya luar dan gaya dalam.

   $\{Q\} = [B]\{H\}$ (2.5)

   dimana:

   $\{Q\}$ = gaya luar yang bekerja dititik diskrit

   $[B]$ = matrik statis

   $\{H\}$ = gaya dalam elemen

Bila ketiga matrik diatas digabungkan maka akan didapatkan hubungan.

{Q} = [B] {H}

= [B] ([S] {d}) (2.6)

= [B] [S] ([A] {D}) (2.7)

= [B] [S] [A] {D} (2.8)

= [K] {D} (2.9)

dimana [K] adalah matrik kekakuan struktur, dengan pengertian.

[K] = [B] [S] [A] (2.10)

2.3 Derajat Ketidak-tentuan Kinematis

Sebagaimana telah dijelaskan, maka dalam menganalisa dimulai dengan mengambil lendutan dititik diskrit sebagai sasaran yang harus dihitung. Untuk mengetahui dimana harus dipasang besaran lendutan yang akan dicari tersebut, maka harus diketahui dulu berapa derajat ketidak-tentuan kinematis atau istilah lainnya derajat kebebasan(degree of freedom) dari struktur.

Derajat ketidak-tentuan kinematis ialah suatu besaran yang menyatakan jumlah komponen bebas dari lendutan dititik diskrit yang mungkin terjadi yang berhubungan dengan diberikannya suatu pembebanan pada struktur.

Pada struktur dua dimensi (bidang) dengan titik hubung kaku, pada umumnya akan timbul lendutan translasi (linier) dan rotasi (anguler) dititik-titik diskrit. Lendutan translasi selalu dapat dinyatakan oleh dua komponen yang saling tegak lurus, sedangkan lendutan rotasi dinyatakan oleh satu komponen anguler. Dengan demikian pada satu titik pertemuan secara lengkap akan ada tiga komponen lendutan.

Untuk struktur tiga dimensi (ruang) dengan titik hubung kaku, pada umumnya secara lengkap akan ada enam buah komponen dititik bebas dari lendutan yaitu tiga menyatakan lendutan translasi, dan tiga lainnya lendutan rotasi.

Pada bangunan rangka batang dengan sambungan engsel, maka komponen rotasi dengan sendirinya tidak ada. Suatu struktur dengan derajat ketidak tentuan kinematis sama dengan nol juga disebut dengan kinematis tertentu.

2.4 Metode Kekakuan Superposisi Langsung

Dalam menganalisa struktur menggunakan metode kekakuan , maka urutan kerjanya memenuhi tiga prinsip utama :

- kontiunitas dari deformasi (kompatibiliti)
- hubungan gaya dalam dan deformasi elemen
- kesetimbangan gaya luar dan gaya dalam

Selanjutnya akan diperlihatkan cara untuk menyederhanakan proses analisa diatas yaitu dengan menurunkan suatu matrik kekakuan standar dari satu elemen struktur, yang dapat dipakai secara umum.

Ada beberapa cara yang dikenal untuk menurunkan matrik kekakuan elemen, antara lain :

- metode unit lendutan
- teorema castigliano (pertama)
- metode inversi

Cara yang pertama, adalah suatu metode langsung, yaitu secara langsung menghitung gaya-gaya yang timbul dititik-titik diskrit bila pada satu titik diantaranya diberikan lendutan sebesar satu satuan (unit lendutan) dan titik yang lain sedemikian rupa akan dipegang tegak pada tempatnya. Segera bisa didapat hubungan gaya dengan lendutan yang bisa disajikan dalam bentuk matrik.

Cara yang kedua, adalah berdasarkan penggunaan langsung teorema Castigliano pertama, yaitu dengan cara menyatakan persamaan strain energy sebagai fungsi dari lendutan, untuk kemudian persamaan tersebut di-diferensial terhadap lenduatan yang bersangkutan. Hasil bagi diferensial ini akan memberikan gaya-gaya yang timbul dititik diskrit sebagai fungsi dari lendutan.

Cara yang ketiga akan dijelaskan dalam sub bab berikut ini.

2.4.1 Metode Inversi Untuk Menurunkan Matrik K

Tinjaulah satu susun gaya dan lendutan yang koresponding satu sama lain, yang memenuhi suatu hubungan seperti ditunjukkan oleh persamaan (2.1)

$$\{Q\} = [K].\{D\}$$

yang mana bila dilakukan partisi, dapat dihasilkan hubungan matrik sebagai berikut :

$$\begin{vmatrix} Q_1 \\ \hline Q_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} D_1 \\ \hline D_2 \end{vmatrix} \tag{2.11}$$

Dimana $\{Q_1\}$ dan $\{D_1\}$, $\{Q_2\}$ dan $\{D_2\}$, masing-masing adalah merupakan himpunan beberapa gaya dan lendutan yang koresponding satu sama lain, dan matrik [K] ialah matrik kekakuan yang menghubungkan matrik {Q} dan {D}, yaitu :

$$[K] = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{vmatrix} \tag{2.12}$$

Didasari oleh persamaan (2.11)

$$\begin{vmatrix} Q_1 \\ \hline Q_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} D_1 \\ \hline D_2 \end{vmatrix}$$

Maka akan dapat diturunkan matrik kekakuan [K], dengan menggunakan metode inversi.

Mengingat pada partisi yang telah dibuat sesuai dengan persamaan diatas, maka proses menurunkan matrik [K] secara garis besar dapat dibagi dalam empat tahap utama.

Tahap 1: Ambil $D_1 = D_1$, $D_2 = 0$

Dari prinsip fleksibelitas, diturunkan matrik fleksibelitas F_{11}. karena $\{Q_1\}$ dan $\{D_1\}$ adalah susunan gaya dan lendutan dititik diskrit yang koresponding satu sama lain, maka akan dapat dengan mudah diturunkan hubungan :

$$\{D_1\} = [F_{11}]\{Q_1\} \tag{2.13}$$

dimana matrik $[F_{11}]$ mempunyai elemen yang merupakan koefisien fleksibilitas, yaitu suatu koefisien yang menyatakan berapa harga lendutan $\{D_1\}$ bila dikerjakan gaya $\{Q_1\}$ sebesar satu satuan dititik-titik diskrit.

Invers dari persamaan (2.13) dapat dinyatakan sebagai :

$$\{Q_1\} = [F_{11}]^{-1}\,\{D_1\} \qquad (2.14)$$

dari persamaan (2.11)

$$\left|\begin{array}{c} Q_1 \\ \hline Q_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{c} D_1 \\ \hline D_2 \end{array}\right|$$

$$\{Q_1\} = [K_{11}]\,\{D_1\} \qquad (2.15)$$

maka,

$$[K_{11}] = [F_{11}]^{-1} \qquad (2.16)$$

Tahap II: Lihat kesetimbangan gaya-gaya antara {Q1} dan {Q2}, berdasarkan prinsip kesetimbangan gaya-gaya, akan bisa didapatkan suatu hubungan :

$$\{Q2\} - [A]\,\{Q1\} = 0 \qquad (2.17)$$

atau

$$\{Q2\} = [A]\,\{Q1\} \qquad (2.18)$$

dimana [A] merupakan matrik yang menyatakan hubungan antara {Q2} dan {Q1}

substitusikan persamaan (2.15) kedalam persamaan (2.18)

$$\{Q2\} = [A]\,[K_{11}]\,\{D_1\} \qquad (2.19)$$

dari persamaan (2.11)

$$\left|\begin{array}{c} Q_1 \\ \hline Q_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{c} D_1 \\ \hline D_2 \end{array}\right|$$

$$\{Q_2\} = [K_{21}]\,\{D_1\} \qquad (2.20)$$

maka,

$$[K_{21}] = [A]\,[K_{11}] \qquad (2.21)$$

Tahap III: Dari Teorema resiprok, akan didapat :

$$[K_{12}] = [K_{21}]^T \qquad (2.22)$$

Tahap IV: Ambil $D_1 = 0$, $D_2 = D_2$

Sama dengan proses ditempuh pada tahap I, diturunkan matrik Fleksibelitas $[F_{22}]$, yang memenuhi hubungan :

$$\{D_2\} = [F_{22}]\ \{Q_2\} \qquad (2.23)$$

atau

$$\{Q_2\} = [F_{22}]^{-1}\ \{D_2\} \qquad (2.24)$$

dari persamaan (2.11)

$$\left|\begin{array}{c} Q_1 \\ \hline Q_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} D_1 \\ \hline D_2 \end{array}\right|$$

$$\{Q_2\} = [K_{22}]\ \{D_2\} \qquad (2.25)$$

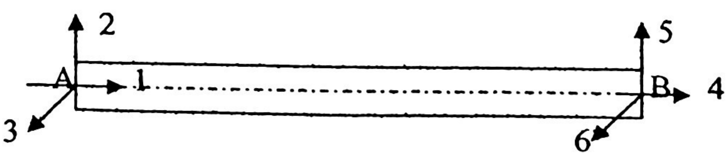
maka,

$$[K_{22}] = [F_{22}]^{-1} \qquad (2.26)$$

Dengan demikian selesailah proses menurunkan matrik [K] sesuai dengan persamaan (2.12)

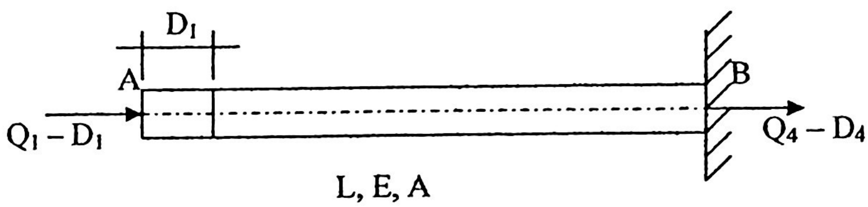
$$[K] = \left|\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array}\right|$$

2.4.2 Matrik Kekauan Elemen Balok



Gambar 2.1 Elemen balok lurus ditinjau secara bidang.

Melihat gambar (2.1) pada titik diskrit A dan B pada elemen, masing-masing diberikan tiga vektor gaya lendutan yang mewakili gaya lendutan normal (Axial), geser dan lentur.



Gambar 2.2 Elemen balok lurus dengan vektor gaya lendutan pada arah axsial.

Lihat gambar (2.2) Vektor A dan B merupakan vektor gaya lendutan pada arah akxsial (normal). Menurut Hukum Hooke, bila pada titik diskrit A dikerjakan gaya normal Q_1, maka akan terjadi perubahan bentuk axial D_1, dimana

$$D_1 = Q_1.L / EA \quad (2.27)$$

Dari persamaan diatas akan didapat :

$$Q_1 = D_1.EA / L \quad (2.28)$$

Melihat Kesetimbangan gaya Q1 dan Q4 :

$$Q_1 + Q_4 = 0$$

$$Q_4 = - Q_1$$

$$Q_4 = - D_1.EA / L \quad (2.29)$$

Analogi dengan proses penurunan diatas, maka pada titik diskrit B akan didapat :

$$D_4 = Q_4.L / EA \quad (2.30)$$

Dari persamaan diatas akan didapat :

$$Q_4 = D_4.EA / L \quad (2.31)$$

Melihat Kesetimbangan gaya Q1 dan Q4 :

$$Q_1 + Q_4 = 0$$

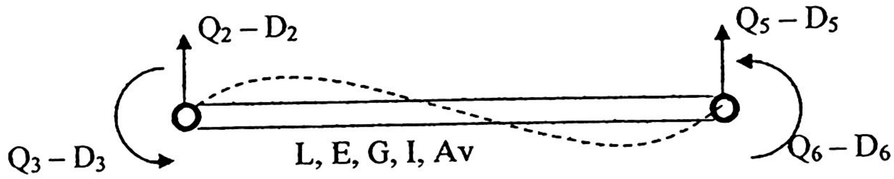
$$Q_1 = - Q_4$$

$$Q_1 = - D_4.EA / L \quad (2.32)$$

Bila Persamaan-persamaan (2.28), (2.29), (2.31), (2.32) disusun secara matrik, maka akan menghasilkan hubungan :

$$\begin{vmatrix} Q_1 \\ \\ Q_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{EA}{L} & -\dfrac{EA}{L} \\ \\ \dfrac{EA}{L} & \dfrac{EA}{L} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} D_1 \\ \\ D_4 \end{vmatrix} \qquad (2.33)$$

Sekarang akan dilanjutkan dengan proses menurunkan kekakuan lentur dan geser.



Gambar 2.3 Elemen balok lurus dengan vektor gaya lendutan geser dan lentur.

Gambar (2.3) menunjukkan elemen balok lurus dengan vektor gaya lendutan geser dan lentur.

Bila pada titik diskrit A dikerjakan gaya momen Q_3, dan diambil $Q_6 = 0$, maka berdasarkan prinsip kesetimbangan, akan didapatkan dengan mudah :

$$Q_2 = - Q_5 = Q_3/L \qquad (2.34)$$

Perubahan bentuk (anguler) yang terjadi dititik diskrit A dan B dengan sendirinya adalah sebagai akibat gaya momen Q_3 dan gaya geser Q_2.

Akibat gaya momen :

$$D_3' = Q_3.L / 3EI \qquad (2.35)$$

$$D_6' = - Q_3.L / 6EI \qquad (2.36)$$

Akibat gaya geser :

$$D_3'' = D_6'' = 1/G.Av \;\; Q_3/L \qquad (2.37)$$

Dengan demikian didapatkan perubahan bentuk total :

$$D_3 = D_3' + D_3''$$

$$D_3 = Q_3.L / 3EI + Q_3/G.AvL \qquad (2.38)$$

$$D_6 = D_6' + D_6''$$

$$D_6 = - Q_3.L / 6EI + Q_3/G.AvL \qquad (2.39)$$

Analogy dengan proses diatas, bila diberikan gaya momen Q_6 dan diambi $Q_3 = 0$, maka akan didapat :

$$D_3 = - Q_6.L / 6EI + Q_6/G.AvL \quad (2.40)$$

$$D_6 = Q_6.L / 3EI + Q_6/G.AvL \quad (2.41)$$

Dengan menggabungkan persamaan (2.38) dan (2.40), akan didapat :

$$D_3 = (L / 3EI + 1/G.AvL)\, Q_3 + (-.L / 6EI + 1/G.AvL)Q_6 \quad (2.42)$$

Dengan menggabungkan persamaan (2.39) dan (2.41), akan didapat :

$$D_6 = (-.L / 6EI + 1/G.AvL)Q_3 + (L / 3EI + 1/G.AvL)\, Q_6 \quad (2.43)$$

Bila Dinyatakan secara matrik

$$\begin{vmatrix} D_3 \\ \\ D_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{L}{3EI} + \dfrac{1}{GAvL} & -\dfrac{L}{6EI} + \dfrac{1}{GAvL} \\ \\ -\dfrac{L}{6EI} + \dfrac{1}{GAvL} & \dfrac{L}{3EI} + \dfrac{1}{GAvL} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_3 \\ \\ Q_6 \end{vmatrix} \quad (2.44)$$

Bila Persamaan (2.44) diinversikan akan didapat :

$$\begin{vmatrix} D_3 \\ \\ D_6 \end{vmatrix} = \frac{1}{\varsigma} \begin{vmatrix} \dfrac{L}{3EI} + \dfrac{1}{GAvL} & \dfrac{L}{6EI} - \dfrac{1}{GAvL} \\ \\ \dfrac{L}{6EI} - \dfrac{1}{GAvL} & \dfrac{L}{3EI} + \dfrac{1}{GAvL} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_3 \\ \\ Q_6 \end{vmatrix} \quad (2.45)$$

Dimana

$$\varsigma = (L / 3EI + 1/G.AvL)^2 + (-.L / 6EI + 1/G.AvL)^2$$

$$= L / 3EI\, (L / 12EI + 1/G.AvL)$$

$$= L/EI.\ L/12EI\, (1 + 12EI/L.\ 1/GavL)$$

$$\varsigma = L^2 / 12E^2I^2 + (1 + 12EI/G.AvL^2) \quad (2.46)$$

Persamaan (2.46) dapat disederhanakan :

$$\varsigma = L^2 / 12E^2I^2\, (1 + \phi\,)$$

Dengan pengertian :

$$\phi \;=12EI/G.AvL^2 \qquad (2.47)$$

Melihat kesetimbangan pada elemen, didapat gaya geser Q_2 dan Q_5

$$Q_2 = -Q_5 = Q_3+Q_6 / L \qquad (2.48)$$

Dari persamaan (2.45) dan (2.48) :

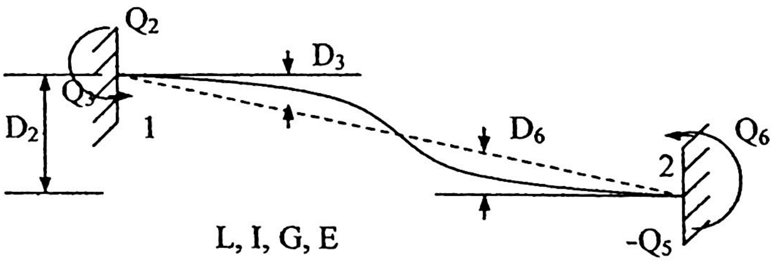
$$Q_2 = 1/L\varsigma \;\; (L/2EI.\ D_3 + L/2EI.\ D_6) \qquad (2.49)$$

$$Q_5 = -1/L\varsigma \;\; (L/2EI.\ D_3 + L/2EI.\ D_6) \qquad (2.50)$$

Bila dinyatakan secara matrik :

$$\begin{vmatrix} Q_2 \\ \\ Q_5 \end{vmatrix} = \frac{1}{\varsigma} \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2EI} & -\dfrac{1}{2EI} \\ \\ -\dfrac{1}{2EI} & \dfrac{1}{2EI} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} D_3 \\ \\ D_6 \end{vmatrix} \qquad (2.51)$$

Selanjutnya akan ditinjau akibat dari adanya lendutan vertikal pada elemen.



Gambar 2.4 Pada elemen balok lurus terjadi lendutan vertikal dititik diskrit.

Gambar (2.4) menunjukkan terjadinya Lendutan D_2 pada elemen. Akibat terjadinya lendutan D_2 ini, akan timbul D_3 dan D_6 dimana :

$$D_3 = D_6 = D_2/L \qquad (2.52)$$

Substitusi persamaan (2.52) ke persamaan (2.45) :

$$Q_3 = 1/\varsigma \;\; (L/3EI + L/6EI)\ D_2/L$$

$$Q_6 = 1/\varsigma \;\; (L/6EI + L/3EI)\ D_2/L$$

Bila disederhanakan :

$$Q_3 = 1/\varsigma \,.\, 1/2EI \,.\, D_2 \tag{2.53}$$

$$Q_6 = 1/\varsigma \,.\, 1/2EI \,.\, D_2 \tag{2.54}$$

Dari persamaan (2.48) :

$$Q_2 = 1/\varsigma \,.\, 1/EI \,.\, D_2/L$$

$$Q_5 = -1/\varsigma \,.\, 1/EI \,.\, D_2/L \tag{2.55}$$

Analogy dengan proses diatas, akan didapatkan :

$$Q_3 = -1/\varsigma \,.\, 1/2EI \,.\, D_5$$

$$Q_6 = -1/\varsigma \,.\, 1/2EI \,.\, D_5$$

$$Q_2 = -1/\varsigma \,.\, 1/EI \,.\, D_5/L$$

$$Q_5 = 1/\varsigma \,.\, 1/EI \,.\, D_5/L \tag{2.56}$$

Menyusun kembali hasil-hasil diatas secara matrik akan didapat :

$$\begin{vmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{EA}{L} & & & -\frac{EA}{L} & & \\ & \frac{1}{\varsigma EIL} & \frac{1}{2\varsigma EI} & & -\frac{1}{\varsigma EIL} & \frac{1}{2\varsigma EI} \\ & \frac{1}{2\varsigma EI} & \frac{1}{\varsigma}\left(\frac{1}{3EI}+\frac{1}{GAvL}\right) & & -\frac{1}{2\varsigma EI} & \frac{1}{\varsigma}\left(\frac{1}{6EI}-\frac{1}{GAvL}\right) \\ -\frac{EA}{L} & & & \frac{EA}{L} & & \\ & -\frac{1}{\varsigma EIL} & -\frac{1}{2\varsigma EI} & & \frac{1}{\varsigma EIL} & -\frac{1}{2\varsigma EI} \\ & \frac{1}{2\varsigma EI} & \frac{1}{\varsigma}\left(\frac{1}{6EI}-\frac{1}{GAvL}\right) & & -\frac{1}{2\varsigma EI} & \frac{1}{\varsigma}\left(\frac{1}{3EI}+\frac{1}{GAvL}\right) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{vmatrix} \tag{2.57}$$

Dimana :

$$\varsigma = L^2 / 12E^2I^2 (1 + \phi)$$

Dengan pengertian :

$$\phi = 12EI/G.AvL^2 \tag{2.58}$$

Dengan demikian sudah dapat diturunkan matrik kekakuan elemen dalam bidang, yang bila disederhanakan kembali dengan memasukkan harga-harga ς dan ϕ akan didapatkan :

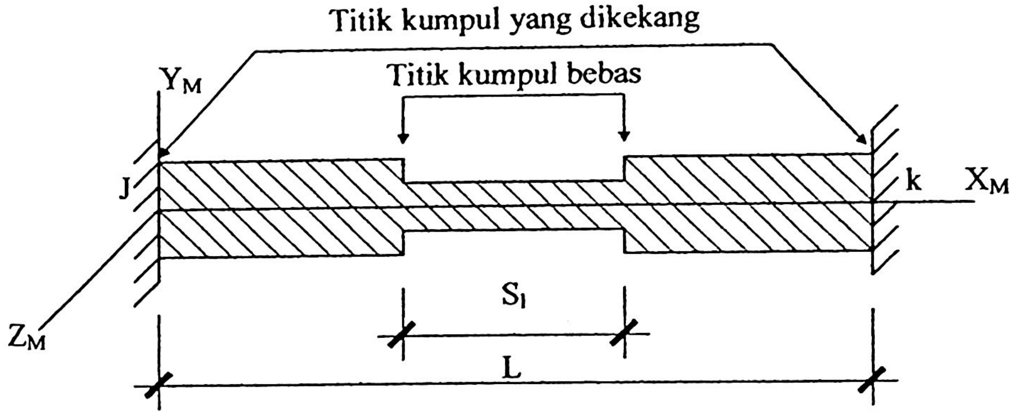
$$[K] = \begin{vmatrix} \frac{EA}{L} & & & -\frac{EA}{L} & & \\ & \frac{12\,EI}{L^3(1+\phi)} & \frac{6\,EI}{L^2(1+\phi)} & & -\frac{12\,EI}{L^3(1+\phi)} & \frac{6\,EI}{L^2(1+\phi)} \\ & \frac{6\,EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{4+\phi}{1+\phi}\,\frac{EI}{L} & & -\frac{6\,EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{2-\phi}{1+\phi}\,\frac{EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & & & -\frac{EA}{L} & & \\ & -\frac{12\,EI}{L^3(1+\phi)} & -\frac{6\,EI}{L^2(1+\phi)} & & \frac{12\,EI}{L^3(1+\phi)} & -\frac{6\,EI}{L^2(1+\phi)} \\ & \frac{6\,EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{2-\phi}{1+\phi}\,\frac{EI}{L} & & -\frac{6\,EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{4+\phi}{1+\phi}\,\frac{EI}{L} \end{vmatrix} \qquad (2.59)$$

Untuk harga ϕ yang cukup kecil atau diambil $\phi = 0$, maka akan didapatkan matrik kekakuan elemen :

$$[K] = \begin{vmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12\,EI}{L^3} & \frac{6\,EI}{L^2} & 0 & -\frac{12\,EI}{L^3} & -\frac{6\,EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6\,EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6\,EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12\,EI}{L^3} & \frac{6\,EI}{L^2} & 0 & \frac{12\,EI}{L^3} & -\frac{6\,EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6\,EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6\,EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{vmatrix} \qquad (2.60)$$

2.5 Matrik Kekakuan Balok Non Prismatik

Misalkan sebuah balok non prismatis seperti gambar (2.5) :



Gambar 2.5 Batang bersegmen dengan pendekatan kekakuan

Pendekatan Kekakuan akan diturunkan dengan memakai gambar diatas yang memperlihatkan batang bersegmen yang terjepit dikedua ujungnya. Disetiap titik pertemuan segmen terdapat perpindahan bebas D_{FI} , sedang diujung j dan k terdapat perpindahan yang dikekang D_R. Hubungan aksi-perpindahan untuk struktur ini dapat dituliskan dalam bentuk yang ditata ulang dan disekat sebagai berikut :

$$\begin{vmatrix} K_{FF} & K_{FR} \\ K_{RF} & K_{RR} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} D_F \\ D_R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_F \\ A_R \end{vmatrix} \qquad (2.61)$$

Perkalian diatas menghasilkan

$$K_{FF}\, D_F + K_{FR}\, D_R = A_F \qquad (2.62)$$

$$K_{RF}\, D_F + K_{RR}\, D_R = A_R \qquad (2.63)$$

Penyelesaian untuk D_F dalam persamaan pertama memberikan

$$D_F = K_{FF}^{-1}\,(A_F - K_{FR}\, D_R) \qquad (2.64)$$

Dengan memasukkan persamaan untuk D_F ini ke persamaan kedua dan menata ulang suku-sukunya, kita peroleh

$$(K_{RR} - K_{RF}\,K_{FF}^{-1}\,K_{FR})\,D_R = A_R - K_{RF}\,K_{FF}^{-1}\,A_F \qquad (2.65)$$

Ruas kanan persamaan diatas terdiri dari aksi jenis R dan pengaruh aksi jenis F (yang mengurangi). Jika semua perpindahan D_R sama dengan nol (batang terjepit), persamaan diatas menghasilkan hubungan antara aksi jenis R dan F :

$$A_R = K_{RF}\,K_{FF}^{-1}\,A_F \qquad (2.66)$$

Dengan demikian, matrik transfer T_{ML} untuk gaya jepit ujung jenis R akibat satu satuan aksi jenis F ialah

$$T_{ML} = K_{RF}\,K_{FF}^{-1} \qquad (2.67)$$

Sebaliknya, jika semua aksi jenis F disamakan dengan nol, maka persamaan

$$(K_{RR} - K_{RF}\,K_{FF}^{-1}\,K_{FR})\,D_R = A_R - K_{RF}\,K_{FF}^{-1}\,A_F$$

berubah menjadi

$$(K_{RR} - K_{RF}\,K_{FF}^{-1}\,K_{FR})\,D_R = A_R \qquad (2.68)$$

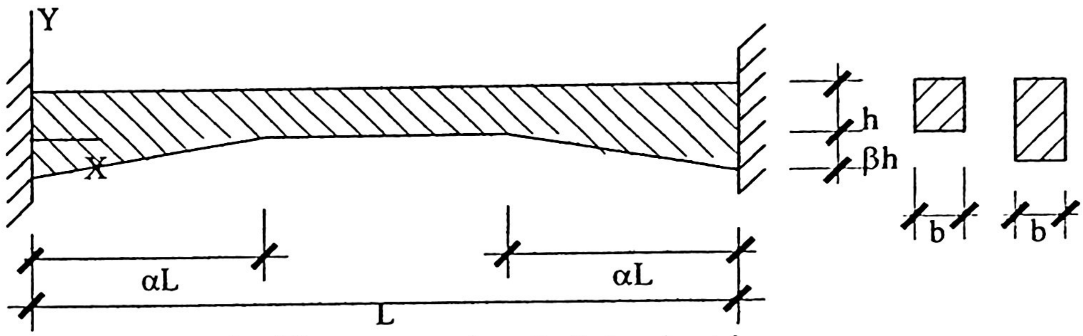
Karena aksi AR dan perpindahan DR selaras, suku dalam kurung pada persamaan diatas merupakan matrik kekakuan untuk perpindahan satuan diujung batang bersegmen. Jadi

$$K = K_{RR} - K_{RF}\,K_{FF}^{-1}\,K_{FR} \qquad (2.69)$$

Substitusi persamaan $T_{ML} = K_{RF}\,K_{FF}^{-1}$, kepersamaan diatas maka menghasilkan

$$K = K_{RR} - T_{ML}\,K_{FR} \qquad (2.70)$$

Sedangkan untuk mencari kekakuan balok non prismatis linier maka, kita misalkan sebuah balok seperti tergambar :



Gambar 2.6 Elemen non prismatis linier simetris

Gambar (2.6) menunjukkan satu elemen non prismatis linier simetris, yang dipengaruhi oleh parameter α dan β.

Persamaan garis linier dikedua ujung elemen dapat dimisalkan sebagai berikut :

$$y = ax + b \tag{2.71}$$

Koefisien a dan b dapat dicari dengan memasukkan harga-harga αL dan βh kedalam persamaan diatas.

Untuk ujung kiri elemen :

Pada $x \;= 0$

$y \;= -\beta h$

Substitusikan kedalam persamaan , $y = ax + b$:

$y \;= ax + b$

$\beta h = 0 + b$

$$b \;= -\beta h \tag{2.72}$$

Pada $x \;= \alpha L$

$y \;= 0$

Substitusikan kedalam persamaan, $y = ax + b$:

$y \;= ax + b$

$0 \;= a.\alpha L + b$

$$0 \quad = a.\alpha L - \beta h$$

$$a \quad = \beta h/\alpha L \tag{2.73}$$

Dengan demikian persamaan, y = ax + b bisa dituliskan menjadi :

$$y \quad = \beta h/\alpha L.x - \beta h \tag{2.74}$$

atau $y \quad = \beta h \,(x/\alpha L \; - 1 \,)$ (2.75)

Analogy dengan proses diatas, persamaan linier diujung kanan elemen bisa dihitung juga sebagai berikut :

Pada $x \; = \; L - \alpha L$

$y \; = 0$

Substitusikan kedalam persamaan, y = ax + b :

$$y \quad = ax + b$$

$$0 \quad = a\,(L - \alpha L) + b$$

$$b \quad = -a\,(L - \alpha L)$$

$$b \quad = -aL\,(1 - \alpha) \tag{2.76}$$

Pada $x \; = L$

$y \; = -\beta h$

Substitusikan kedalam persamaan, y = ax + b :

$$y \quad = ax + b$$

$$-\beta h = aL + b$$

$$-\beta h = aL - aL\,(1 - \alpha)$$

$$-\beta h = aL\,(1 - 1 + \alpha)$$

$$a \quad = -\, \beta h/\alpha L \tag{2.77}$$

dengan demikian ,

$$b \quad = -\beta h - \alpha L$$

$$b \quad = -\beta h + \beta h/\alpha$$

$$b \quad = \beta h\,(1/\alpha - 1) \tag{2.78}$$

jadi persamaan linier diujung kanan elemen dapat dituliskan sebagai :

$$y = -\beta h/\alpha L\ x + \beta h(1/\alpha - 1) \tag{2.79}$$

atau

$$y = \beta h\,(-x/\alpha L + 1/\alpha - 1) \tag{2.80}$$

Selanjutnya sebagaimana pada elemen prismatis dua dimensi, elemen non prismatis ini juga mempunyai 3 vektor bebas pada masing-masing ujungnya sehingga dengan demikian akan mempunyai suatu matrik kekakuan elemen dengan ordo 6 x 6.

Proses menghitung koefisien-koefisien kekakuan elemen non prismatis ini, adalah sama dengan proses menurunkan matrik kekakuan elemen prismatis, yaitu dengan berturut-turut memberikan deformasi axial, deformasi geser dan deformasi lentur pada elemen, untuk kemudian menghitung pengaruh masing-masing deformasi tersebut.

Suatu hal yang berbeda disini ialah, bila pada elemen prismatis perhitungan dapat dilakukan dengan mengambil satu interval perhitungan saja, yaitu $0 \leq x \leq L$, maka pada proses menurunkan kekakuan elemen non prismatis ini, perhitungan harus dilakukan atas tiga interval, yaitu $0 \leq x \leq \alpha L$ sebagai interval pertama, $\alpha L \leq x \leq L-\alpha L$ sebagai interval kedua, $L-\alpha L \leq x \leq L$ sebagai interval terakhir.

Tentu saja kekakuan lentur (flexural rigidity) EI dan kekakuan axial (axial rigidity) EA dari ketiga interval tersebut tidaklah sama sebagaimana pada elemen prismatis. Bila kekakuan lentur dan axial pada interval tengah ($\alpha L \leq x \leq L-\alpha L$) diambil masing-masing EI_o dan EA_o, maka pada interval non prismatis kedua besaran kekakuan tersebut dapat dihitung sebagai :

$$EI_x = EI_o\,((h+y)/h)^3 \tag{2.81}$$

$$EA_x = EA_o\,(h+y)/h \tag{2.82}$$

Dimana

$$EI_o = E\,bh^3 / 12 \tag{2.83}$$

$$EA_o = E\,bh \tag{2.84}$$

DAFTAR PUSTAKA

Dewobroto, Wiryanto, Aplikasi Rekayasa Konstruksi dengan SAP2000. Penerbit PT Elex Media Komputindo, Jakarta 2004

Jr, William Weaver , M.Gere, James dan Wira, Analisa Matrik Untuk Struktur Rangka. Penerbit Erlangga, Jakarta 1986

Kh, Ir Sunggono,.Buku Teknik Sipil. Penerbit Nova, Bandung 1995

Pramono, Handi, Struktur 2D & 3D dengan SAP2000. Penerbit CV. Maxikom, Solo 2004

Supartono, Ir.F.X dan Boen, Ir.Teddy. Analisa Struktur dengan Metode Matrik. Penerbit Universitas Indonesia, 1987